

# Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIX. esztendő

2022-2023. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. Egy kis falu 32 házból áll. Reggelente a csordás kolompolására minden házból egy tehenet kihajtanak a rétre legelni, és estére mindegyik jóllakottan visszatér a saját házának istállójába. (A tehenek pontosan tudják hol laknak.) Egy este a csorda tagjai egymás után térnek haza, de az elsőnek érkező Riska most ötletszerűen megy be egy házba, és ott is marad. Ezután mindegyik érkező a saját istállójába megy, ha az nem foglalt. Ha pedig az foglalt, akkor véletlenszerűen választ egy olyan istállót, ahova még nem ment be tehén, és szintén ott marad. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsónak érkező Bimbó a saját házába megy?

2. Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $AB$  átfogójának harmadolópontjai  $D$  és  $E$ . ( $D$  az  $A$  csúcshoz van közelebb.) Mekkora részekre osztja a  $CD$  és a  $CE$  szakasz az  $ACB$  szöget, ha az  $ACD$  szög nagysága  $30^\circ$ ?

3. Az  $ABC$   $C$ -ben derékszögű háromszög  $a$ ,  $b$  és  $c$  oldalhosszairól tudjuk, hogy

$$3c^2 - 5b^2 + 5ab = 0.$$

Határozzuk meg a háromszög hegyesszögeinek nagyságát.

4. 2023 darab nemnegatív egész számról tudjuk, hogy bárhogyan is hagyunk el közülük egyet, a megmaradó 2022 darab szám két, egyenként 1011 elemű csoportra osztható úgy, hogy a csoportokban levő számok összege egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a 2023 db nemnegatív egész szám egyenlő.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$[\sin x] + 2\{\cos x\} = 1$$

( $[a]$  az  $a$  szám egészrészét,  $\{a\}$  pedig  $a$  törtrészét jelenti.)

6. Van-e megoldása a pozitív egész számokból álló rendezett  $(x; y; z)$  számhármások halmazán a következő egyenletnek?

$$15x^2 - 4y^2 = 3^z$$