Valós függvények folytonossági helye

Gehér György Pál

SZTE Bolyai Intézet, Szeged

Egyetemi Tavasz

2012. április 28.

Folytonossági pont

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény. Az f folytonos $x_0 \in \mathbb{R}$-ban, ha

- Precízen def. 1.: tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Folytonossági pont

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény. Az f folytonos $x_0 \in \mathbb{R}$-ban, ha

- Precízen def. 1.: tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Precíz def. 2.: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Folytonossági pont

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény. Az f folytonos $x_0 \in \mathbb{R}$-ban, ha

- Precízen def. 1.: tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Precíz def. 2.: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Szemléletesen def.: ha x elég közel van x_0-hoz, akkor a függvényértékek is közel vannak.

Az x_0 **folytonossági pontja** f-nek.

Folytonossági pont

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény. Az f folytonos $x_0 \in \mathbb{R}$-ban, ha

- Precízen def. 1.: tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Precíz def. 2.: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Szemléletesen def.: ha x elég közel van x_0-hoz, akkor a függvényértékek is közel vannak.

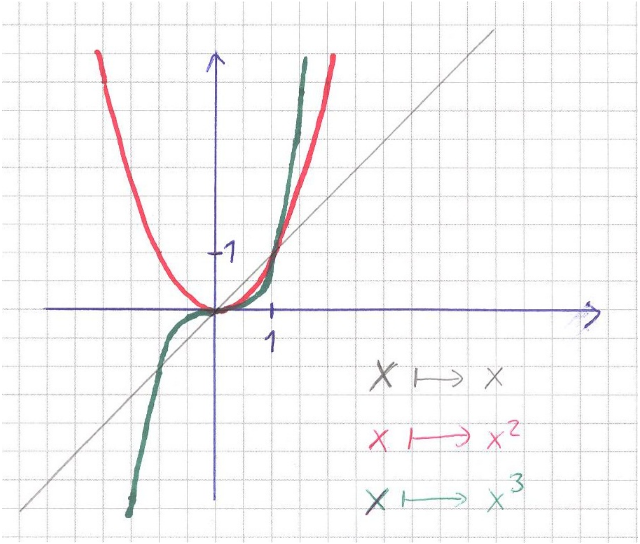
Az x_0 **folytonossági pontja** f-nek.

Kérdés

Ha adott egy $A \subset \mathbb{R}$, akkor van-e olyan f valós függvény, mely pontosan A pontjaiban folytonos?

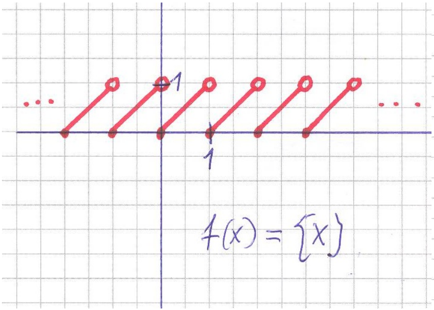
Pár példa 1.: A hatványfüggvények

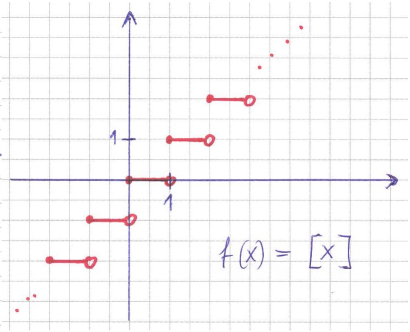
Ezek a függvények mindenhol folytonosak.



Pár példa 2.: A tört- és egészrészfüggvények

E függvények pontosan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$-ben folytonosak.

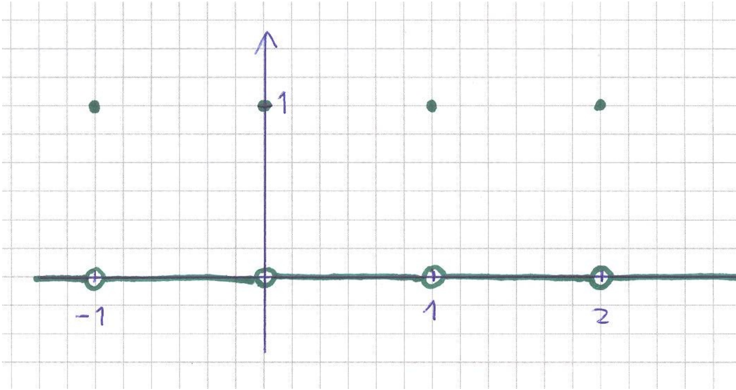




Pár példa 3.

Ez a függvény is pontosan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$-ben folytonos.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész szám} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

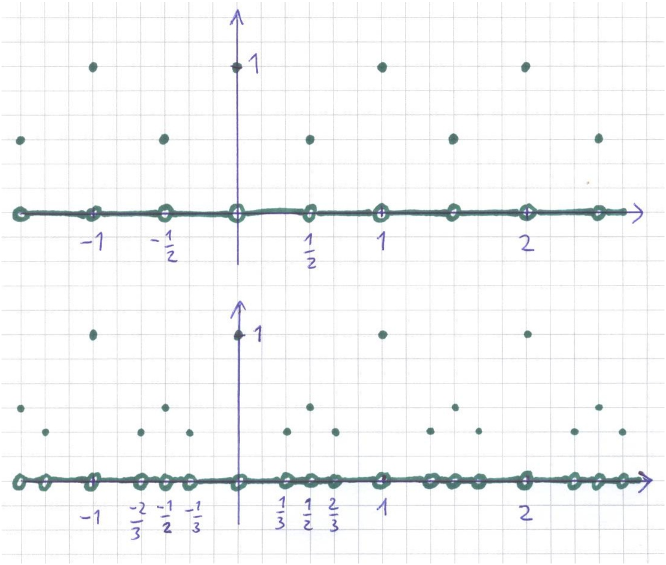


Pár példa 4.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész szám} \\ 1/2 & \text{ha } x \text{ nem egész, de egy egész szám fele} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ egész szám} \\ 1/2 & \text{ha } x \text{ nem egész, de egy egész szám fele} \\ 1/3 & \text{ha } x \text{ nem egész, de egy egész szám harmada} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az f_1 függvény pontosan azokban a pontokban folytonos, mely nem fele egy egész számnak.
Az f_2 függvény pedig pontosan azokban a pontokban folytonos, mely nem fele vagy harmada egy egész számnak.


1
−1
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
1
2
1
−1
$\frac{-2}{3}$
$\frac{-1}{2}$
$\frac{-1}{3}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$
1
2

A Riemann függvény

Az előző két függvény szabályát másolva:

$$R(x)=\begin{cases}1/n & \text{ha } x=\frac{m}{n} \text{ és a tört nem egyszerűsíthető}\\ 1 & \text{ha } x=0\\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális}\end{cases}$$

Az R függvényt **Riemann függvény**nek nevezzük.

Hol folytonos R?

A Riemann függvény

Az előző két függvény szabályát másolva:

$$R(x) = \begin{cases} 1/n & \text{ha } x = \frac{m}{n} \text{ és a tört nem egyszerűsíthető} \\ 1 & \text{ha } x = 0 \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Az R függvényt **Riemann függvény**nek nevezzük.

Hol folytonos R?
Pontosan az irracionális pontokban.

Bizonyítás:

Legyen x_0 racionális szám, ekkor $R(x_0) > 0$. De x_0-hoz tetszőleges közel választható x irracionális szám, melyre viszont $R(x) = 0$. Tehát x_0 nem lehet folytonossági pont.

Bizonyítás:

Legyen x_0 racionális szám, ekkor $R(x_0) > 0$. De x_0-hoz tetszőleges közel választható x irracionális szám, melyre viszont $R(x) = 0$. Tehát x_0 nem lehet folytonossági pont.

Most pedig legyen x_0 irracionális, ekkor $R(x_0) = 0$. Ha azt akarjuk, hogy $R(x_0)$-hoz az $R(x)$ legalább $1/n$ közel legyen, akkor a következőt csináljuk:
Nyilván azok a törtek, melyek felírhatók úgy, hogy a nevező $\leq n$, nem lehetnek tetszőleges közel x_0-hoz.
Tehát van egy $\delta > 0$ szám, mellyel $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow x$ irracionális vagy x olyan racionális, mely csak $> n$ nevezővel írható fel.
Ekkor viszont $R(x) < \frac{1}{n}$, azaz $|R(x) - R(x_0)| = R(x) < \frac{1}{n}$.
Tehát R pontosan az irracionális pontokban folytonos. Q.E.D.

Egy másik példa, mely ráadásul szigorúan monoton nő

Olyan függvényre adunk példát, mely pontosan az irracionális pontokban folytonos és szigorúan monoton nő.

Egy másik példa, mely ráadásul szigorúan monoton nő

Olyan függvényre adunk példát, mely pontosan az irracionális pontokban folytonos és szigorúan monoton nő.

1. A racionális számok halmazát sorbaállítjuk: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Egy másik példa, mely ráadásul szigorúan monoton nő

Olyan függvényre adunk példát, mely pontosan az irracionális pontokban folytonos és szigorúan monoton nő.

1. A racionális számok halmazát sorbaállítjuk: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. $$f(x) = \sum_{n\colon q_n \leq x} \frac{1}{2^n}$$

Egy másik példa, mely ráadásul szigorúan monoton nő

Olyan függvényre adunk példát, mely pontosan az irracionális pontokban folytonos és szigorúan monoton nő.

1. A racionális számok halmazát sorbaállítjuk: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. $$f(x) = \sum_{n:\ q_n \leq x} \frac{1}{2^n}$$

FIGYELEM! Nem lehet tetszőleges halmaz elemeit ilyen módon sorbaállítani! Például az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vagy vagy $\mathbb{R}$ „túl nagy” halmazok ehhez. De a $\mathbb{Q}$ sorbaállítható.

Egy másik példa, mely ráadásul szigorúan monoton nő

Olyan függvényre adunk példát, mely pontosan az irracionális pontokban folytonos és szigorúan monoton nő.

1. A racionális számok halmazát sorbaállítjuk: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. $$f(x) = \sum_{n\colon q_n \leq x} \frac{1}{2^n}$$

FIGYELEM! Nem lehet tetszőleges halmaz elemeit ilyen módon sorbaállítani! Például az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vagy vagy $\mathbb{R}$ „túl nagy” halmazok ehhez. De a $\mathbb{Q}$ sorbaállítható.
FIGYELEM! Általában ha egy végtelen összeget átrendezek, nem ugyanaz lesz az érték! Ha viszont a számok pozitívak, akkor nincs ezzel gond.

A racionális számok sorbaállítása

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \\[1em]
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{7}{2} & \dots \\[1em]
\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{5}{3} & \dots \\[1em]
\frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{7}{4} & \dots \\[1em]
\frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & \dots \\[1em]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

A racionális számok sorbaállítása

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \\[1ex]
\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{7}{2} & \dots \\[1ex]
\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{5}{3} & \dots \\[1ex]
\frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{7}{4} & \dots \\[1ex]
\frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & \dots \\[1ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Miért nem lehet sorbaállítani a valós számokat?

$\mathbb{R}$ nem sorbaállítható $\iff$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem sorbaállítható.

Indirekten látjuk be, azaz feltesszük, hogy $\mathbb{R}$ sorbaállítható.

Miért nem lehet sorbaállítani a valós számokat?

$\mathbb{R}$ nem sorbaállítható $\iff$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem sorbaállítható.

Indirekten látjuk be, azaz feltesszük, hogy $\mathbb{R}$ sorbaállítható.

Ekkor sorbaállíthatóak azon számok is, melyek tizedestört alakja: $0, \ldots$ és a tizedesvessző után csak 5 vagy 6 szerepel. Ezen számok felírása azonban **egyértelmű**, tehát két ilyen szám pontosan akkor egyenlő, ha a felírás egyenlő.
(Ez akkor nem igaz, ha bármely jegyet megengedjük, gondoljunk csak az 1=0,99999... esetre!)

Miért nem lehet sorbaállítani a valós számokat?

$\mathbb{R}$ nem sorbaállítható $\iff$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nem sorbaállítható.

Indirekten látjuk be, azaz feltesszük, hogy $\mathbb{R}$ sorbaállítható.

Ekkor sorbaállíthatóak azon számok is, melyek tizedestört alakja: $0, \ldots$ és a tizedesvessző után csak 5 vagy 6 szerepel. Ezen számok felírása azonban **egyértelmű**, tehát két ilyen szám pontosan akkor egyenlő, ha a felírás egyenlő.
(Ez akkor nem igaz, ha bármely jegyet megengedjük, gondoljunk csak az $1{=}0{,}99999\ldots$ esetre!)

Legyen ez a sorbaállítás: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ és írjuk a számokat egymás alá

Miért nem lehet sorbaállítani a valós számokat?

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,\ 6\ 6\ 5\ 5\ 6\ 6\ 5\ 6\ 5\ldots\\
x_2 &= 0,\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ldots\\
x_3 &= 0,\ 5\ 6\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 5\ 6\ldots\\
x_4 &= 0,\ 5\ 5\ 6\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ldots\\
x_5 &= 0,\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 5\ 6\ 6\ 6\ldots\\
x_6 &= 0,\ 5\ 6\ 5\ 5\ 5\ 6\ 5\ 5\ 5\ldots\\
x_7 &= 0,\ 5\ 5\ 6\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ldots\\
x_8 &= 0,\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 5\ 5\ 6\ldots\\
x_9 &= 0,\ 5\ 6\ 6\ 6\ 6\ 5\ 5\ 5\ 5\ldots\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

Miért nem lehet sorbaállítani a valós számokat?

$$
\begin{array}{lllllllllll}
x_1 = 0, & \mathbf{6} & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5 \ldots \\
x_2 = 0, & 5 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \ldots \\
x_3 = 0, & 5 & 6 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 \ldots \\
x_4 = 0, & 5 & 5 & 6 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \ldots \\
x_5 = 0, & 5 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{6} & 5 & 6 & 6 & 6 \ldots \\
x_6 = 0, & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{6} & 5 & 5 & 5 \ldots \\
x_7 = 0, & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{5} & 5 & 5 \ldots \\
x_8 = 0, & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & \mathbf{5} & 6 \ldots \\
x_9 = 0, & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{5} \ldots \\
 & & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Miért nem lehet sorbaállítani a valós számokat?

$$\begin{array}{llllllllll}
x_1 = 0, & \mathbf{6} & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5\ldots \\
x_2 = 0, & 5 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\ldots \\
x_3 = 0, & 5 & 6 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6\ldots \\
x_4 = 0, & 5 & 5 & 6 & \mathbf{5} & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\ldots \\
x_5 = 0, & 5 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{6} & 5 & 6 & 6 & 6\ldots \\
x_6 = 0, & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{6} & 5 & 5 & 5\ldots \\
x_7 = 0, & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{5} & 5 & 5\ldots \\
x_8 = 0, & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & \mathbf{5} & 6\ldots \\
x_9 = 0, & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & \mathbf{5}\ldots \\
 & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

De ekkor a

$$\frac{11}{9} - \mathbf{0\,,655566555\ldots} =$$

$$= \mathbf{0\,,566655666\ldots}$$

nincs felsorolva, ami ellentmondás! Tehát nem felsorolható a halmaz.

Kis kitekintés

VIGYÁZAT Ez önmagában nem bizonyítja, hogy nincs olyan függvény, mely pont a racionálisakban folytonos! Csak annyit mond, hogy az előbbi példa megoldása nem alkalmazható!

Kis kitekintés

VIGYÁZAT Ez önmagában nem bizonyítja, hogy nincs olyan függvény, mely pont a racionálisakban folytonos! Csak annyit mond, hogy az előbbi példa megoldása nem alkalmazható!

Mégis, belátható elemi módszerekkel, hogy nincs olyan valós függvény, melynek folytonossági pontjai pont $\mathbb{Q}$ elemei.

Kis kitekintés

VIGYÁZAT Ez önmagában nem bizonyítja, hogy nincs olyan függvény, mely pont a racionálisakban folytonos! Csak annyit mond, hogy az előbbi példa megoldása nem alkalmazható!

Mégis, belátható elemi módszerekkel, hogy nincs olyan valós függvény, melynek folytonossági pontjai pont $\mathbb{Q}$ elemei.

Általában a következő tétel fogalmazható meg:
Az $A \subset \mathbb{R}$ részhalmaz pontosan akkor lehet folytonossági pontja egy valós függvénynek, ha G_δ halmaz, azaz léteznek olyan $U_1, U_2, \dots$ nyílt halmazok, melyekkel $A = \cap_{j=1}^{\infty} U_j$.

Kis kitekintés

VIGYÁZAT Ez önmagában nem bizonyítja, hogy nincs olyan függvény, mely pont a racionálisakban folytonos! Csak annyit mond, hogy az előbbi példa megoldása nem alkalmazható!

Mégis, belátható elemi módszerekkel, hogy nincs olyan valós függvény, melynek folytonossági pontjai pont $\mathbb{Q}$ elemei.

Általában a következő tétel fogalmazható meg:
Az $A \subset \mathbb{R}$ részhalmaz pontosan akkor lehet folytonossági pontja egy valós függvénynek, ha G_δ halmaz, azaz léteznek olyan $U_1, U_2, \dots$ nyílt halmazok, melyekkel $A = \cap_{j=1}^{\infty} U_j$.

Belátható elemien is, hogy $\mathbb{Q}$ nem G_δ-halmaz, de ennek az igazán szép és egyszerű bizonyítása **Baire kategória tétel**lel megy.

Kis kitekintés

VIGYÁZAT Ez önmagában nem bizonyítja, hogy nincs olyan függvény, mely pont a racionálisakban folytonos! Csak annyit mond, hogy az előbbi példa megoldása nem alkalmazható!

Mégis, belátható elemi módszerekkel, hogy nincs olyan valós függvény, melynek folytonossági pontjai pont $\mathbb{Q}$ elemei.

Általában a következő tétel fogalmazható meg:
Az $A \subset \mathbb{R}$ részhalmaz pontosan akkor lehet folytonossági pontja egy valós függvénynek, ha G_δ halmaz, azaz léteznek olyan $U_1, U_2, \ldots$ nyílt halmazok, melyekkel $A = \cap_{j=1}^{\infty} U_j$.

Belátható elemien is, hogy $\mathbb{Q}$ nem G_δ-halmaz, de ennek az igazán szép és egyszerű bizonyítása **Baire kategória tétel**lel megy.

Az érdeklődő diákok figyelmébe ajánlom: Besenyei Ádám: A Baire-tételről egy KöMaL feladat kapcsán (a google kereső kidobja!)