Radon transzformáció
(Előadás a Szőkefalvi Nagy Gyula Emlék-konferencián)

Kurusa Árpád

Mielőtt az előadás tudományos témájába kezdenék, szeretném elmondani egy személyes élményemet Szőkefalvi Nagy Gyulával kapcsolatban — mert van ilyen, habár én csak 8 évvel azután születtem, hogy Szőkefalvi Nagy Gyula meghalt. Ez egyben az egyetlen középiskolai igazgatói intőm története is... Történt ugyanis, hogy 1978-ban közös fogorvosi vizsgálatból az iskolába való visszatérés alkalmával leváltam az osztályról és bementem Szeged akkor egyedüli, és általam sűrűn látogatott Antikváriumába — mert útba esett... Ott aztán belevesztem a könyvek átnézésébe és megtaláltam Szőkefalvi Nagy Gyula Geometriai Szerkesztések Elmélete című könyvét, amit meg is vettem. Mikor beértem az osztályomba, már keresett az osztályért akkor felelős matematikatanárnőm, akinek nagy örömmel újságoltam el, hogy milyen kincsre tettem szert. A tanárnő gratulált, elmondta, hogy milyen ritkaságszámba menő nagyszerű könyvet találtam, aztán átküldött az igazgatóhoz az intőért, mert bizony elfelejtettem szólni, hogy külön útra indultam... A könyvet aztán nagy örömmel olvastam, mert szerencsére sok olyan volt benne (körzővel való szerkeszthetőség például) aminek befogadására már képes voltam, és felfedezésszámba ment. Ma is úgy gondolom, hogy megérte azt az intőt, amiért érdekes módon sem otthon, sem matematika tanáraimtól semmi szemrehányást soha nem kaptam. Huszonöt év után is nagy becsben tartom a könyvet sajátomként otthon a polcon. Visszatérve az előadás megjelölt témájához, először kezdjük néhány definícióval és néhány példával.

Klasszikus Radon transzformáció. $R\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_c^\infty(G(d,n))$, ahol $1 \le d \le n-1$,

$$Rf(\xi) = \int_\xi f\,dF,$$

$\xi \in G(d,n)$, dF a kanonikus felszínmérték, és $G(d,n)$ a d-dimenziós affin alterek Grassmann-sokasága.

ACTAFORM© $^{FYX\ Bt}$ 1/19/2004.

Gömbi Radon transzformáció. $R\colon C^\infty(\mathbb{S}^n) \to C^\infty(S(d,n))$, ahol $1 \le d \le n-1$,

$$Rf(\xi) = \int_\xi f dF,$$

$\xi \in S(d,n)$, dF a kanonikus felszínmérték, és $S(d,n)$ a d-dimenziós affin alterek által az $\mathbb{S}^n$ gömbfelületből kimetszett "főkörök".

Mindkét integrál-transzformációval már 100 éve is foglalkoztak: Előbbivel 1917-ben Radon, utóbbival 1916-ban Funk, igaz, mindketten csak a $d = n-1$ esetet viszgálva, melynek során inverziós formulákat adtak meg. Vizsgálataik motivációja leginkább csak a probléma érdekessége volt, habár Funk esetében a gömbi harmonikusok kapcsán merült fel a kérdés, hogy egy minden főkörön eltűnő integrált produkáló függvény eltérhet-e a nullától.

Jó negyven év kellett, hogy a transzformációt Radonról elnevező Fritz John a differenciálegyenletek kapcsán komoly alkalmazását találja a Radon transzformációnak. "Plane Waves" című könyve ma is elkápráztatja olvasóját. Aztán A.M. Cormack orvos az 1960-as évek elején rendkívül fontos alkalmazást talált, amikor javasolta, kidolgozta, aztán meg is építette az első tomográfot. Ennek alapja az, hogy az f sűrűség-függvényű anyagba I_0 intenzitással belépő röntgen sugár I kilépő intenzitása teljesíti a

$$\ln(I_0/I) = \int_\psi f(x)dx = Rf(\psi)$$

összefüggést, ahol ψ a sugár áthaladásának egyenese. Hirtelen fontos lett a Radon transzformáció numerikus invertálhatósága és ehhez alaposan meg kellett ismerni a transzformációt magát.

Mára az eredeti probléma olyan kiszélesedésével állunk szembe, hogy valamikori részei önálló matematikai területté váltak, más átfedő területek pedig megújúltak az új kapcsolatok és motivációk révén.

Nézzünk néhány ilyen területet, mellyel Szegeden is foglalkoznak.

1. Ilyen terület az is, amit R. J. Gardner könyvének 1995-ös megjelenése óta geometriai tomográfiának neveznek, és olyan kérdéseket vizsgál például, hogy hány (!) irány szükséges ahhoz, hogy az $Rf(\xi)$ értékek meghatározzák az f függvényt, ha az egy tartomány indikáló függvénye.

2. Az általános differenciálegyenletek megoldásának még Fritz Jhon által talált módszerének további jelentős fejlődése és a Radon transzformáció közvetlen kapcsolata a Laplace operátorral elsősorban S. Helgason munkássága nyomán vezetett (persze másfajta kérdéseket is tartalmazó) geometriai analízis olyan

eredményeihez, mint például a mozgásinvariáns differenciálegyenletek megoldhatósága sokaságok garmadáján.

3. A geometriai objektumokon, illetve azok sokaságain való integrálásokkal nyerhető integráltranszformációk — amilyen maga a Radon transzformáció is természetesen — vizsgálatának területe Gelfand és társai munkássága és a klasszikus Santalo-féle integrál geometriával való nyilvánvaló kapcsolata nyomán lettek (újra) elnevezve (Gelfand-féle) integrálgeometriának. Ilyen transzformáció az

$$R_* f(x) = \int_{x \in \xi} f(\xi) dm$$

($f \in C_c^\infty(G(d,n)) \to \mathbb{R}$, dm a Haar-mérték), duális Radon transzformáció is, melynek egyik megjelenését — Szabó Zoltánt követve — sokan bumeráng transzformációnak hívják (az origónak az integrálban szereplő ξ-kre vett vetületeinek nyoma ugyanis egy az origóból induló és oda visszatérő pontpályát, konkrétan kört ír le, ha $n = 2$.)

4. A numerikus vizsgálatok számítógépes mplementálása kapcsán született diszkrét tomográfia is a Radon transzformáció egyik igen gyorsan fejlődő területe, ahol diszkrét pontokban elhelyezett súlyok megismerése a cél a pontokon átmenő egyeneseken kialakuló összegekből. Magam nem foglalkozom ezzel a területtel, de Szegeden komoly kutatások folynak. (Kuba Attila csoportja - képfelismerés)

Nézzünk néhány eredményt, melyeket ezeken a területeken az elmúlt években elértem.

1. Geometriai tomográfia.

Kincses János gondolata alapján jutottunk a következőhöz.

Probléma. Egy kör belsejében lévő két konvex alakzat a kör minden pontjában ugyanakkora szög alatt látszik. Egybeesik-e a két alakzat?

Kiderült, hogy Green és Nietsche már vizsgálták ezt a kérdést abban az esetben, amikor az egyik alakzat egy koncentrikus kör. Mi kiderítettük, hogy ha a két konvex alakzat poligon, akkor egybe kell essenek. A poligonoknak ez a meghatározottsága akkor is megmarad, ha a kör helyett analitikus határral rendelkező konvex tartományban lévő poligonok látszanak egyforma szög alatt a határ minden pontjából. A poligonokat nagyobb általánosságú konvex alakzatokra cserélve sok-sok ellenpélda mutatta, hogy a meghatározottság elvész. A kiutat több látószög felhasználása jelentette. Bebizonyítottam a következőt.

Tétel. *Legyen a síkon C_1, C_2 és F_1, F_2 zárt, konvex tartományok C^2 határológörbével úgy, hogy $F_1 \cup F_2$ a $C_1 \cap C_2$ belsejében van, valamint F_1 és F_2 ugyanakkora szög alatt látszanak $\partial C_1 \cup \partial C_2$ minden pontjából. Ekkor ha ∂C_1 és ∂C_2 metszik egymást és a metszés szöge nem nulla, akkor $F_1 = F_2$.*

2. Képtér.

A Radon-transzformáció analízisének egyik lényeges pontja képterének meghatározása. Nyilvánvaló, hogy $R(C_c^\infty(\mathbb{R}^n))$ nem lehet a teljes $C_c^\infty(G(d,n))$, hiszen $G(d,n)$ több olyan metszettel is rendelkezik, melyek elemei kitöltik az $\mathbb{R}^n$ teret. A $d = 1$ és $n = 3$ esetben már F. Jhon felfedezte, hogy a képteret egy ultrahiperbolikus differenciálegyenlet jellemzi. Ezt jelentősen általánosítottam, és Jhon bonyolult, egyedi módszerét elkerülve következményként kaptam Jhon csodaszép eredményét.

Tétel. *Redundáns módon $d+1$ ponttal paraméterezve a pontokra illeszkedő d-dimenziós affin síkot, a $g \in C_c^\infty(G(d,n))$ függvény akkor és csak akkor a Radon transzformáció melletti képe valamely $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvénynek, ha teljesíti a*

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^k \partial x_j^l} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^l \partial x_j^k}\Big)\frac{g(x_0, x_1, \ldots, x_d)}{\mathrm{Vol}(x_i - x_0)_{i=1,d}} = 0$$

differenciál egyenletek rendszerét, ahol $x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n)$.

Ha ebben a tételben a $d = 1$ esetben áttérünk a

$$p_{i,k} = \det\begin{pmatrix} x_1^i & x_1^k \\ x_2^i & x_2^k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad q_j = \det\begin{pmatrix} x_1^j & 1 \\ x_2^j & 1 \end{pmatrix}$$

Plücker-koordinátákra, akkor eltűnik az a rejtett feltétel, hogy g az egyeneseken van értelmezve, a differenciálegyenletből pedig eltűnik a térfogattal való osztás. Ha $d = 3$, akkor egy további egyszerű átparaméterezést alkalmazva F. Jhon alábbi eredménye adódik.

Tétel. *Az $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$ akkor, és csak akkor a $(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 - \partial_4^2)u = 0$ PDE megoldása, ha létezik $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, melyre*

$$u\Big(\frac{p_1 + q_2}{q_3}, \frac{-p_2 + q_1}{q_3}, \frac{p_1 - q_2}{q_3}, \frac{-p_1 - q_1}{q_3}\Big) = \frac{Rf(\xi, \eta)}{\Big(\sum_{i=1}^3 (q_i/q_3)^2\Big)^{1/2}},$$

ahol p_i, q_i a ξ és η pontokon átmenő egyenes Plücker-koordinátái.

3. Konstans görbületű terek.

A klasszikus Radon-transzformációt könnyen általánosíthatjuk, ha az integrálokat az egyenesek helyett geodetikusokon vesszük. Ilyen általánosság mellett a gömbi Radon transzformáció az első lépés, a második pedig a negatív konstans görbületű sokaságok vizsgálata. Az eredetivel együtt ezt összeségében úgy mondhatjuk, hogy a (totálisan geodetikus) Radon transzformáció vizsgálata konstans görbületű tereken.

Ezeken a tereken sokáig mint megannyi különböző esetet vizsgálták a Radon transzformációit. Furcsa módon néhol jelentősen eltérő eredményekre jutottak ezek a kutatások. Felismerve, hogy a konstans görbületű terek geodetikusai a projektív modellben egybeesnek, bebizonyítottam, hogy a konstans görbületű tereken vett Radon-transzformációk egymásból számolhatóak, amit a következő tétel ír le.

Tétel. *Legyen* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *és* $g(\tilde{\mu}^{-1}(x)) = f(x)(1+\kappa|x|^2)^{(d+1)/2}$*, ahol* $\tilde{\mu}$ *a konstans görbületű terek közti geodetikus-tartó vetítés. Ekkor*

$$R_\kappa g(\tilde{\mu}^{-1}(\xi)) = \sqrt{1+\kappa|\xi|^2}Rf(\xi),$$

ahol $\xi \in G(d,n)$*, és* $\kappa = -1, 0, +1$ *és* R_κ *a* κ *konstans görbületű téren vett totálgeodetikus Radon transzformáció.*

E kapcsolat révén bármely téren elért eredmény átvihető bármely másikra, így a messze legtöbbet vizsgált Euklidészi eset tudásanyaga a többi térre is ismertté vált. Sajnos Beltrami tétele szerint ilyen geodetikus kapcsolat örökíti a konstans görbületet, így ez a hatékony fegyver egyszerre ellőni látszott teljes munícióját. Szerencsére azonban a terek közti kapcsolatok másfajtái alapján újabb Radon transzformációk között található kapcsolat és ez ma már tudatos része a vizsgálatoknak.

Kurusa Á. , SzTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi Vértanúk tere 1.; *e-mail*: kurusa@math.u-szeged.hu