13+1 feladat invariáns tulajdonságokra

1. Anna 24 papírlap közül néhányat 10 részre vágott, majd az így kapott részek közül néhányat ismét 10 részre vágott és így tovább. Lehetséges-e, hogy ezt néhányszor megismételve 2012 papírlapot kapjon?

2. Béla egy papírlapot tetszőleges módon felosztott hat részre. Az így kapott részek közül az egyik részt felosztotta 11 részre, majd a kapott részek egyikét ismét 6 részre, és így folytatta, arra sem ügyelve, hogy a 6, illetve 11 részre osztást váltogatva végezze. Bizonyos számú osztás után megszámolta a kapott részeket, és azt állította, hogy 2012 részt kapott. Helyesen számolt –e Béla?

3. Egy táblára felírtuk az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 számokat. Egy-egy alkalommal két számot letörlünk és helyettük azok különbségét írjuk fel. Ezt kilencszer elvégezve előfordulhat –e , hogy a megmaradó szám a nulla?

4. A táblára felírtuk az 1,2,3,…,20 számokat. Egy-egy alkalommal letörlünk két számot, a-t és b-t, s helyettük felírjuk $a+b-1$ számot. Ezt az eljárást 19-szer elvégezve milyen szám maradhat a táblán?

5. A táblára felírtuk az 1,2,3,…,20 számokat. Egy-egy alkalommal letörlünk két számot, a-t és b-t, s helyettük felírjuk az $ab+a+b$ számot. Ezt az eljárást 19-szer elvégezve milyen szám maradhat a táblán?

6. Kezdetben egy 3x3-as táblázat minden mezőjén 0 áll, majd egy-egy lépésben a tábla valamely 2x2-es részén a számok mindegyikét 1-gyel növeljük. Ilyen lépésekkel megkaphatjuk –e a mellékelt kitöltést?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

7. Két kupacban gyufák vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacból elveszünk néhány szálat, s a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Elérhető –e, hogy mindkét kupacban ugyanannyi gyufaszál legyen, ha kezdetben az egyik kupacban 1, a másikban 2 szál volt?

8. Egy négyzet csúcsaiba gyufákat helyeztük. Egy-egy alkalommal bármelyik csúcsból vehetünk el gyufákat, de az egyik, ezzel szomszédos csúcsba kétszer annyi gyufát kell helyezni. Kezdéskor a csúcsokban valamilyen körüljárást tekintve a gyufák száma 1,0,0,0. A fentebb közölt eljárást ismételve elérhet a csúcsokban lévő gyufák száma 1,9,8,9 legyen?

9. Egy kocka csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal valamelyik él két végén álló számot 1-gyel növelhetjük. Ezt az eljárást néhányszor megismételve elérhető –e, hogy minden csúcsban ugyanaz a szám álljon, ha a kezdő állapotban

a) az egyik csúcsban 1-es, a többiben 0 van?
b) az egyik oldallap két szemközti csúcsában 1-es, a többiben 0 van?

10. A táblára a következő számok vannak felírva: $7+\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$-1, 9. Bármely lépésben kiválaszthatunk a táblán két számot, mondjuk a-t és b-t,és azokat $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$-vel és $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$-vel helyettesítjük. Elérhető –e, hogy valahány lépés után a táblán valamilyen sorrendben $8+\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, 7 számok álljanak?

11. A táblára felírtunk néhány,nullától különböző valós számot, majd egy-egy lépésben valamely két számot, A-t és B-t letöröljük, s helyettük két új számot írunk fel, $A+\frac{B}{2}$ és $B-\frac{A}{2}$ számokat. Néhány ilyen lépés után megkaphatjuk –e újra az eredetileg felírt számokat?

12. Egy házaspár négy másik házaspárt hív meg vacsorára. Egy kör alakú asztalhoz felváltva ülnek le a nők és a férfiak. Mindenki előtt egy pohár van, s ezek egyszer csak elkezdenek vándorolni. Minden percben egy pohár egyet balra, egy másik pohár egyet jobbra lép. Elérhető –e, hogy egy idő múlva minden pohár a házigazda előtt legyen?

13. Bal oldalon egy sáska, középen egy szöcske, jobb oldalon egy tücsök ül egy hosszú, egyenes árokban. Időnként valamelyik átugorja egyik szomszédját. Előfordulhat –e, hogy 2013 ugrás után újra a kiinduló sorrendben ülnek,ha végig csak az árokban (egy egyenes mentén) ugrálnak?

13+1. Az ábrán látható 4x4-es keretben 15 számozott lapocska van. Az üres helyre mindig oda tudjuk tolni bármelyik lapszomszédot. Ilyen tologatással elérhetjük –e, hogy mindegyik lap visszakerüljön arra a helyre,ahol a kiinduló állapotban volt,és csak az 1-es és a 2-es jelű legyen felcserélve?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	