NÉHÁNY GYÖNGYSZEM AZ ELEMI GEOMETRIÁBÓL

Gévay Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

Őszi Kulturális Fesztivál

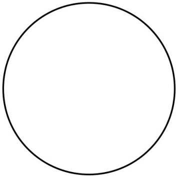
2018. november 10.

HAT KÖR TÉTELE

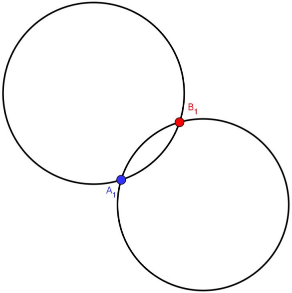
TÉTEL (August Miquel, 1838, 1844)

Adott négy kör, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$*, amelyek egy zárt körláncot képeznek oly módon, hogy az egymást követő körök rendre az* $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)$ *pontpárokban metszik egymást. Tegyük fel, hogy az* A_1, A_2, A_3, A_4 *pontok egy körre illeszkednek. Ekkor a* B_1, B_2, B_3, B_4 *pontok is egy körre illeszkednek.*

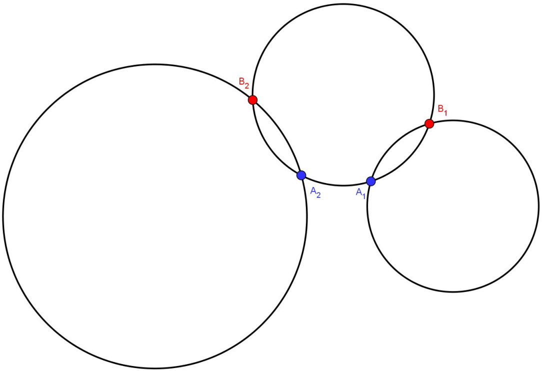
HAT KÖR TÉTELE



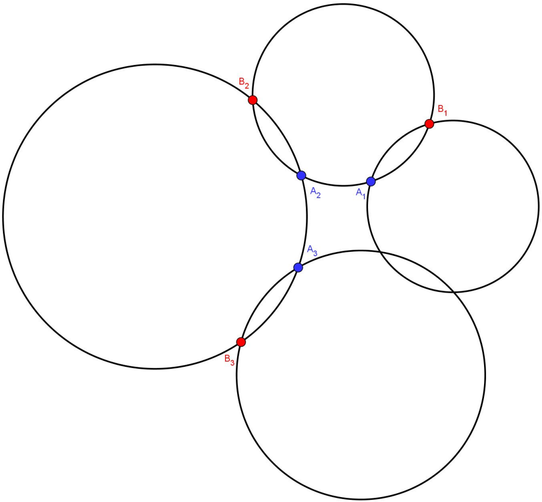
HAT KÖR TÉTELE



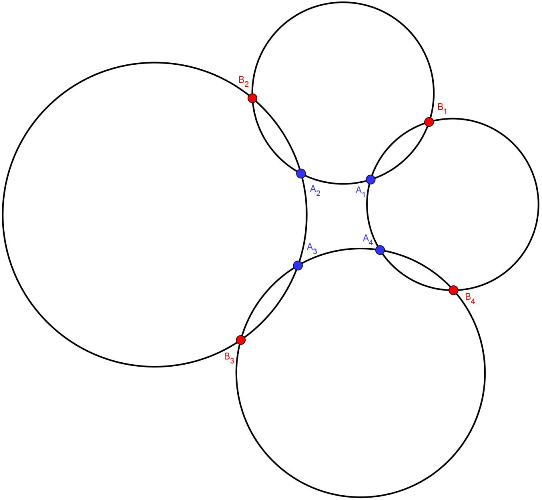
HAT KÖR TÉTELE



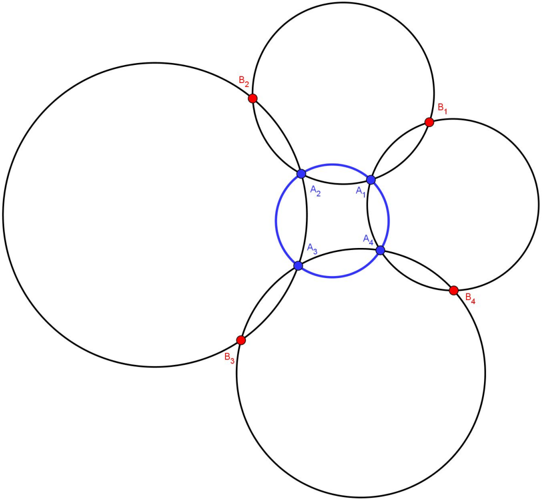
HAT KÖR TÉTELE



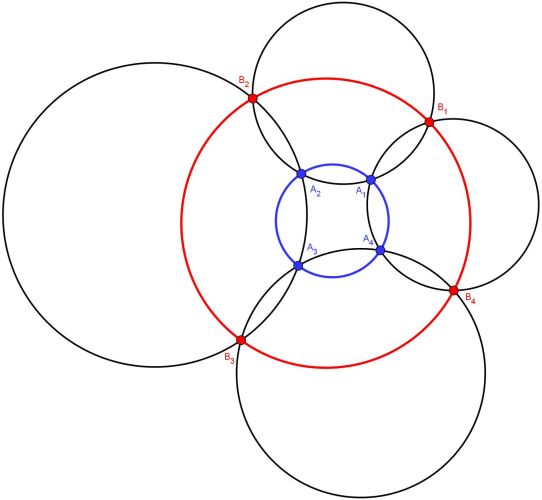
HAT KÖR TÉTELE



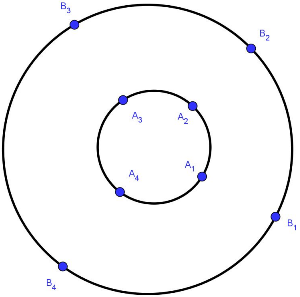
HAT KÖR TÉTELE



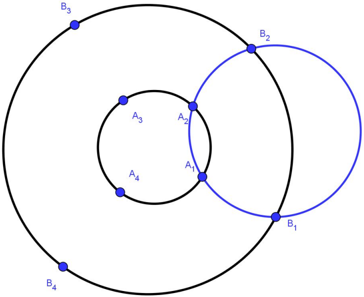
HAT KÖR TÉTELE



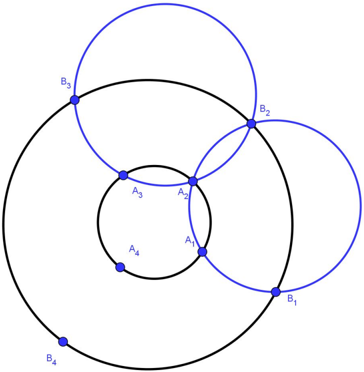
HAT KÖR TÉTELE



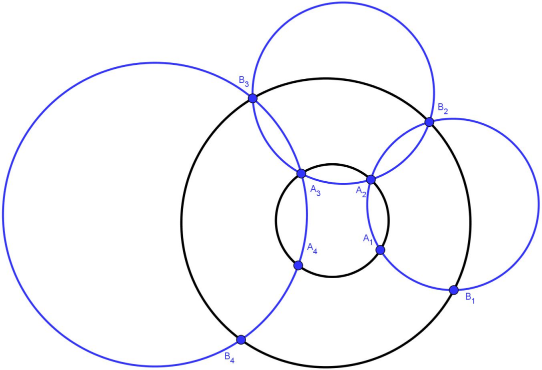
HAT KÖR TÉTELE



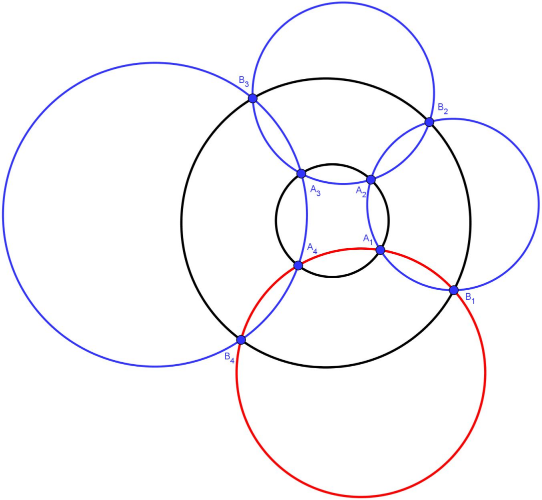
HAT KÖR TÉTELE



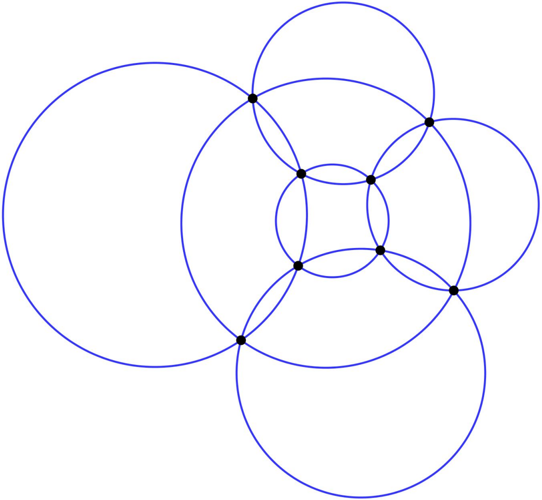
HAT KÖR TÉTELE



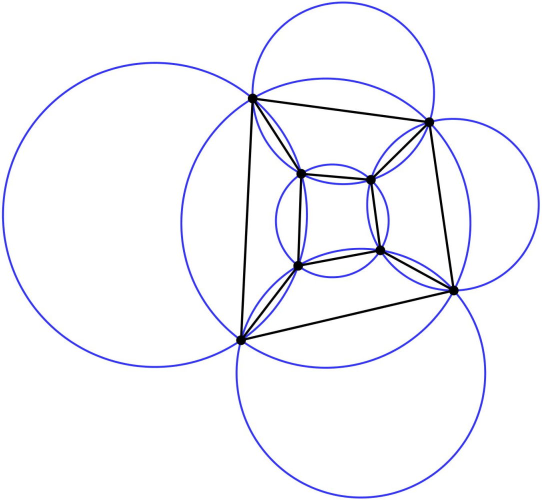
HAT KÖR TÉTELE



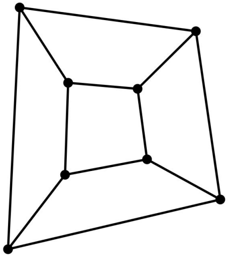
HAT KÖR TÉTELE



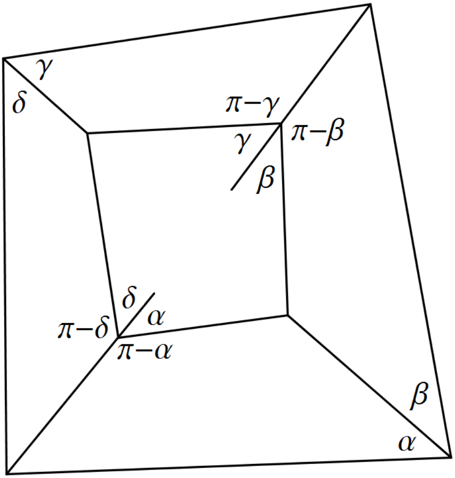
HAT KÖR TÉTELE



HAT KÖR TÉTELE



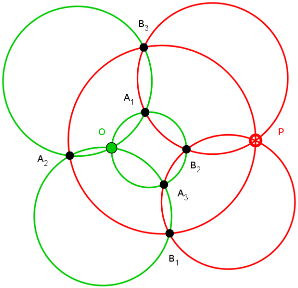
HAT KÖR TÉTELE



HAT KÖR TÉTELE – ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

TÉTEL (A Miquel-tétel Johnson megfogalmazásában)

Ha az $A_1A_2B_3$, $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$ köröknek van egy közös metszéspontjuk, akkor az $A_1B_2B_3$, $A_2B_3B_1$, $A_3B_1B_2$ köröknek is van egy közös metszéspontjuk.

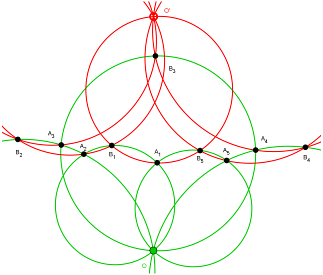


[R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, New York, 1960.]

HAT KÖR TÉTELE – ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

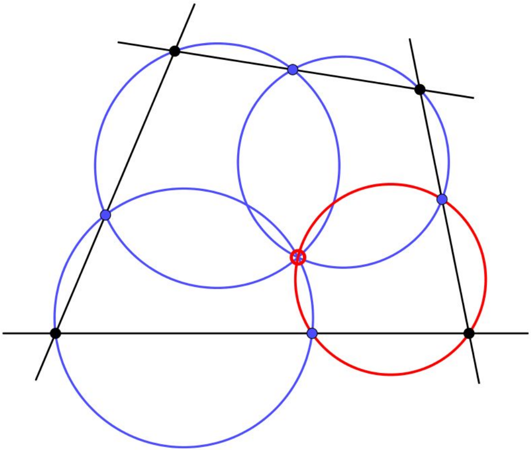
TÉTEL (GG, 2018)

Legyen $n \geq 3$ egy egész szám. Tegyük fel, hogy az $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3, \ldots, A_nB_nA_1$ köröknek van egy közös O metszéspontjuk, és a $B_1A_2B_2, B_2A_3B_3, \ldots, B_{n-1}A_nB_n$ köröknek pedig van egy közös O' metszéspontjuk. Ekkor $B_nA_1B_1$ kör is átmegy az O' ponton.

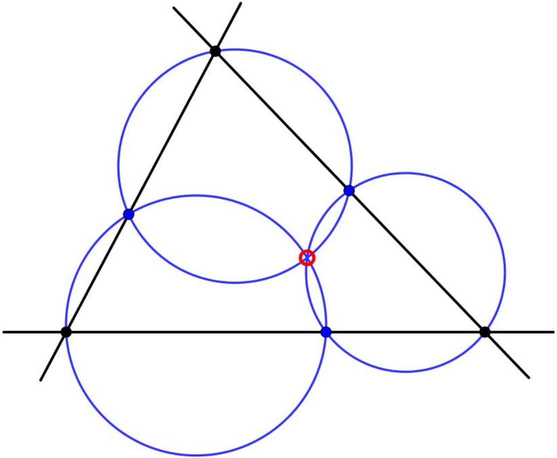


HAT KÖR TÉTELE – ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

TÉTEL (GG) Poligonális verzió (páros oldalszámú sokszögekre):



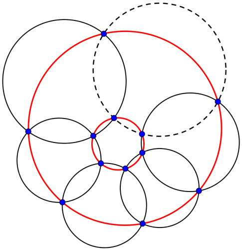
MIQUEL HÁROMSZÖGTÉTELE



HAT KÖR TÉTELE – ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

TÉTEL (GG)

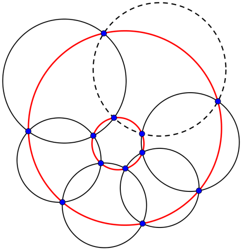
Legyen $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_B$ két kör, és legyen $n > 2$ egy páros szám. Vegyük az $A_1, \ldots, A_n$ pontokat az $\mathcal{C}_A$ körön, a $B_1, \ldots, B_n$ pontokat pedig a $\mathcal{C}_B$ körön, úgy, hogy az összes $(A_1, B_1, A_2, B_2), \ldots, (A_{n-1}, B_{n-1}, A_n, B_n)$ pontnégyesnek van körülírt köre. Ekkor az (A_n, B_n, A_1, B_1) pontnégyesnek is van körülírt köre.

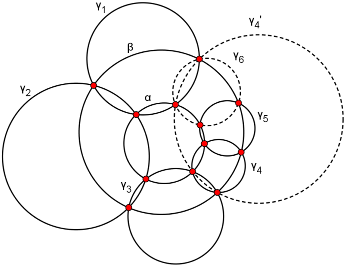


HAT KÖR TÉTELE – ÁLTALÁNOSÍTÁSOK

TÉTEL (GG)

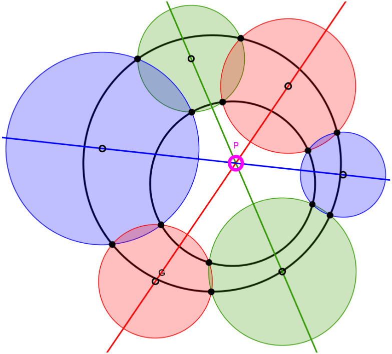
Legyen $\mathcal{C}_A$ és $\mathcal{C}_B$ két kör, és legyen $n > 2$ egy páros szám. Vegyük az $A_1, \ldots, A_n$ pontokat az $\mathcal{C}_A$ körön, a $B_1, \ldots, B_n$ pontokat pedig a $\mathcal{C}_B$ körön, úgy, hogy az összes $(A_1, B_1, A_2, B_2), \ldots, (A_{n-1}, B_{n-1}, A_n, B_n)$ pontnégyesnek van körülírt köre. Ekkor az (A_n, B_n, A_1, B_1) pontnégyesnek is van körülírt köre.





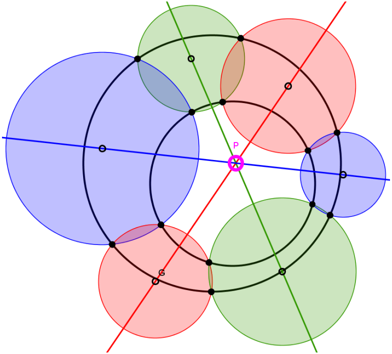
PROBLÉMA (Szilassi Lajos, 2017 – szóbeli közlés)

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi ábrán a három egyenes egy közös pontban metszi egymást!



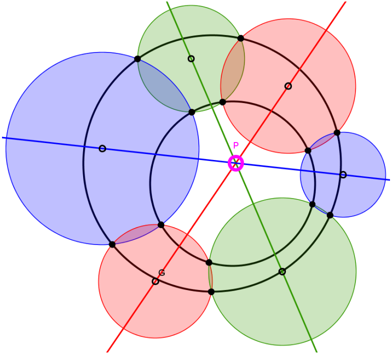
"NYOLC KÖR TÉTELE"

Bizonyítás: (1) GG



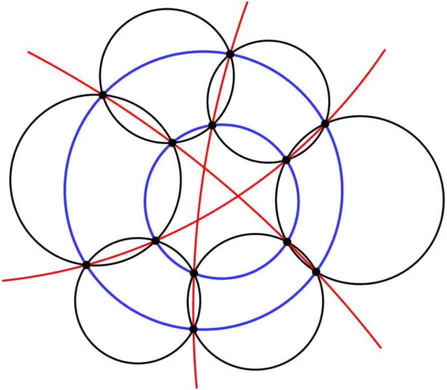
"NYOLC KÖR TÉTELE"

Bizonyítás: (1) GG; (2) G. Horváth Ákos.

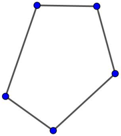


"NYOLC KÖR TÉTELE" $\Longrightarrow$ **"KILENC KÖR TÉTELE"**

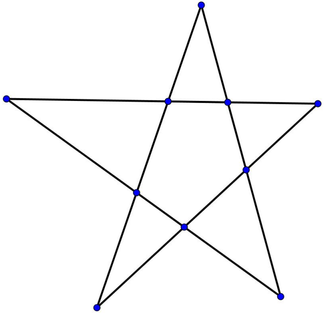
Bizonyítás: (1) GG.



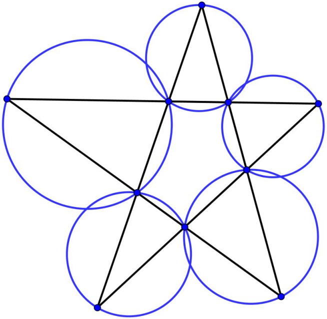
ÖT KÖR TÉTELE



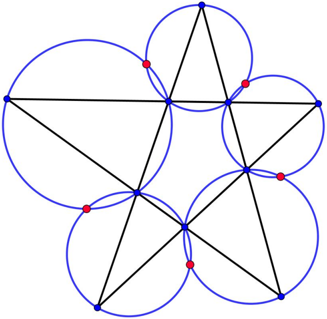
ÖT KÖR TÉTELE



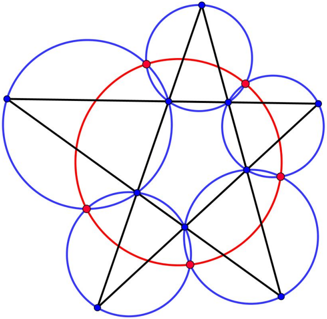
ÖT KÖR TÉTELE



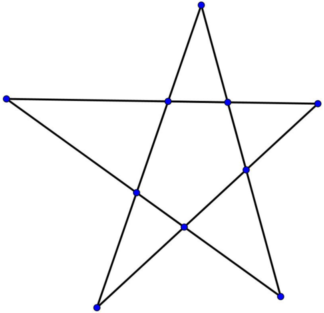
ÖT KÖR TÉTELE



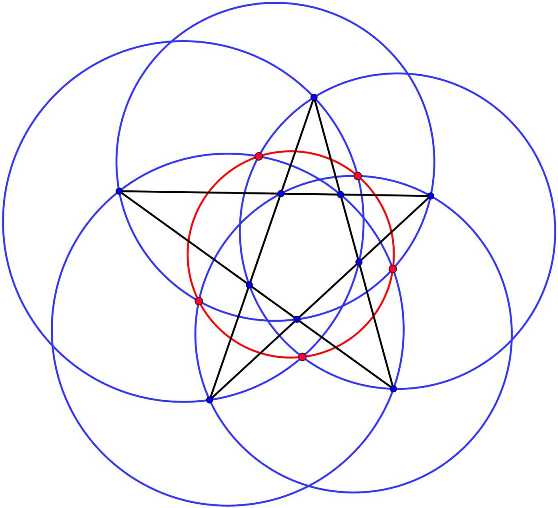
ÖT KÖR TÉTELE



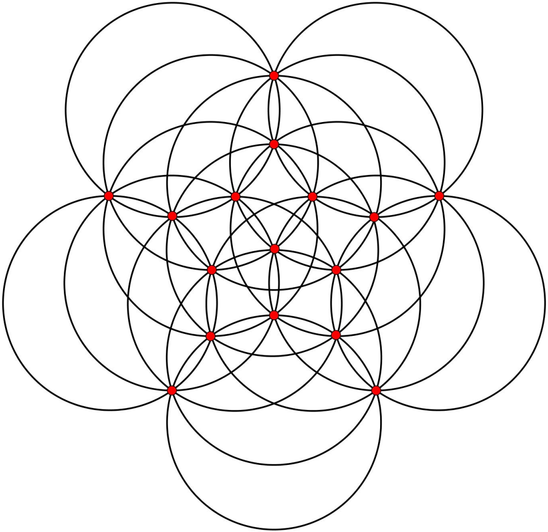
ÖT KÖR TÉTELE



ÖT KÖR TÉTELE



ÖT KÖR TÉTELE $\Longrightarrow$ A Clifford-féle (16_5) konfiguráció



TÉTEL (Wallace, 1796.)

Ha egy háromszög körülírt körének egy pontjából merőlegeseket bocsátunk a háromszög oldalegyeneseire, akkor e merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek.

("Simson-egyenes"; "Simson–Wallace-egyenes")

TÉTEL (Wallace, 1796.)

Ha egy háromszög körülírt körének egy pontjából merőlegeseket bocsátunk a háromszög oldalegyeneseire, akkor e merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek.
("Simson-egyenes"; "Simson–Wallace-egyenes")

TÉTEL (Steiner, 1856.) (Bartók Imre, 1906.)

A háromszög összes Simson-egyeneseinek burkológörbéje egy három csúcsú hipociklois. ("Steiner-hipociklois", "Steiner-deltoid")
A hipocikloisba írható kör megegyezik a háromszög Feuerbach-körével.

TÉTEL

Ha egy háromszög magasságpontját tükrözzük külön-külön mindegyik oldalegyenesre, akkor a képpontok a háromszög köré írt körön fekszenek.

TÉTEL

Ha egy háromszög magasságpontját tükrözzük külön-külön mindegyik oldalegyenesre, akkor a képpontok a háromszög köré írt körön fekszenek.

KÉRDÉS

Ha a képpontok által meghatározott háromszögre ismét alkalmazzuk a fenti a tételt, majd pedig ezt tetszőlegesen sokszor megismételjük, hol helyezkednek el az így kapott új magasságpontok?

TÉTEL

Ha egy háromszög magasságpontját tükrözzük külön-külön mindegyik oldalegyenesre, akkor a képpontok a háromszög köré írt körön fekszenek.

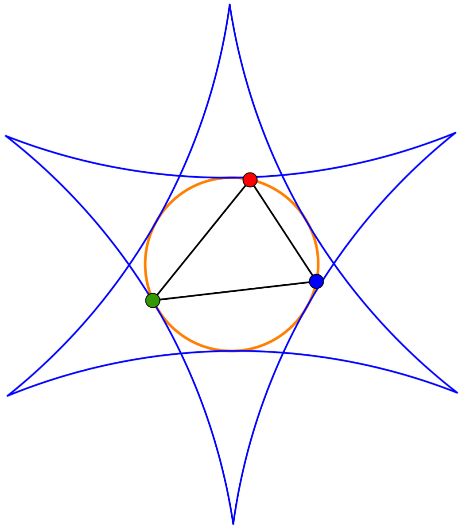
KÉRDÉS

Ha a képpontok által meghatározott háromszögre ismét alkalmazzuk a fenti a tételt, majd pedig ezt tetszőlegesen sokszor megismételjük, hol helyezkednek el az így kapott új magasságpontok?

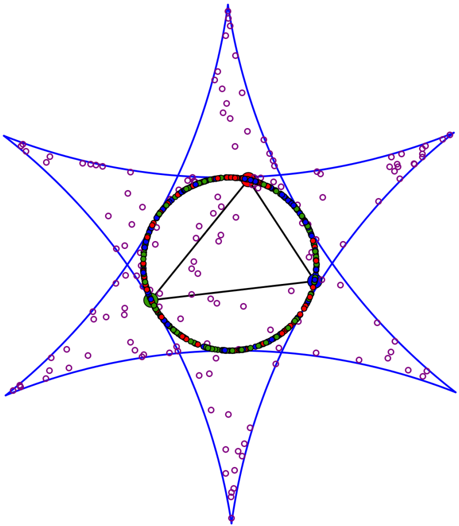
MEGOLDÁS

Az iterált magasságpontok egy olyan tartományra korlátozódnak, amely egy három csúcsú hipociklois két példányának egyesítéseként adódik; a két hipociklois egymás tükörképe a közös forgatási középpontra nézve.

A Steiner-féle hipociklois



A Steiner-féle hipociklois



Carnot tétele

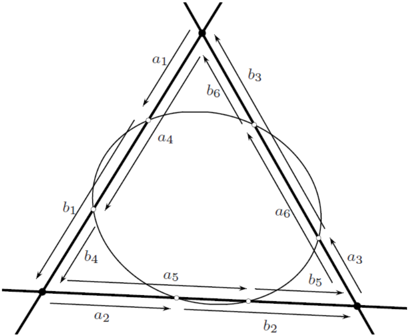
Jürgen Richter-Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, Springer, Heidelberg, 2011.

Jürgen Richter-Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, Springer, Heidelberg, 2011.

TÉTEL (Lazare Carnot, 1806)

Vegyünk fel egy háromszög mindegyik oldalegyenesén két-két pontot, és képezzük az ábra szerint meghatározott 6 osztóviszony szorzatát. Ennek a szorzatnak az értéke akkor és csak akkor 1, ha a 6 pont egy kúpszeletre illeszkedik:

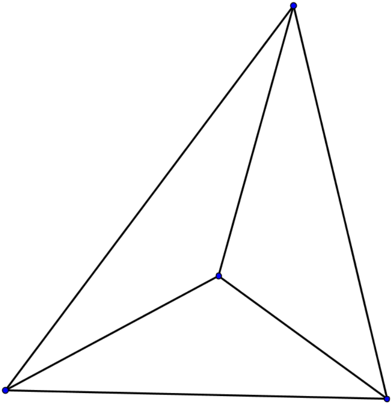
$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \cdot \frac{a_4}{b_4} \cdot \frac{a_5}{b_5} \cdot \frac{a_6}{b_6} = 1.$$



TÉTEL (Richter-Gebert, 2011)

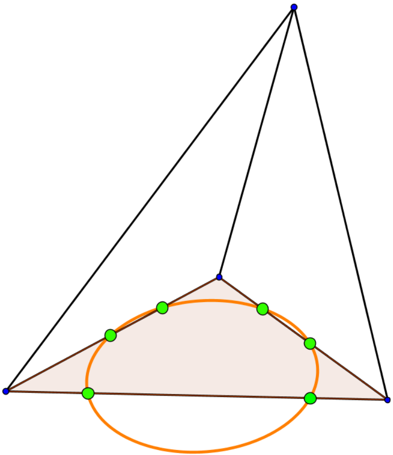
Vetítsünk egy tetraédert a síkra. Vegyünk fel az így kapott alakzat összesen 6 oldalegyenesének mindegyikén két-két pontot. Ha egy kivételével mindegyik háromszögben ezek a pontok kúpszeletre illeszkednek, akkor az utolsó háromszögben is kúpszeletre illeszkednek.

Carnot tétele



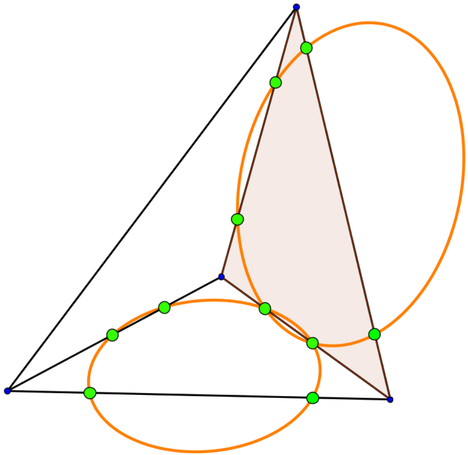
Jürgen Richter-Gebert (2011)

Carnot tétele



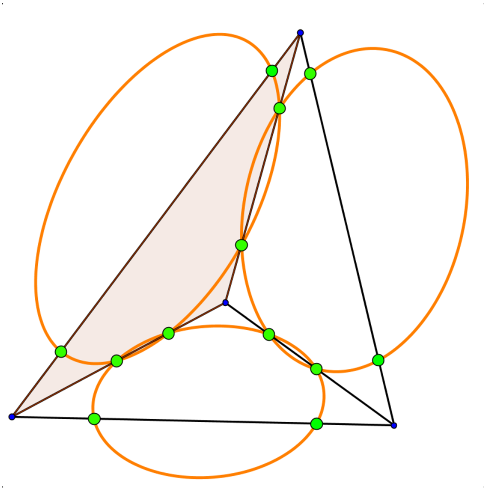
Jürgen Richter-Gebert (2011)

Carnot tétele



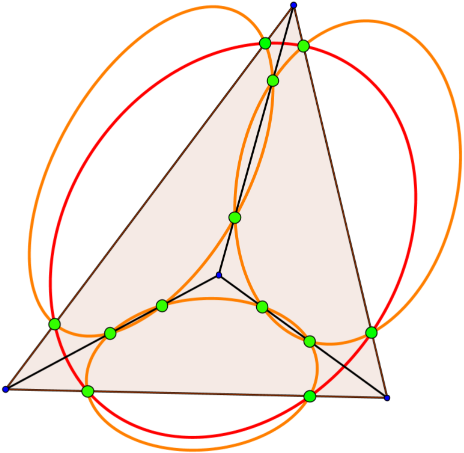
Jürgen Richter-Gebert (2011)

Carnot tétele



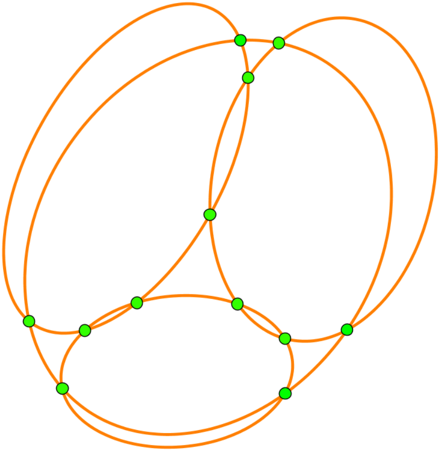
Jürgen Richter-Gebert (2011)

Carnot tétele



Jürgen Richter-Gebert (2011)

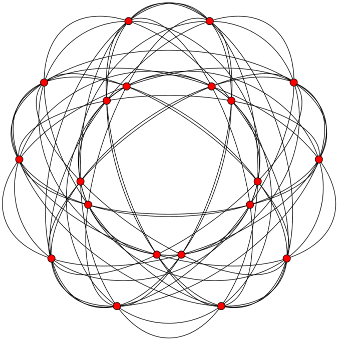
Carnot tétele

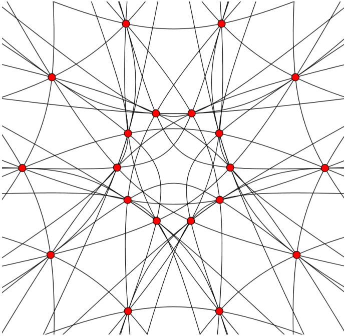


$$(12_2, 4_6)$$

További példák:

A K_5 teljes gráfból: $(20_3, 10_6)$. Kiegészíthető (20_6) konfigurációvá:





KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!