

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LX. esztendő

2023-2024. tanév

9. évfolyam

II. forduló

1. Igazoljuk, hogy $2023^2 + 2023^2 \cdot 2024^2 + 2024^2$ négyzetszám.

2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2024$ függvény grafikonja és a két koordinátatengely által határolt derékszögű háromszöget. Hány rácspont helyezkedik el a háromszög belsejében? (Rácspontnak nevezzük a koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)

3. Bizonyítsuk be, hogy ha három 0-tól különböző szám összegének a reciproka egyenlő a számok reciprokértékeinek összegével, akkor van közöttük két olyan szám, amelyek összege 0.

4. Mely p prímszámokra lesz $p^2 + 2$ is prím?

5. Az ABC háromszög súlyvonalainak hosszát jelölje rendre s_a, s_b, s_c kerületének felét s .

Bizonyítsuk be, hogy $s < s_a + s_b + s_c < \frac{3s}{\sqrt{2}}$.

6. Aladár, Béla, Csaba és feleségeik (nem feltétlenül azonos sorrendben) Dóra, Enikő és Fanni. E hat személy életkorának összege 151 év. Mindegyik férj 5 évvel idősebb a feleségénél. Béla 1 évvel idősebb, mint Fanni, Enikő és Béla együtt 48 évesek, Csaba és Enikő életkorának összege 52 év.

Állapítsuk meg, hogy ki hány éves, és ki kinek a házastársa. (A kérdéses életkorok egész számok.)