

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LX. esztendő

2023-2024. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Legyenek a, b, c valós paraméterek, és tegyük fel, hogy c pozitív. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (c-2) \cdot x^2 + (a-x)^2 + (b-x)^2$ függvény szélsőértékét.
2. Mely számjegyekre nem végződik a tízes számrendszerben az első n darab pozitív egész szám összege egyetlen pozitív egész n esetén sem? (A választ indokolni kell.)
3. A derékszögű koordináta-rendszerben egy háromszög egyik csúcsa $A(-4; 1)$, súlypontja $S(0; 3)$, köré írható körének középpontja $O(-1; 5)$. Számítsuk ki a háromszög másik két csúcsának koordinátáit, és írjuk fel oldalegyeneseinek egyenletét.
4. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsba futó élei páronként merőlegesek egymásra. Egy P pontnak a tetraéder ABD, BCD, ACD lapjaitól vett távolsága megegyezik a kérdéses laphoz tartozó testmagasság harmadával. Mekkora a P pont és az ABC lap távolsága?
5. Legyen p 3-nál nagyobb prím. Igaz-e, hogy p darab egymást követő egész szám négyzetének összege osztható p -vel? (A választ indokolni kell.)
6. Hány olyan páronként nem egybevágó téglatest létezik, amelyre igaz, hogy éleinek hossza adott egységben mérve pozitív egész szám, valamint felszíne és térfogata azonos számértékű?