

Matematika-tanári MA zárószigorlat geometriai tételei és feladatai
(2011-02-16-...)

Tételek:

9. Geometriai alapok

Elemi geometriai alapfogalmak; térelemek távolságára, szögére vonatkozó definíciók; szakaszfelező merőleges, szögfelező, kör, gömb, a kúp szeletei; affinitás, homotécia, izometria; transzformációcsoportok; alakzatok hasonlósága és egybevágósága, ennek feltételei három- és négyszögek esetén.

10. Analitikus geometria

Vektorok, vektorok szorzásai; a vektormveletekre vonatkozó azonosságok; koordinátázás, alakzatok egyenletei; transzformációk leírása; trigonometria; terület és térfogat, ezekre alapvető formulák.

11. Nemeuklideszi geometriák

Inverzió, inverzív sík; gömb és trigonometriája; projektív sík, projektív transzformációk; hiperbolikus sík.

12. Görbék

Másodrend síkgörbék, kúpszeletek egyenletei; Bézier-görbék; térgörbék, hoszszuk és kísérő triéderük; geodetikuskok.

Feladatok:

1. Válasszuk ki az egységkocka három kitérő élét. Mekkora területű az ezen élek felezőpontjai által meghatározott háromszög?
2. Számítsa ki $\sin(\arctan 2)$ pontos értékét!
3. Számítsa ki $\cot(\arcsin \frac{1}{5})$ pontos értékét!
4. Adott egy ABC háromszög oldalaira kifelé rajzolt ABC' , BCA' és CAB' szabályos háromszög A' , B' és C' csúcsa. Szerkessze meg az ABC háromszöget!
5. Adott a síkon az F_1, F_2, \dots, F_n pont (n tetszőleges páratlan szám). Szerkessze meg azt az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszöget, amelynek ezek a pontok az egymás után következő oldalfelező pontjai!
6. Szerkessze meg a háromszöget, ha adott a három súlyvonala!
7. Szerkesszen kört, amely érint két adott, egymást metsző egyenest és átmegy egy adott ponton!
8. Írjunk egy adott ABC háromszögbe olyan háromszöget, melynek oldalai adott l_1, l_2 és l_3 egyenessel párhuzamosak.
9. Milyen transzformáció egy szabályos háromszög a, b, c oldalegyenesére vonatkozó $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ tükrözések $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ szorzata?

10. Egy háromszög A, B, C csúcsa körül rendre $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ szögű forgatást végzünk (α, β, γ a háromszög szögei). Milyen transzformáció a három forgatás szorzata?
11. Adott a térben az O ponton átmenő páronként egymásra merőleges a, b, c egyenes. Az ezekre az egyenesekre vonatkozó tükrözéseket jelölje $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$. Milyen transzformáció a $\varrho_a\varrho_b\varrho_c$ szorzat?
12. Adott a térben egy közös egyenesre illeszkedő öt sík. Milyen transzformáció az ezekre vonatkozó öt tükrözés szorzata?
13. Egy ABC háromszög beírt körének az a, b, c oldalakon levő érintési pontjait jelölje E_a, E_b, E_c . Igaz-e, hogy az AE_a, BE_b, CE_c egyenesek egy pontban metszik egymást?
14. Egy háromszöget tükrözzük a súlypontjára. Hogyan aránylik a két háromszög metszetének területe az eredeti háromszög területéhez?
15. Egy tetraéder csúcsai $A(0, 1, 0), B(2, 1, 0), C(3, 0, 0)$ és $D(0, 1, -4)$. Mekkora a súlypontját az A csúccsal összekötő szakasz hossza?
16. Az $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ vektorok végpontjai által meghatározott sík milyen arányban osztja fel az ezen vektorok által kifeszített paralelepipedon O csúcsból induló testátlóját?
17. Bontsa fel az $\mathbf{a}(4, 2, -3)$ vektort a $\mathbf{b}(5, 4, 7)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőre!
18. Adott \mathbf{a}, \mathbf{b} vektorok esetén mivel egyenlő az $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ szorzat és mi a geometriai tartalma?
19. Számítsa ki az $A(0, 1, 0), B(2, 1, 0), C(3, 2, 1), D(1, 2, 1)$ és $E(2, 0, 3)$ pontok konvex burkának térfogatát!
20. Hányszorosa a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának?
21. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorokra mivel egyenlő az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ összeg?
22. Mekkora szög alatt látszik az AB szakasz a C pontból, ha $A(1, 2, 4), B(11, 3, 7)$ és $C(-1, 10, 11)$?
23. Az $\mathbf{a}(6, 2, -3), \mathbf{b}(-3, 6, -2)$ és \mathbf{c} vektorok egy kockát feszítenek ki. Határozza meg a \mathbf{c} vektor koordinátáit!
24. Számítsa ki az $x - 2y + 4z = 10$ és $x - 2y + 4z = 31$ egyenletű síkok távolságát!
25. Adja meg annak az egyenesnek egy paraméterezését, amelyikre illeszkedik a $P(2, -1, 3)$ pont és merőleges a $(2t - 3, -t + 1, 5t - 7)$ és $(3t + 1, t, 2t)$ paraméterezésű egyenesek mindegyikére!

26. Számítsa ki az $\frac{x+2}{3} = \frac{2y}{3} = \frac{z+1}{5}$ és $\frac{x-3}{3} = -\frac{y+3}{2} = \frac{z}{5}$ egyenesek hajlásszögét!
27. Számítsa ki a $P(10, 11, 12)$ pontnak az $x + 2y + z = 7$ egyenletű síkra vonatkozó merőleges vetületét!
28. Elválasztja-e a $2x + 2y - 2z - 2 = 0$ egyenletű sík az $A(2, 1, 1)$ és a $B(2, 1, 3)$ pontot?
29. Az $A(0, 1, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(3, 1, 1)$ és D pontok konvex burkának térfogata 4. Írja fel D mértani helyének egyenletét!
30. Számítsa ki annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a koordinátasíkok és a $2x + 3y + 6z - 18 = 0$ egyenletű sík határol!
31. Írja fel az $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$ egyenletű gömböt a $P(11, 8, \sqrt{7})$ pontjában érintő sík egyenletét!
32. A $P(\sqrt{3}, 2, 3)$ és $Q(1, \sqrt{6}, 3)$ pontok az $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ egyenletű gömbön vannak. Milyen hosszú az őket összekötő rövidebb főkörív?
33. Számítsa ki a szabályos tetraéder és oktaéder lapszögét!
34. Számítsa ki a szabályos dodekaéder és ikozaéder lapszögét!
35. Az egységgömb középpontjából kiinduló $\mathbf{a}(3, -1, 2)$, $\mathbf{b}(6, 4, 3)$, $\mathbf{c}(1, 4, 2)$ vektorok kidöfik egy gömbháromszög csúcsait. Határozza meg a gömbháromszög oldalait és szögeit!
35. Egy gömbháromszög csúcsai: $A(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $B(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $C(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Mekkora a területe?
36. Adott a gömbháromszög a , b és c oldala. Készítsen tervet a gömbháromszög köré írt kör sugarának meghatározására!
37. Határozza meg a $P(-5, -5, 2)$ és $Q(1, 3, 4)$ pontokon átmenő projektív egyenes egyenletét!
38. Határozza meg az $e : -2X - Y + 4Z = 0$ és $f : 3Y + 4Z = 0$ projektív egyenesek metszéspontját!
39. Adja meg homogén koordinátákkal a $P(-2, 3)$ és $Q(-5, -4)$ közösleges pontokat összekötő egyenes ideális pontját!
40. Határozza meg az $x^2 = y^3$ görbe ideális pontját!
41. Határozza meg az $a : y = -x + 4$, $b : y = 4x - 1$, $c : y = 5x - 2$ és $d : y = x + 2$ közösleges egyenesek $(abcd)$ kettősviszonyát!
42. Határozza meg az $A(1, 1, -1)$, $B(4, -5, 4)$, $C(-5, 4, -3)$, és $D(-5, 13, -11)$ projektív pontok kettősviszonyát!

43. Határozza meg az $a : -2x + 2y + z = 0$, $b : 4x + 3y - z = 0$, $c : -30x - 19y + 8z = 0$ és $d : -14x + 7y + 6z = 0$ projektív egyenesek kettősviszonyát!
44. Adottak az $A(1, 4, 0)$, $B(-7, 7, 1)$, és $C(9, 1, -1)$ projektív pontok. Határozza meg azt a D pontot, melyre $(ABCD) = 1/4$ teljesül!
46. Adottak az $a : -3x + 4y + 3z = 0$, $b : -3x + 5z = 0$ és $c : 12x - 10y - 15z = 0$ projektív egyenesek. Határozza meg azt a d egyenest, melyre $(abcd) = -\frac{9}{5}$ teljesül!
47. Adott az AB szakasz és a felezőpontja, valamint az AB egyenesre nem illeszkedő P pont. Szerkessze meg csak vonalzóval a P ponton áthaladó, AB -vel párhuzamos egyenest!
48. Adott az AB szakasz és a vele párhuzamos a egyenes. Szerkessze meg csak vonalzóval az AB szakasz felezőpontját!
49. Adott az AB átmérőjű k kör és egy sem a körre, sem pedig az AB egyenesre nem illeszkedő C pont. Szerkessze meg csak vonalzóval a C ponton átmenő, AB egyenesre merőleges egyenest!
50. Adottak az $A(1, 0, -1)$, $B(-2, 5, -1)$ és $C(11, -25, 4)$ projektív pontok. Határozza meg a D pontot oly módon, hogy az A és B , valamint a C és D párok harmonikusan válasszák el egymást!

51. Adottak az

$$a : 7x - 7y - 6z = 0, \quad b : -5x + 4y + 7z = 0 \quad \text{és} \quad c : 39x - 34y - 47z = 0$$

projektív egyenesek. Határozza meg a d egyenest oly módon, hogy az a és b , valamint a c és d párok harmonikusan válasszák el egymást!

52. Lehet-e affinitásnál ez euklidészi sík parabolájának képe hiperbola? És tetszőleges kollineációnál?
53. A $\Pi : ABC \mapsto BCA$ projektivitás a D pontot E -be viszi, E -t pedig F -be. Mit tesz F -fel?
54. Írja fel a kör és ellipszis egy-egy paraméterezését!
55. Írja fel a hiperbola és parabola egy-egy paraméterezését!
56. Számítsa ki a kör és az ellipszis görbületét!
57. Számítsa ki a hiperbola és a parabola görbületét!
58. Számítsa ki az $(x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct)$ csavargörbe görbületét és torzióját!

59. Határozza meg a (t^2-1, t^3+1) paraméterezésű síkgörbe $2x-y+3=0$ egyenessel párhuzamos érintőjének egy paraméterezését!
60. Számítsa ki az $y = \ln \cos x$ egyenletű síkgörbe $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{\pi}{3}$ abszcisszájú pontjai közé eső szakaszának ívhosszát!
61. Írja fel a $(2 \cos t, 2 \sin t, 4t)$ paraméterezésű görbe simulósíkjának egyenletét a $t_0 = 0$ pontban!
62. Számítsa ki a $(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ paraméterezésű görbe binormális egységvektorát a $t_0 = \pi$ pontban!
63. Számítsa ki a $(\cosh t, \sinh t, t)$ paraméterezésű görbe görbületét a $t_0 = 1$ pontban!
64. Számítsa ki az $(e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$ paraméterezésű görbe torzióját a $t_0 = 2$ pontban!
65. Írja fel az $(u+v, u-v, uv)$ paraméterezésű felület $u_0 = 2$ és $v_0 = 1$ értékekhez tartozó pontjában az érintősík egyenletét!
66. Számítsa ki az (u^2+v^2, u^2-v^2, uv) paraméterezésű felület $u_0 = 1, v_0 = 1$ paraméterekhez tartozó pontjában a szorzatgörbületet!