

# Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LX. esztendő

2023-2024. tanév

10. évfolyam

II. forduló

1. Ha a 10 839-et és 11 863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, mind a kétszer ugyanazt a maradékot kapjuk. Mennyi ez a maradék?

2. Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, nem egyenlő szárú és mindegyik szögének mértéke fokokban mérve egész szám?

3. Egy  $r$  sugarú félkörív felezőpontja  $C$ , a félkörív egy tetszőleges  $D$  pontjának a merőleges vetülete az átmérőre  $P$ . Bizonyítsuk be, hogy  $CP^2 + DP^2 = 2r^2$ .

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számok halmazán.

$$4^{3x} + 4^{\frac{1}{3x}} = 8$$

5. Tekintsük az  $x^2 - 2(p+1)x + 2p^2 + 2p - 1 = 0$  egyenletet, ahol  $p$  valós paramétert jelöl. Legyen  $x_1$  és  $x_2$  az egyenlet két (nem feltétlenül különböző) valós megoldása. Állapítsuk meg az  $y = 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)$  kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét.

6. Az egész együtthatós  $p(x)$  polinom helyettesítési értéke öt különböző egész helyen 2023. Bizonyítsuk be, hogy  $p(x)$  semmilyen egész  $x$  esetén sem veheti föl a 2025 értéket.