

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet
Matematika BSc szak

SZAKDOLGOZAT

**Állandó szélességű alakzatok
síkban és térben**

Készítette: Kovács Katalin Márta
Témavezető: Dr. Fodor Ferenc
Geometria Tanszék

2016

Tartalomjegyzék

1. Tartalmi összefoglalás	3
2. Állandó szélességű alakzatok a síkban	4
3. Állandó szélességű térbeli alakzatok	12
Irodalomjegyzék	20

1. fejezet

Tartalmi összefoglalás

A geometria már korábban is kiemelkedő helyet foglalt el matematikai tanulmányaim során. Középiskolai éveim alatt a síkgeometria összefüggései, a térgeometria gömbhöz kapcsolódó elméletei fogtak meg leginkább. Így szakdolgozatom témáját is ennek függvényében választottam ki.

Szakdolgozatom témája az állandó szélességű geometriai alakzatok létezésével és tulajdonságainak vizsgálatával foglalkozik. A síkbeli állandó szélességű halmazok után konkrét példákon keresztül, térbeli megfelelőikről fogalmazok meg következtetéseket.

A dolgozat két fő részből áll. A bevezető részben az általános tudnivalókat, jelöléseket, alapfogalmakat foglalom össze az irodalomjegyzékben megjelölt művek alapján, valamint kiemelem a konvexitás fontos tulajdonságait és jellemzőit. Ezek tartalmazzák a későbbi vizsgálatokhoz szükséges információkat.

A második részben a síkbeli ismeretekre épülve a térgeometria tulajdonságait fogalmazom meg. Mint sok esetben a síkbeli elemeknek, tulajdonságoknak és jellemzőknek vannak térbeli megfelelőik. Ez azonban nem minden esetben igaz, így ebben a dolgozatban összehasonlításukra is sor kerül.

Dolgozatom célja, hogy a körön és a gömbön kívül más állandó szélességű alakzatokkal is megismerkedjünk. A kapcsolódó tételek és sejtések megfogalmazásával érdekes következtetéseket vonhatunk le. Megmutatjuk, hogy az úgynevezett Reuleaux-tetraéder nem állandó szélességű, ezek után ismertetünk két valódi állandó szélességű testet. A Blaschke-tételt alkalmazva kiszámoljuk térfogatukat és összehasonlítjuk egy másik egyszerű állandó szélességű alakzattal, a Reuleaux-háromszög megforgatásával kapott forgástesttel.

2. fejezet

Állandó szélességű alakzatok a síkban

Jelölések

Ebben a fejezetben a használt jelöléseket vezetjük be. Ezután definiáljuk a szükséges fogalmakat, majd a szakirodalom alapján ismertetünk néhány állítást.

Az euklideszi sík és tér ($\mathbb{E}^2$ és $\mathbb{E}^3$) egy-egy pontjára szokásos jelölést követve a magyar ABC nagy nyomtatott betűit használjuk, kezdve a $P, Q, R, S, \dots$ betűkkel, vagy $P_1, P_2, P_3, \dots$ indexekkel jelölve. Két tetszőleges pont által meghatározott szakaszt a végpontok feltüntetésével szögletes zárójelek segítségével adjuk meg, így a P és R végpontú szakasz: $[P, R]$. Az egyenesekre a magyar ABC kisbetűit használjuk, kezdve az e, f, g, h -val, esetenként indexekkel kiegészítve, mint például $e_1, e_2, e_3, \dots$. A halmazokat az $A, B, C, \dots$ betűi jelölik, (megkülönböztetve a pontoktól, melyeket az ABC második feléből választjuk, kezdve a P -vel). A kör sugarát a szokást követve r jelöli. A távolságot az ABC kis betűivel jelöljük, általában t, d, h -val.

Alapfogalmak

Az alapfogalmak definiálása esetenként egyszerűnek és nyilvánvalónak tűnhet, de a későbbiek folyamán ezekre az alapfogalmakra fogunk hivatkozni. Megemlítésük tehát elengedhetetlen.

Az első a konvexitás definíciója. Az alakzatot a következőkben ugyanabban az értelemben használjuk, mint a halmazt.

1. Definíció. Konvexnek nevezünk egy síkbeli vagy térbeli halmazt, ha tetszőleges két pontját összekötő szakasz minden pontja egyben pontja a halmaznak is.

Azaz $K \subseteq \mathbb{E}^2$ (vagy $\mathbb{E}^3$) halmazt konvexnek nevezünk, ha $\forall P, Q \in K$ esetén $[P, Q] \subseteq K$.

A legegyszerűbb konvex alakzatok közé tartozik az egy pontot tartalmazó halmaz, a teljes sík, a félsík, a féltér, az egyenesek, a síkok. Konvex halmazok a kör és

a szabályos sokszögek is, míg a szabályos ötszög átlói által előállított csillagötszög, vagyis a pentagramma már nem konvex.

2. Definíció. Egy halmaz korlátos, ha teljes egészében elhelyezhető valamely kör — tér esetében gömb — belsejében.

Ennek értelmében a sáv, amely két párhuzamos egyenes által határolt tartomány a síkban, valamint a félsík, a szögtartomány nem korlátos halmazok. A korlátos, zárt és konvex alakzatokat konvex síkidomoknak nevezzük. Egy síkidom konvexsége vagy nem konvexsége meghatározható egy egyenes és a síkidom egy belső pontja kölcsönös helyzetének vizsgálatával.

Mielőtt az állítást megfogalmazzuk, további ismeretekre van szükségünk. Megkülönböztetünk nyílt- és zárt gömbkörnyezetet. Egy tetszőleges P pont gömbkörnyezete az adott r távolságon belül elhelyezkedő pontok halmaza.

Formulákkal kifejezve a nyílt gömbkörnyezet a térben a következőképpen írható le:

$$B^3(P, r) = \{Q \in \mathbb{E}^3 : [P, Q] < r\}.$$

A zárt gömbkörnyezet esetén a fenti definícióban az egyenlőség megengedett.

A sík (tér) egy Q pontja határpontja a K halmaznak, ha a Q tetszőleges sugarú gömbkörnyezetében van K -beli és nem K -beli pont is. Például a $B^2(P, r)$ nyílt körlap határpontjai éppen az $S^1(P, r)$ P középpontú r sugarú körvonal pontjai, továbbá a $B^3(P, r)$ nyílt gömb határpontjai éppen az $S^2(P, r)$ P középpontú r sugarú gömbfelület pontjai.

3. Definíció. Egy halmaz belső pontján a halmaz egy olyan pontját értjük, amelynek létezik olyan (nyílt) gömbkörnyezete, azaz tetszőlegesen kicsi ε sugarú kör (a síkban) vagy gömb (a térben), amelynek minden pontja egyben pontja a halmaznak is.

Azon pontokat, amelyekre nem teljesül sem a határpont-, sem a belső pont definíciója, külső pontoknak tekintjük.

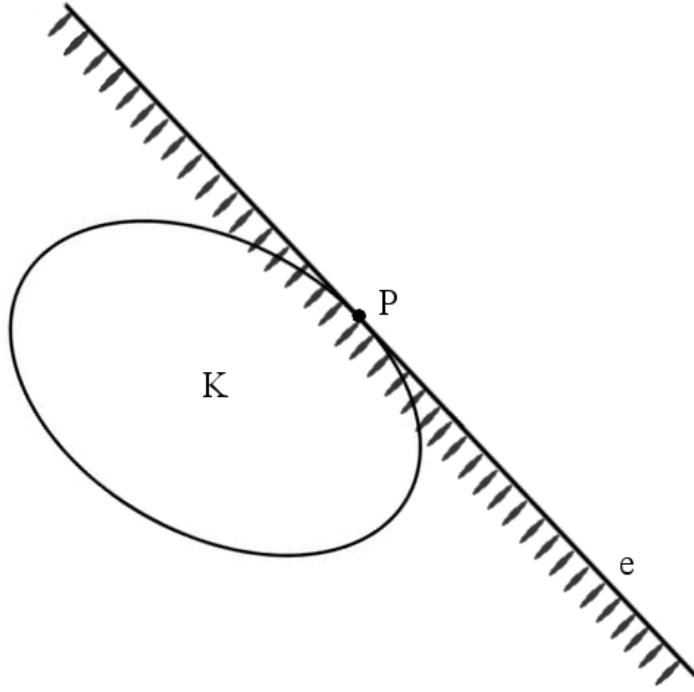
Mindezek után térjünk vissza a konvex síkidomokhoz. Egy konvex síkidom belső pontján átmenő egyenes segítségével a következő állítás fogalmazható meg:

1. Állítás. *Ha egy korlátos halmaz tetszőleges belső pontján áthaladó egyenes tartalmazza a halmaz pontosan két határpontját, akkor a halmaz konvex.*

A részletes bizonyítás megtalálható a [3] könyv 119. oldalán az 1.4-es bekezdésben.

Mi ebben a dolgozatban olyan konvex halmazokkal foglalkozunk, amelyeknek van belső pontja. Kétdimenzióban a konvex síkidomok jóval gazdagabb családot alkotnak, mint egydimenzióban.

4. Definíció. A K síkidom támaszegyenesének nevezzük azt az e egyenest, amely a síkidom legalább egy határ pontját tartalmazza, de nem tartalmazza egyetlen belső pontját sem. Ekkor a K síkidom egésze az e egyenes azonos partjára esik.



2.1. ábra. A K halmaz e támaszegyenese

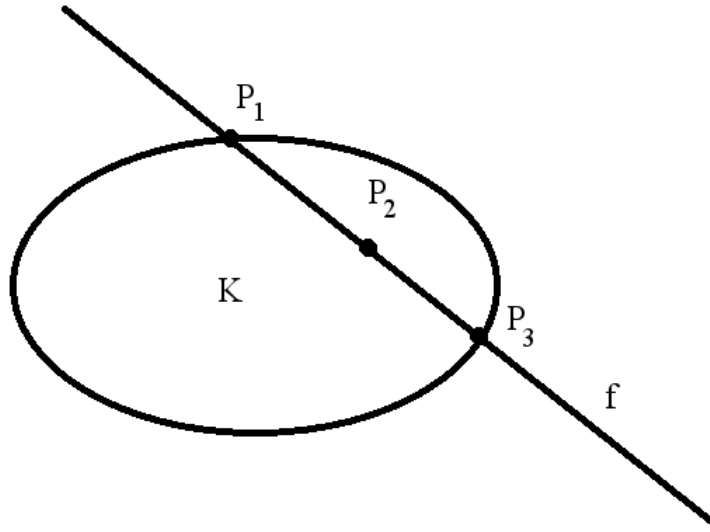
Amennyiben az utóbbi partossági kritérium nem teljesül, akkor az egyenes az alakzat belső pontját is tartalmazza. Ezeket az egyeneseket már egy másik osztályba soroljuk, az ún. metsző egyenesek osztályába. Mindezek után kimondható a következő állítás:

2. Állítás. *A korlátos konvex síkidomnak egy adott irányú vektorral párhuzamosan pontosan két támaszegyenese létezik.*

Az állításhoz tartozó bizonyítást a [3] könyv 7. oldalán találhatja meg az olvasó.

Az állandó szélességű alakzatok definíciója előtt be kell vezetnünk az átmérő és a szélesség fogalmát.

5. Definíció. Egy tetszőleges H halmaz átmérőjén a halmazbeli pontpárok távolságának szuprémumát (korlátos és zárt halmaz esetén maximumát) értjük. Jele: $\text{diam}(H)$



2.2. ábra. A K halmaz f metszőegyenese

Formálisan: $H \subseteq \mathbb{E}^2$ esetén $\text{diam}(H) = \sup_{P,Q \in K} |PQ|$, ahol $|PQ|$ a P és Q pontok távolságát jelöli.

Érdekes átgondolni, hogy milyen összefüggést tudunk megfogalmazni a fent említett átmérő és az alakzathoz húzott támaszegyenések között. Tudjuk, hogy a konvex H síkidom egy határpontján keresztül pontosan egy olyan támaszegyenes húzható amely merőleges egy adott vektorra. Továbbá a H síkidomnak pontosan két támaszegyenese van, amely merőleges egy adott vektorra. A támaszegyenések közötti távolság alatt a két egyenes közötti távolságot értjük, vagyis a két támaszegyenes közötti d merőleges hosszát. Az alábbi állítás szerint a d távolság maximuma egyenlő az átmérő hosszúságával, azaz $d = \text{diam}(H)$.

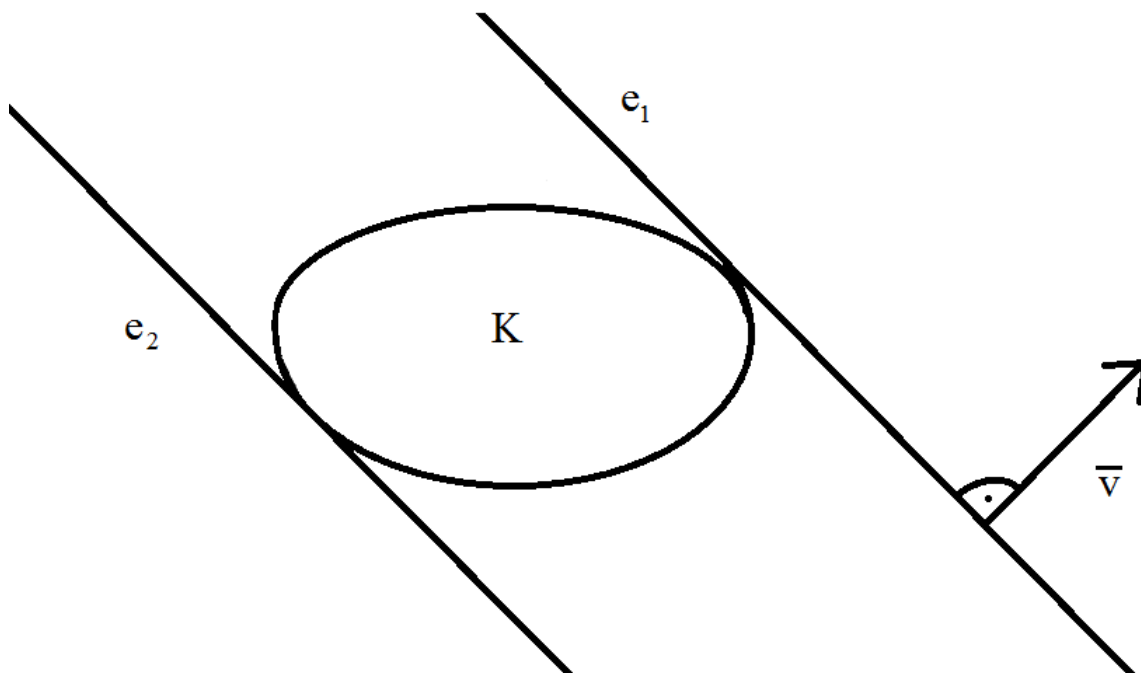
3. Állítás. Legyen a H átmérőjének két végpontja P_1 és P_2 . Ekkor a P_1 -hez és P_2 -hez húzott e_1 és e_2 támaszegyenespár merőleges lesz a $[P_1P_2]$ szakaszra és $[P_1P_2] \subset \text{diam}(H)$ -ra.

A pontos bizonyítás megtalálható a [3] könyv 75. oldalán a 7.4 feladatában. A támaszegyenespárok közötti legkisebb távolság is nevezetes távolság a geometriában.

6. Definíció. Egy H halmaz szélességén a párhuzamos támaszegyenések távolságának infimumát (korlátos zárt halmaz esetén minimumát) értjük. Jele: $w(H)$

Amennyiben egy alakzat átmérője és szélessége egyenlő, vagyis az alakzat szélessége minden irányban azonos, akkor állandó szélességű alakzatról beszélünk.

4. Állítás. Végtelen sok azonos állandó szélességű konvex alakzat létezik síkban.

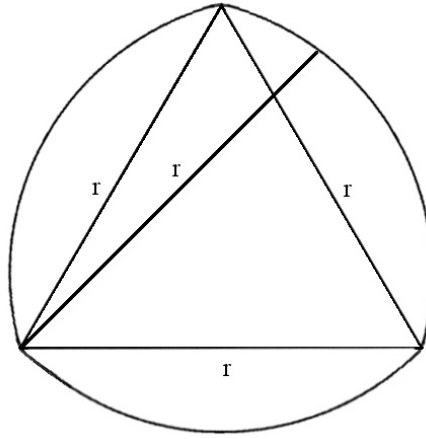


2.3. ábra. Támaszegyenespárok

Az egyik legegyszerűbb példa a kör. Ekkor az állandó szélesség a kör középpontján átmenő húr, azaz a kör átmérője lesz. Állandó szélességű alakzatok még a Reuleaux-féle sokszögek. A kör után a legegyszerűbb ilyen alakzat az ún. Reuleaux-háromszög, melyet a következőképpen szerkeszthetünk meg: vegyünk egy szabályos háromszöget, a csúcsokból oldalhosszúságú sugárral körívezzünk a szemközti oldalra. Ezt a lépést tegyük meg még kétszer a másik két csúcspontból kiindulva a szemközti oldalakra körívezzve. Az így kapott háromszög a Reuleaux-féle háromszög, amelynek szélessége minden irányba egyenlő a háromszög oldalának hosszával.

A fenti szerkesztési eljárás kis változtatásával állandó szélességű alakzatok egy végtelen családját kapjuk. Ehhez szintén egy egyenlő oldalú háromszöget kell vennünk.⁵ A háromszög csúcsaiból körívezzünk azonos hosszúságú, de az oldalaknál nagyobb r sugarú körívekkel. Majd a köríveket kössük össze olyan csúcsokból induló körívekkel, amelyeknek hossza egyenlő a korábban kiválasztott r sugarú körív és a szabályos háromszög oldalhosszúságának különbségével. Az így kapott háromszögre szintén igaz lesz, hogy szélessége állandó és r nagyságú.

A Reuleaux-háromszög szerkesztési eljárását ismerve további állandó szélességű sokszög készíthető el tetszőleges páratlan oldalú szabályos sokszögből. (Páros oldalú sokszögből az állandó szélességű alakzat megszerkeszthetőségéhez további külső pontokra van szükség.)



2.4. ábra. Az r szélességű Reuleaux-háromszög

A Reuleaux-sokszögek olyan állandó szélességű alakzatok, amelyek egy négyzet belsejében forgatva mindvégig szorosan érintkeznek a négyzet oldalaival. Ez az állítás könnyedén bizonyítható az alakzathoz húzott két, egymásra merőleges támaszegyenespárok által meghatározott négyzettel (ekkor a négyzet oldalhossza éppen az állandó szélességű alakzat szélességével lesz egyenlő).

További következtetések levonásához vessük össze a kört az állandó szélességű alakzatokkal. Vizsgáljuk meg kerületüket, illetve területüket.

Legyen a Reuleaux-háromszög szélessége r . Ekkor kerülete három 60° -os középponti szögű r sugarú körív hosszával egyezik meg, tehát $H(r) = 3 \left(\frac{2r\pi}{6} \right) = r\pi$ nagyságú a háromszög kerülete.

A szabályos háromszöggel egyenlő szélességű kör, amelynek sugara $\frac{r}{2}$, kerülete a kör kerületi képletébe behelyettesítve $\frac{2\pi r}{2} = r\pi$. Az így kapott kerület megegyezik a Reuleaux-háromszög kerületével. A két alakzat területe viszont különböző.

A Reuleaux-háromszög területét úgy tudjuk a legegyszerűbben kiszámolni, hogy három 60° -os középponti szögű r sugarú körcikk területének összegéből kivonjuk kétszer az r oldalhosszúságú szabályos háromszög területét. Az összehasonlítás miatt kiszámoljuk a közelítőértéket az r függvényeként öt tizedesjegy pontossággal. Míg az r sugarú kör területe $\frac{r^2\pi}{4} \approx 0,7854 \cdot r^2$, addig az r állandó szélességű Reuleaux-háromszög területe $\frac{r^2}{2} \cdot (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,70477 \cdot r^2$.

A fenti két példából úgy tűnik, hogy az r állandó szélességű alakzatok kerülete éppen $r\pi$. Ezt az állítást Barbier francia csillagász és matematikus bizonyította be 1860-as években, melyet azóta Barbier-tételként tartanak számon. A tétel a következőképpen hangzik:

1. Tétel (Barbier-tétel). *Minden állandó r szélességű konvex síkidom kerülete $r\pi$.*

A tétel részletes bizonyítása megtalálható a [3] könyv 235. oldalán. Míg az állandó szélességű konvex alakzatok esetében a kerületet pontosan meg tudjuk határozni,

addig a területüket általános képlettel nem tudjuk definiálni.

2. Tétel (Blaschke-Lebesgue-tétel). *Az azonos állandó szélességű konvex alakzatok közül a Reuleaux-háromszög területe a legkisebb.*

A tétel részletes bizonyítása megtalálható a [3] 235. oldalán a 7.12-es feladatban.

A páratlan oldalú szabályos Reuleaux-sokszögek területe szögek számának növelésével alulról közelíti meg az azonos szélességű kör területét függetlenül a szögek páros vagy páratlan voltától.

Összegezve a Blaschke-Lebesgue-tételt és az izoperimetrikus tételt, mely kimondja, hogy az adott kerületű konvex síkidomok közül a kör területe a legnagyobb, maga után vonja, hogy egy r állandó szélességű konvex síkidom területe $\frac{r^2\pi}{4}$ és $\frac{r^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$ közötti értéket vehet fel.

Az állandó szélességű konvex síkidomoknak van még számos további érdekes tulajdonsága.

Minden síkidom feldarabolható az eredeti síkidom átmérőjénél kisebb átmérőjű síkidomokra. Egy síkidom Borsuk-száma azt a legkisebb értéket adja meg, amely az említett kritériumokat teljesíti.

3. Tétel (Borsuk-tétel). *Minden síkidom feldarabolható három, az eredeti halmaz átmérőjénél kisebb átmérőjű halmazra.*

Azaz az F konvex és korlátos alakzat Borsuk száma $a(F) \leq 3$.

A Borsuk-tétel a [2] jegyzetben 2.14 tételeként szerepel, amelynek bizonyítása megtalálható a 30. oldalon. Az állandó szélességű alakzatok esetében az alakzat Borsuk-száma egyértelműen megadható.

5. Állítás. *Az F állandó szélességű alakzat Borsuk-száma pontosan $a(F) = 3$.*

Pontos bizonyítás megtalálható az [1] könyv 30. oldalán avagy a [2] könyv 34. oldalán, a 2.17. tétele után. Az állandó szélességű alakzatot metsző egyenesekről a következőt állapíthatjuk meg:

6. Állítás. *Az állandó w szélességű síkidom bármely két átmérője metszi egymást vagy egy belső pontban vagy egy határpontban.*

Az állítás részletes bizonyítása megtalálható a [1] könyvben.

Amennyiben a metszéspont a síkidom egy határpontja, akkor határpontból, mint középpontból pontosan az alakzat határvonalát tudjuk megadni adott sugarú körívvezéssel. Azaz, tegyük fel, hogy P pontban metszi egymást a PQ és a PR átmérő. Ekkor a P középpontból a w sugarú körív a Q és R végpontokkal pontosan az állandó szélességű alakzat Q és R pontja közötti határvonalát adja meg.

Állandó szélességű alakzatok nem csak síkban fordulnak elő, hanem léteznek térbeli megfelelői is. Definíciójuk hasonló a síkbeliek definíciójához. Így tehát a támaszsík definíciója és a szélesség definíciója a következőképpen hangzik:

7. Definíció. Az S sík a K (térbeli) konvex test támaszsíkja, ha tartalmazza K egy határpontját és a K test egésze az S sík egyik partján (zárt féltérben) fekszik.

8. Definíció. Állandó szélességű testeknek olyan háromdimenziós, konvex testeket nevezünk, amelyeknek tetszőlegesen kiválasztott két, egymással párhuzamos támaszsíkjaik közötti távolság ugyanakkora.

Ahogy a síkban megtapasztalhattuk, a legegyszerűbb példa az állandó szélességű testekre a gömb, de ezen kívül számos másik test is létezik, ám jóval nehezebb előállításuk a síkbeli megfelelőiknél.

3. fejezet

Állandó szélességű térbeli alakzatok

Az állandó szélességű síkidomok felfedezése kaput nyitott az állandó szélességű térbeli alakzatok vizsgálatára. Nyilvánvaló, hogy ha a Reuleaux-háromszöget az egyik szimmetriatengelye mentén megforgatjuk, akkor állandó szélességű forgástestet kapunk. Alapul véve a tetraédert, az állandó szélességű térbeli testek keresésére újabb megoldások születtek.

Hosszú ideig úgy gondolták, hogy ha az r élhosszúságú szabályos tetraéder csúcsaira – a Reuleaux-háromszög szerkesztési lépéseihez hasonlóan – mint gömbi középpontokra tekintünk, és ekkor vesszük a csúcsok körüli r sugarú gömbök metszetét, szintén állandó szélességű, de térbeli alakzatot kapunk. Az így kapott testet nevezték el Reuleaux-féle tetraédernek, vagy röviden Reuleaux-tetraédernek.

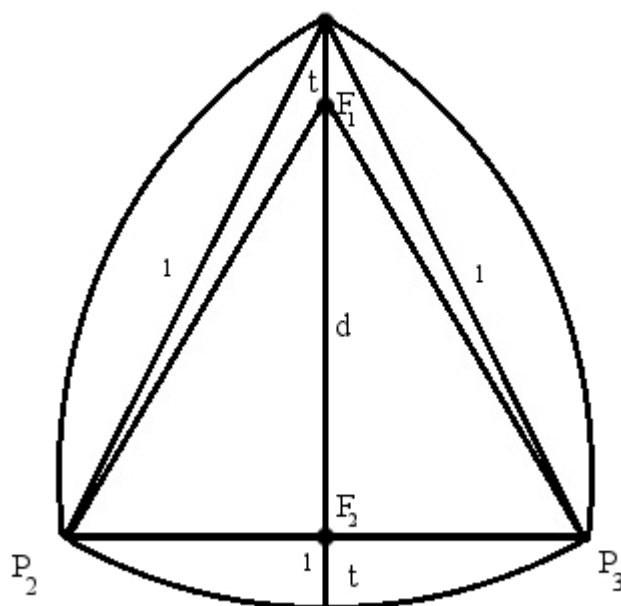
Ám ez valójában nem állandó szélességű. Ha a kitérő élek fölötti körívek felezőpontjaiban érintő párhuzamos támaszsíkok távolságát megmérjük, akkor az r szélességnél valamivel nagyobb szélességet kapunk.

Ennek bizonyítására számoljuk ki a kitérő oldalélek feletti körívek középpontjait összekötő szakasz hosszát. A könnyebb számolás érdekében – az egységoldalú, szabályos tetraédert helyezzük el úgy a koordináta-rendszerbe, hogy súlypontja a koordináta-rendszer origójában legyen, P_1 csúcsa a z -tengelyen, a P_1 -gyel szemkötti lapja pedig olyan helyzetben, hogy a P_2 pont az xz -síkban legyen (lásd például [6] honlapon). A csúcspontok koordinátái a következők:

$$P_1 = (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{4}), P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{12}), P_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{12}) \text{ és } P_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{12}).$$

Határozzuk meg a P_1P_4 , illetve P_2P_3 élek felezőpontjainak koordinátáit:

$$F_1(P_1P_4) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{12}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{6}}{12} \right),$$
$$F_2(P_2P_3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{12} \right).$$



3.2. ábra. Az S síkkal való metszet

Jól látható, hogy ez az érték az egységnyi oldalhosszúságnál valamivel nagyobb.

A téves következtetésre 1911-ben Ernst Meissner svájci matematikus hívta fel a figyelmet. Ahhoz, hogy a Reuleaux-tetraéder valóban állandó szélességű legyen apró módosításokat kell rajta végezni.

A Reuleaux-tetraéderből az adott élre illeszkedő lapsíkok kimetszenek egy darabot. A kimetszett darabot egy orsószerű felületdarabbal pótoljuk, amelyet úgy kapunk, hogy az él körül a lapsíkok által kimetszett körívet megforgatjuk. Ha ezt a helyettesítést elvégezzük egy csúcsra illeszkedő mindhárom élen, akkor állandó szélességű testet kapunk.

Meissner azt is bebizonyította, hogy ha ezt az eljárást nem az egy csúcshoz tartozó élek mentén végezzük el, hanem az egy "lapjához" tartozó élek mentén, akkor is állandó szélességű alakzatot fogunk kapni. Az így kapott két különböző testet Meissner-féle testeknek nevezzük.

Mindez pontos értékekkel a következőképpen bizonyítható:

A Meissner-féle test alapja szintén a szabályos egységnyi oldalú tetraéder. Ami azt jelenti, hogy a Meissner-test kitérő oldalélei közötti távolság megegyezik az általunk már kiszámolt egységnyi oldalú tetraéder oldalfelező középpontjai közötti

távolsággal, azaz a d -vel.

Másképp, a Meissner-test szélessége magába foglalja a már ismert t távolságot, mely az egységnyi oldalú szabályos tetraéder éle és a Reuleaux-tetraéder oldalíve közötti távolságot jelentette.

Ehhez még hozzá kell adnunk az orsó sugarát, amely éppen $r_o = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A szélesség-részleteket összeadva a következőt kapjuk:

$$d + t + r_o = \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{7}}{4} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 = r.$$

9. Definíció. A Reuleaux-háromszögből (a fenti átalakítással) képzett állandó szélességű testeket Meissner-féle testeknek nevezzük.

A Barbier-tételnek nem létezik térbeli megfelelője, viszont a Blaschke-tétel kapcsolatot létesít a felszín és a térfogat között.

4. Tétel (Blaschke-tétel). *Legyen $K \subset \mathbb{R}^3$ olyan r állandó szélességű konvex test, amelynek felszíne A és térfogata V . Ekkor*

$$2V = rA - \frac{2\pi}{3}r^2.$$

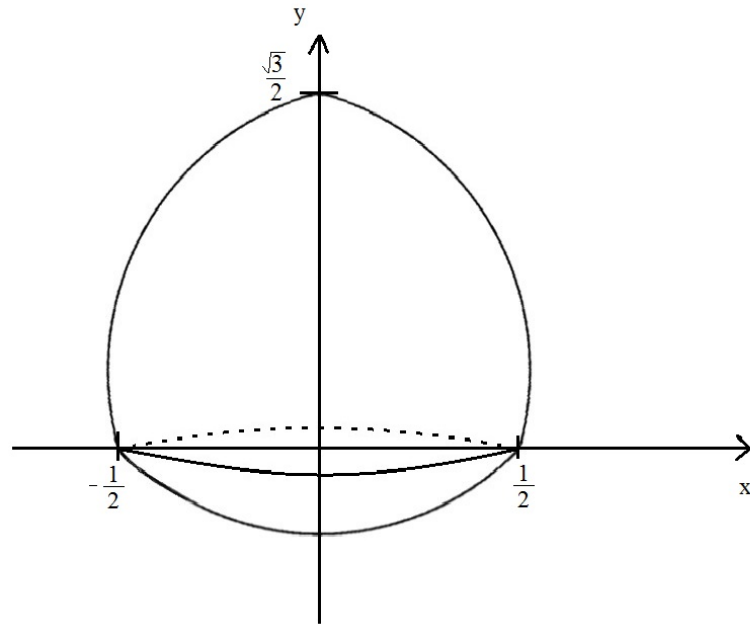
A térben nem ismert a Blaschke-Lebesgue-tétel megfelelője, azonban a következő sejtést feltételezik:

Sejtés. *Az adott w állandó szélességű alakzatok közül az állandó szélességű tetraéder(ek)nek, azaz a Meissner-féle testeknek a legkisebb a térfogata.*

A fenti sejtés megtalálható a [3] könyv 84. oldalán. A sejtés alátámasztásaként hasonlítsuk össze például a Reuleaux-háromszög által előállított forgásszimmetrikus test térfogatát a Meissner-féle testek térfogatával.

Elsőként kiszámoljuk a forgástest térfogatát. A Reuleaux-háromszöget helyezzük el egy derékszögű koordináta-rendszerben és valamely tengely körül megforgatva kiszámoljuk térfogatát az elemi integrálszámítás segítségével. Helyezzük el a háromszöget úgy, hogy szimmetriatengelye egybeessen az y tengellyel, valamint a további két csúcspontja illeszkedjen az x tengelyre. Az xy -sík két forgástestre vágja szét alakzatunkat. Először az xy -sík feletti rész térfogatát számoljuk ki, azután az alatta lévő részeket elemi integrálás segítségével. Írjuk fel a $(-\frac{1}{2}, 0)$ középpontú, egységsugarú kör egyenletének segítségével a forgástest térfogatát az y tengely körül, a $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ intervallumon:

Tudjuk, hogy $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$, ekkor



3.3. ábra. Reuleaux-háromszög forgásteste

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2} \right)^2 dy \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 - y^2 - \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{4} \right) dy \\
 &= \pi \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-y^2} dy \\
 &= \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) \approx 0,39559
 \end{aligned}$$

Ehhez a térfogathoz hozzá kell még adnunk az x tengely alatti gömbsapka térfogatát, mely a következő:

$$\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int_{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}^0 \left(1 - \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) dy \\
&= \pi y \Big|_{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}^0 - \pi \int_{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}^0 \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 dy \\
&= \pi y \Big|_{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}^0 - \pi \frac{\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3}{3} \Big|_{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}^0 \\
&= \pi y - \frac{\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3}{3} \Big|_{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}^0 \\
&= \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \approx 0,01715\pi \approx 0,05388.
\end{aligned}$$

Összesen tehát a forgástest térfogata:

$$V = V_1 + V_2 = \pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6} \right) + \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \approx 0,14307\pi \approx 0,44946$$

A következő lépésben számoljuk ki a Meissner-test térfogatát. A Blaschke-tétel miatt elegendő kiszámolnunk a Meissner-testek felszínét. Megjegyezzük, hogy a két Meissner-test felszíne, és így térfogata is, egyenlő.

Meissner-test felszíne több területdarabból áll. Egyik ilyen felületdarab az orsó (pontosabban az orsónak egy darabja). Mint forgástest, felszínét könnyen kiszámolhatjuk elemi úton is.

Legyen a $C(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ pont az egységsugarú kör középpontja, a hozzátartozó kör egyenlete pedig $x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1$. Vegyük az x -tengely feletti körívét a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumon. Jelöljük az orsóalakú forgástest felszínét A_O -val. Az intervallumon vett forgástest felszínét a következőképpen számoljuk ki:

$$x^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1$$

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(y')^2(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} A_O &= 2\pi \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} y(x) \sqrt{1+y'(x)^2} dx \right) \\ &= 2\pi \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \right) \\ &= 2\pi \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \\ &= 2\pi \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \right) \\ &= 2\pi \left(2 x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \right) \\ &= 2\pi \left(1 - \sqrt{3} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \right) \\ &\approx 0,58497 \end{aligned}$$

Az orsóból csak a $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ -nyi, azaz $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ középponti szögű cikket kell kivágnunk. Ugyanis a szabályos tetraéder lapszöge éppen α és az élek mentén α szögű darabot vágtunk ki, amit az orsó megfelelő darabjával helyettesítettünk.

Aránypárral kifejezve az orsóból kivágott felszíndarab a következő, amelyet jelöljünk T_o -val:

$$T_o = 2\pi \left(\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \left(1 - \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \right) \right) = \arccos \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \right) \approx 0,1146.$$

A Meissner-test felszínét alkotó másik felületdarab a szabályos tetraéder felett lévő gömbháromszögek területe, amelyet a tetraéder egy csúcsra illeszkedő lapsíkjai metszenek ki abból a gömbből, amely középpontja a csúcs és sugara a tetraéder éle. Tehát ezen gömbháromszög oldalai 60° hosszúságúak és belső szögei α -val egyenlőek, ahol $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$, a tetraéder lapszöge.

A Girard-tétel szerint a gömbháromszögek területe egyenlő a szögtöbbsletével. Így a gömbháromszög T területe a következő:

$$T = 3 \arccos \frac{1}{3} - \pi \approx 0,55129.$$

A Meissner-test felszínét az orsódarab -, illetve a gömbháromszögek felszínén kívül gömbi körszeletek alkotják. A gömbi körszelet T_{sz} területe tulajdonképpen az azonos α középponti szöghöz tartozó gömbi körcikk T_c területének és egy szabályos 60° -os oldalú T_h területének a különbsége.

Körcikk területe aránypárral számolható ki: középponti α szög esetén a teljes körcikk területe $T_c = \frac{\alpha}{2\pi} T_k$, ahol a T_k a 60° -os sugarú gömbi kör területe, ami éppen π , mivel ez a gömbi kör egy $\frac{1}{2}$ mélységű gömbsapka.

$$T_{sz} = T_c - T_h T_{sz} = \frac{\arccos \frac{1}{3}}{2\pi} \cdot \pi - \left(3 \arccos \frac{1}{3} - \pi \right)$$

$$T_{sz} = \pi - \frac{5}{2} \cdot \arccos \frac{1}{3}$$

Az egységnyi oldalú szabályos tetraéderre épített Meissner-test felszínét a három alkotóelem ismeretében már ki tudjuk számolni. Négy szabályos gömbháromszög, három orsódarab és hat gömbi körszelet területének összege adja meg a Meissner-test felszínét.

$$A_{Meissner} = 4 \cdot T_h + 3 \cdot T_o + 6 \cdot T_{sz}$$

$$A_{Meissner} = 4 \cdot \left(3 \arccos \frac{1}{3} - \pi \right) + 3 \cdot \arccos \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \right) + 6 \cdot \left(\pi - \frac{5}{2} \cdot \arccos \frac{1}{3} \right)$$

$$A_{Meissner} = 2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \arccos \frac{1}{3} \approx 2,93412$$

Mindezek után a Blaschke-tétel összefüggését ($2V = rA - \frac{2\pi}{3}r^2$) alkalmazva a Meissner-test térfogata egységnyi r sugarú test esetében :

$$2V = \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \arccos \frac{1}{3} \right) - \frac{2\pi}{3}$$

$$2V = \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \arccos \frac{1}{3}$$

$$V = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \arccos \frac{1}{3}$$

$$\approx 0,41986.$$

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy az egységoldalú Reuleaux-háromszögből képzett állandó szélességű forgástest térfogata nagyobb, mint a szintén egységnyi oldalhosszúságú állandó szélességű Meissner-test térfogata, ami alátámasztja a sejtést.

Irodalomjegyzék

- [1] V. G. Boltyanskij, I. C. Gohberg, *Alakzatok felbontása kisebb részekre*, Tankönyvkiadó, 1976.
- [2] G. Horváth Á., Lángi Zs., *Kombinatorikus geometria*, Polygon, 2011.
- [3] I. M. Jaglom, V. G. Boltyanskij, *Konvex alakzatok*, Polygon, 2011.
- [4] B. Kawohl, C. Weber, *Meissner's Mysterious Bodies*, The Mathematical Intelligencer, 2011.
- [5] L. M. Peimbert, *Cuerpos de ancho constante*, Ediciones Científicas Universitarias, 1998.
- [6] E. W. Weisstein, *Reuleaux Tetrahedron*, MathWorld-A Wolfram Web Resource, 2000.
- [7] Rademacher-Toeplitz: *Számokról és alakzatokról*, Typotex Elektronikus Kiadó Kft., 2010.
- [8] W. Blaschke: *Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen von konstanter Breite*, Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 67 (1915, 290-297.)

Nyilatkozat

Alulírott Kovács Katalin Márta kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

2016. december. 9.

Kovács Katalin Márta