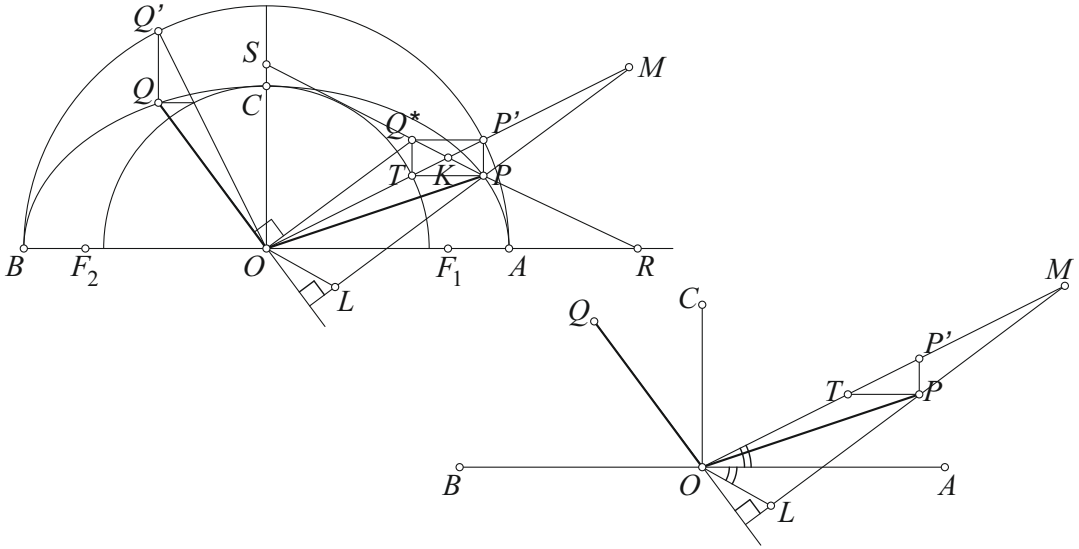
# Két probléma az ellipszoidról.

G.Horváth Ákos

Department of Geometry, Mathematical Institute,
Budapest University of Technology and Economics (BME)

Szegedi Geometria Nap, Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, 2017

# Módosított Rytz szerkesztés



# Chasles szerkesztése az n=3 esetben

- Szerkesszük meg két adott átmérő síkjának a metszetét az ellipszoiddal.

# Chasles szerkesztése az n=3 esetben

- Szerkesszük meg két adott átmérő síkjának a metszetét az ellipszoiddal.
- Határozzuk meg a harmadik átmérő végpontjához tartozó duális konfokális másodrendű felület rendszer fokális kúpszeleteit.

# Chasles szerkesztése az n=3 esetben

- Szerkesszük meg két adott átmérő síkjának a metszetét az ellipszoiddal.
- Határozzuk meg a harmadik átmérő végpontjához tartozó duális konfokális másodrendű felület rendszer fokális kúpszeleteit.
- Határozzuk meg az origó csúcsú fokális kúpok közös alkotóit (4 ilyen van), az alkotók által definiált 6 sík azon 3 metszésvonala, amik az alkotóktól különböznek adják a tengelyek irányát.

# Chasles szerkesztése az n=3 esetben

- Szerkesszük meg két adott átmérő síkjának a metszetét az ellipszoiddal.
- Határozzuk meg a harmadik átmérő végpontjához tartozó duális konfokális másodrendű felület rendszer fokális kúpszeleteit.
- Határozzuk meg az origó csúcsú fokális kúpok közös alkotóit (4 ilyen van), az alkotók által definiált 6 sík azon 3 metszésvonala, amik az alkotóktól különböznek adják a tengelyek irányát.
- A harmadik átmérő végpontján keresztülfektetett, a fősíkokkal párhuzamos síkok, a közös alkotók valamelyikéből kimetszik a féltengelyek hosszait.

# Kérdések Chasles szerkesztése kapcsán

- Mi a duális konfokális másodrendű felületrendszer?

# Kérdések Chasles szerkesztése kapcsán

- Mi a duális konfokális másodrendű felületrendszer?
- Mi köze a síkmetszetnek a duális rendszer fokális kúpszeleteihez?

# Kérdések Chasles szerkesztése kapcsán

- Mi a duális konfokális másodrendű felületrendszer?
- Mi köze a síkmetszetnek a duális rendszer fokális kúpszeleteihez?
- Miért lesznek a tekintett egyenesek az eredeti ellipszoid tengelyei?

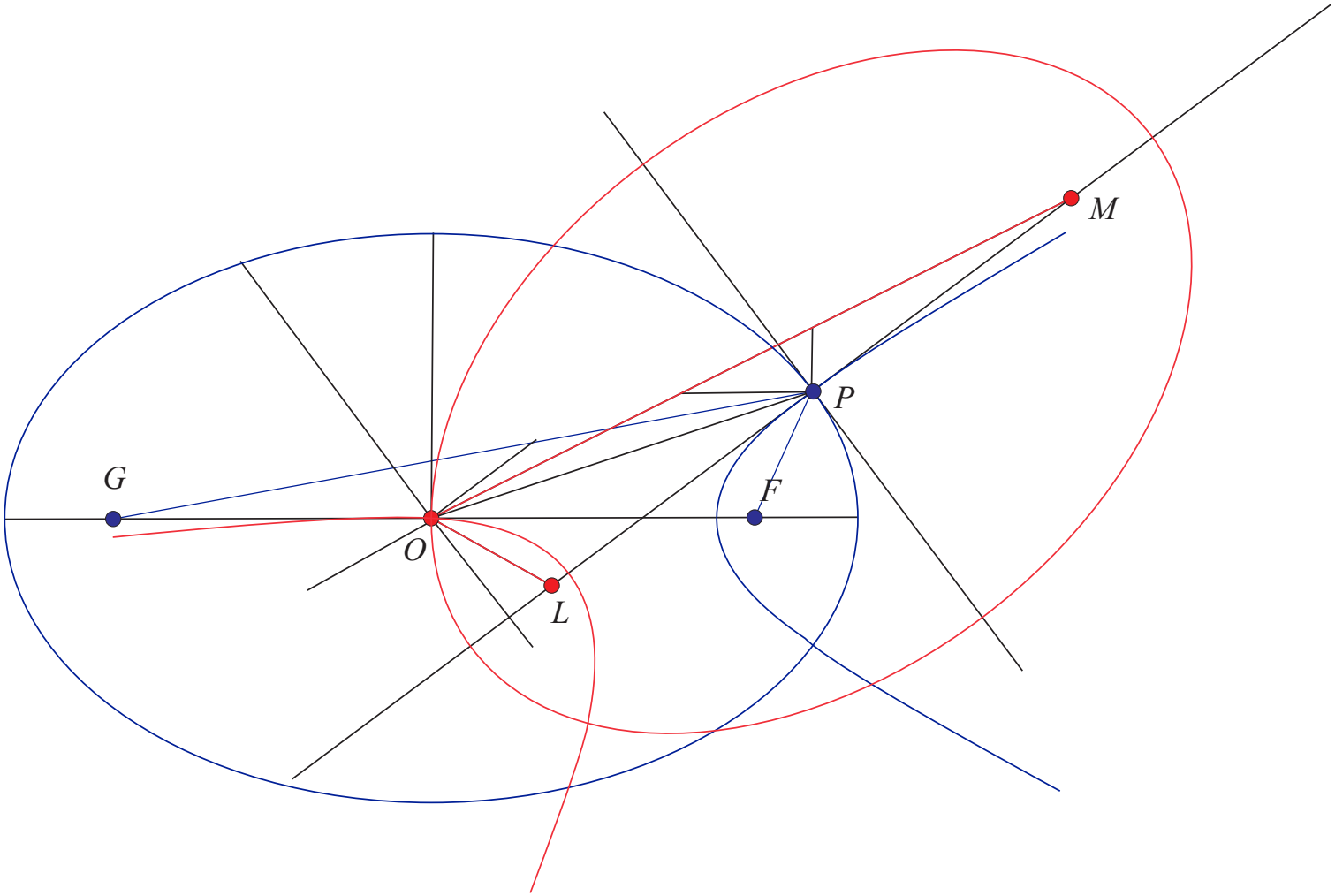
# Kérdések Chasles szerkesztése kapcsán

- Mi a duális konfokális másodrendű felületrendszer?
- Mi köze a síkmetszetnek a duális rendszer fokális kúpszeleteihez?
- Miért lesznek a tekintett egyenesek az eredeti ellipszoid tengelyei?
- Miért kapjuk így a tengelyek félhosszát?

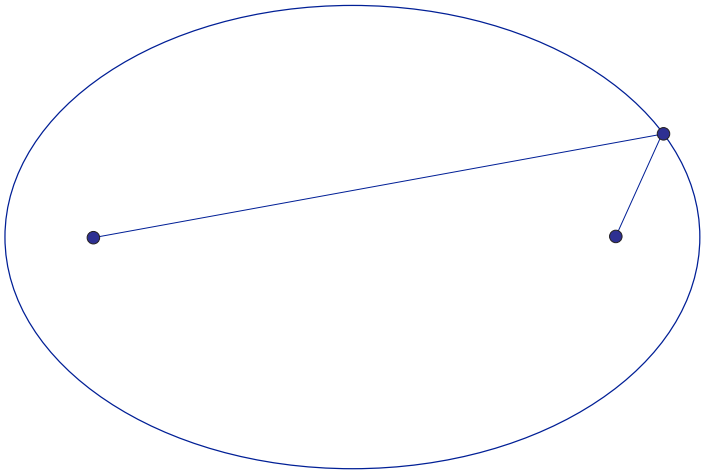
# Kérdések Chasles szerkesztése kapcsán

- Mi a duális konfokális másodrendű felületrendszer?
- Mi köze a síkmetszetnek a duális rendszer fokális kúpszeleteihez?
- Miért lesznek a tekintett egyenesek az eredeti ellipszoid tengelyei?
- Miért kapjuk így a tengelyek félhosszát?
- Hogy lehet mindezt bizonyítani?

# Dualitás és Chasles szerkesztése a síkon

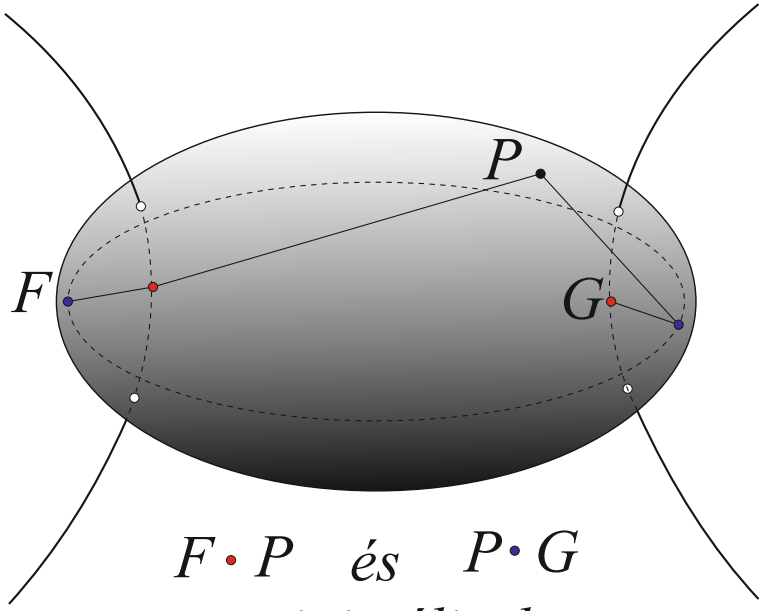


# Az ellipszis fokális definíciója



$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

Otto Staude és az ellipszoid




$F \cdot P$ *és* $P \cdot G$

*minimálisak*

$$|F\cdot|+|\cdot P|+|P\cdot|+|\cdot G|=\text{konstans}$$

# A XIX.századi irodalom:


- Chasles, M.: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, originally published by Hayez in Bruxelles 1837.
- MacCullagh, J.: Collected works, Hodges, Figgis and Co., 1880.
- Salmon, G.: A treatise on the analytic geometry of three dimension. (Fourth Edition) Hodges, Figgis and Co., 1882.
- Staude, O.: Die Focaleigenschaften Der Flachen Zweiter Ordnung, Leipzig, Teubner, (1896)

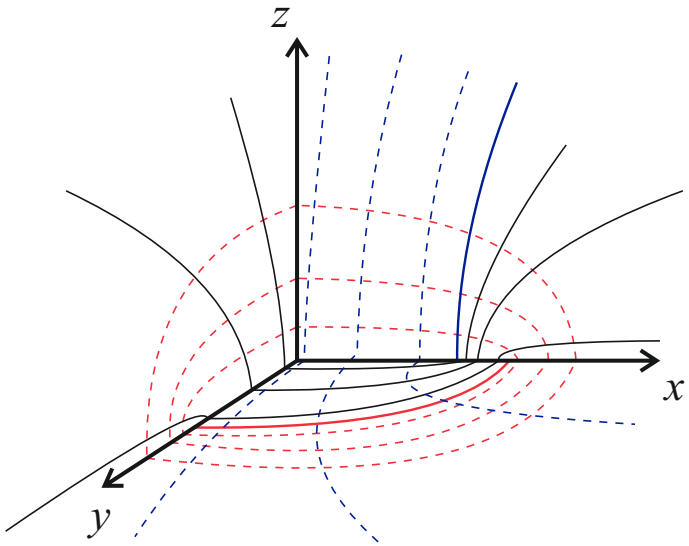
# A XX.-XXI. századi irodalom:


- Sommerville, D. M. Y.: Analytical geometry of three-dimensions. Cambridge University Press, 1939.
- Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.: Anschauliche Geometrie, Chelsea Publishing Company, 1952.
- Berger, M.: Geometry I-II, Springer, 1996.
- Glaeser, G, Stachel, H., Odehnal, B.: The Universe of Conics, SpringerSpektrum, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- G. Horváth, Á, Prok, I.: *On the constructibility of the axes of an ellipsoid. (The construction of Chasles in practice)* Manuscript 2017.
- G. Horváth, Á: *On confocal quadrics.* `https://arxiv.org/abs/1707.01233`.

# n-dimenziós definíciók

- Nem-elfajuló másodrendű felület: $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$
- Konfokális másodrendű felületek: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2 - \lambda} = 1,\ -\infty < \lambda < a_1^2$
- A $k$-adik fokális másodrendű felület: $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2 - a_k^2} = 1$
- Egy konfokális rendszer $n$-szeres fedését adja a térnek:
  $0 = \sum_{i=1}^{n} x_i'^2 \prod_{j \neq i} (a_j^2 - \lambda) - \prod_{i=1}^{n} (a_i^2 - \lambda) =: f(\lambda)$
  A megoldást adó $-\infty < \lambda_1 < a_n^2 < \lambda_2 < a_{n-1}^2 < \ldots < a_2^2 < \lambda_n < a_1^2$ rendszer koordinátázza a pontot.

# Konfokális másodrendű felületek a térben



# A koordináták nívó felületei

# Amit Chasles tudott a térben...

- Az ellipszoid egy pontját tartalmazó konfokálisok normálisai egy ortogonális rendszert adnak.
- Az ellipszoid egy pontja definiál egy duális, az origón keresztülhaladó konfokális rendszert úgy, hogy ezek tengelyei az eredeti rendszer pontbeli normálisai, a félhosszak 3x3-es mátrixa pedig az eredeti félhosszrendszer mátrixának a transzponáltja.
- Az origó csúcsú a duális rendszer fokális kúpszeletein áthaladó fokális kúpok tengelyei az eredeti rendszer tengelyei, így a két fokális kúp közös tengelyeit kell meghatározni
- A fokális kúpok közös alkotói meghatározzák a tengelyeket és a hiányzó féltengely hosszakat is...

# n-dimenziós állítások

$$x_i'^2 = \frac{\prod_{j=1}^{n} \left(a_i^j\right)^2}{\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\left(a_i^i\right)^2 - \left(a_j^i\right)^2\right)} \text{ for all } i.$$

## Theorem

*With the point $x'$ as the centre $n$ confocals may be described having the $n$ tangent hyperplanes for principal planes and intersecting in the centre of the original system of surfaces. The axes of the new system of confocals are $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n$, $a_2^1, a_2^2, \ldots a_2^n \ldots a_n^1, a_n^2, \ldots a_n^n$. The $n$ tangent hyperplanes of the new (dual) system are the $n$ principal planes of the original system.*

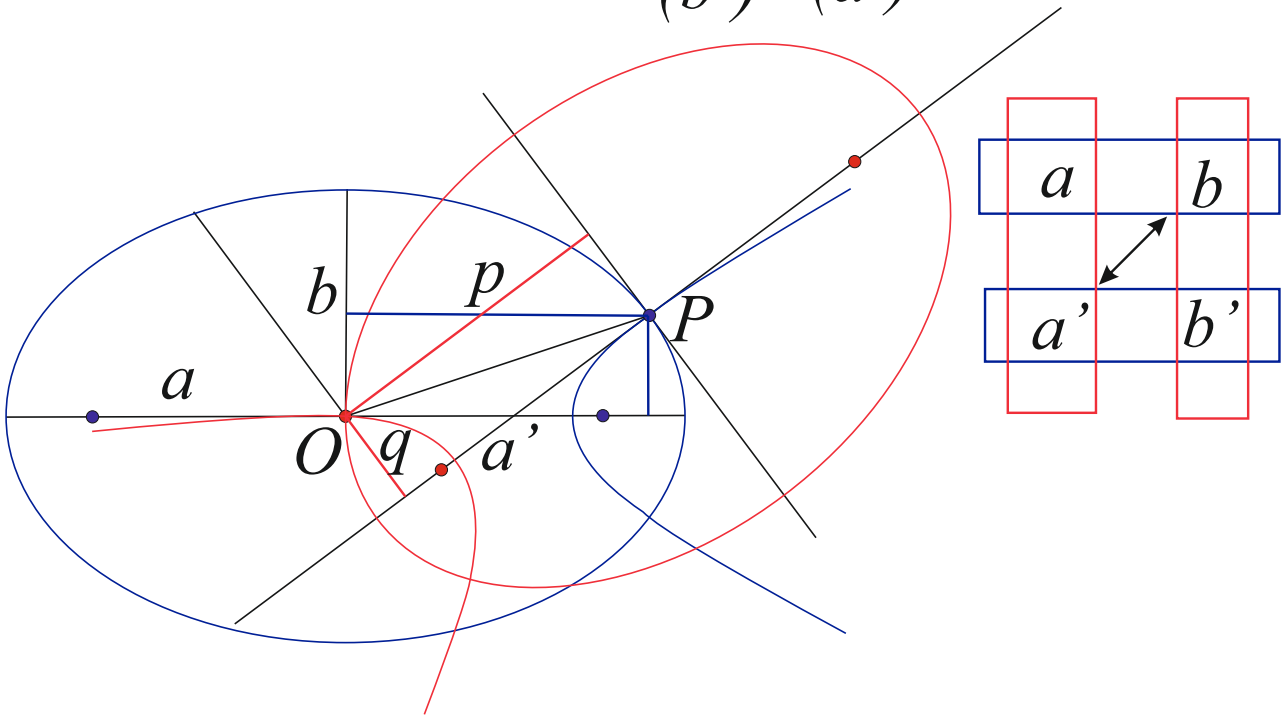
### Theorem

*Let $x'$ be any point of the space and denote by $C_k(x')$ the cones with apex $x'$ and generators through the focal quadric $C_k$. Then there are an orthogonal system of lines $l_1, \ldots, l_n$ through $x'$ which elements are the common axes of the focal cones. The magnitudes of the axes corresponding to the same line are dependent from $k$, more precisely the signed and squared lengths of the semi-axes of $C_k(x')$ are $\{(a_k^i)^2 : i = 1, \ldots, n\}$.*

### Theorem

*$(n-1)$ cones having a common vertex $x$ envelope the $(n-1)$ focal quadrics (of distinct types). The length of the intercept made on one of their common edges by a hyperplane through the origin parallel to the tangent hyperplane to a confocal through $x$ is equal to the major semi-axis of the given confocal.*

$$x^2 = \frac{a^2 (a')^2}{a^2 - b^2} \qquad y^2 = \frac{b^2 \ (b')^2}{(b')^2 - (a')^2}$$




$$p^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a')^2} \qquad q^2 = \frac{(a')^2 (b')^2}{(a')^2 - a^2}$$

# Az állítás:

## Theorem

*Let $P$ be a point of the ellipsoid $\mathcal{E}$ given by the canonical form*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

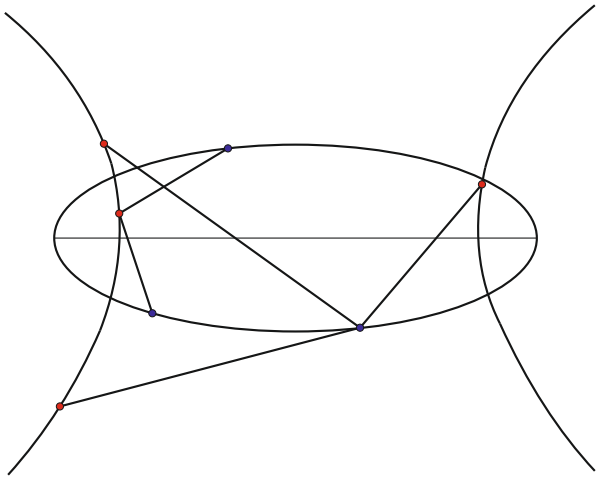
*Denote by $F_1 = (-\sqrt{a^2 - c^2}, 0, 0)^T$ the left focus of the focal hyperbola of the confocal quadrics defined by the given ellipsoid and $G_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)^T$ is the right focus of the focal ellipse of the same system. Then the sum of the shortest length of the broken line $F_1HPEG_2$ where $H$ is a point of the focal hyperbola and $E$ is a point of the focal ellipse is equal to $2a + \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - b^2}$ hence it is independent from the position of $P$ on the ellipsoid.*

# Geometriai lemmák

## Lemma

*Assume that $H_1$ and $H_2$ are two points on the same branch (on the different branches) of the focal hyperbola and $E$ is any point of the focal ellipse. Then the difference $|H_1E| - |EH_2|$ (the sum $|H_1E| + |EH_2|$) of the lengths of the edges of the broken line $H_1EH_2$ is independent from the position of $E$. Similarly if $E_1$ and $E_2$ are two points on the focal ellipse then the difference $|E_1H| - |HE_2|$ of the broken line $E_1HE_2$ is independent from the position of $H$ in the focal hyperbola.*

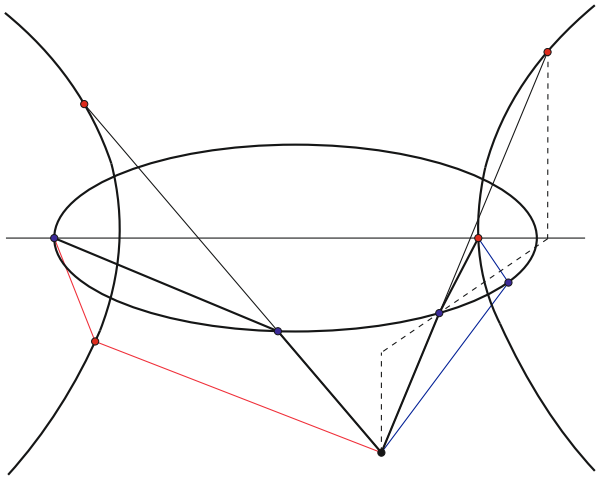
# 1.Lemma



## Lemma

*If $P$ is any point of the space and $l$ is a common transversal of the focal conics through $P$ with points of intersection $E \in C_3 \cap l$ and $H \in C_2 \cap l$ for which $E$ separates $P$ and $H$ (for which $H$ separates $P$ and $E$). Then for any point $H_1$ ($E_1$) on the same branch of the focal hyperbola (of the focal ellipse) as $H$ is, the minimal length of the broken line $PFH_1$ ($PFE_1$) from $P$ to $H_1$ ($E_1$) through a point $F$ of the focal ellipse (of the same branch of the focal hyperbola as $H$) attend at the point $E$ ($H$).*
*If $P$ separates the two points of intersection, then we have the inequality $|PE| - |EH_1| \leq |PF| - |FH_1|$.*

# 2.Lemma



# A tétel bizonyítása

- Az ellipszoidot a $\lambda, \mu, \nu$ koordinátarendszerben $\lambda = konst.$ adja meg.
- Használjuk a duális konfokális rendszerre vonatkozó felírását a fokális kúpok közös alkotóinak, mindent az ellipszoid koordinátákkal fejezünk ki.
- Kiszámítjuk és alkalmazzuk a duális koordinátarendszerről az eredetire való áttérés egyenleteit. Így kapjuk meg a közös alkotók fokális kúpszeleteken levő pontjait.
- Felírjuk a szükséges távolságok összegeit, minden $\lambda, \mu, \nu$-vel van kifejezve. $\mu, \nu$ kiesik $\lambda = konst.$ az ellipszoidon, kész.

Köszönöm a figyelmet!