# SZEGEDI GEOMETRIA NAP 2017

http://www.math.u-szeged.hu/Geo/GN

Kivonatok/Abstracts

Szeged, 2017. október 6.

**Geometria Tsz., Bolyai Intézet, TTIK, SZTE**

http://www.math.u-szeged.hu/Geo/

# SZEGEDI GEOMETRIA NAP 2017

http://www.math.u-szeged.hu/Geo/GN

Szeged, SZTE TTIK Bolyai Intézet, Bolyai terem (BO-215), 2017. október 6.

# PROGRAM

Poszterszekció

09:30 ***Regisztráció***

10:00 ***Megnyitó*** (köszöntő és a szegedi geometria történetének rövid ismertetése)

10:15 **Székelyhidi László** (ifj.) (Universität Leipzig, Lipcse, Németország)
KALIBRÁCIÓK KOMPAKT SOKASÁGOKON
(Calibrations on compact manifolds)

10:45 **Tóth Géza** (Rényi Intézet, Budapest, Magyarország)
A METSZÉSI LEMMA MULTIGRÁFOKRA
(The Crossing Lemma for multigraphs)

11:15 ***Kávészünet***

11:45 **Domokos Gábor** és **Lángi Zsolt** (MTA-BME Morphodynamics Research Group, Budapest, Magyarország)
KRITIKUS PONTOK KÖVETÉSE
IDŐBEN VÁLTOZÓ SIMA FELÜLETEKEN ÉS FINOM DISZKRETIZÁCIÓIKON
(Tracking critical points on evolving smooth manifolds and their fine discretizations)

12:15 **Szőnyi Tamás** (ELTE, Budapest, Magyarország)
LEFOGÓ PONTHALMAZOK
DISZJUNKT BAER-RÉSZSÍKOK UNIÓJÁRA VONATKOZÓAN
(Relative blocking sets for the union of disjoint Baer subplanes)

12:45 ***Ebédszünet*** (könnyű szendvicsek, üdítő és kávé a Haar teremben (BO-214))

13:45 **Böröczky Károly** (ifj.) (CEU és Rényi Intézet, Budapest, Magyarország)
A DUÁLIS MINKOWSKI PROBLÉMÁRÓL
(About the dual Minkowski problem)

14:15 **G. Horváth Ákos** (BME, Budapest, Magyarország)
KÉT PROBLÉMA AZ ELLIPSZOIDRÓL
(Two problems on ellipsoids)

14:45 **Muzsnay Zoltán** (DE, Debrecen, Magyarország)
KONSTANS GÖRBÜLETŰ SÍKPROJEKTÍV RANDERS-FELÜLETEK
HOLONÓMIA-CSOPORTJAINAK KLASSZIFIKÁCIÓJA
(Classification of the holonomy groups of projectively flat Randers two-manifolds of constant curvature)

15:15 ***Kávészünet***

15:45 **Csikós Balázs** (ELTE, Budapest, Magyarország)
A HARMONIKUS TEREK NÉHÁNY GEOMETRIAI JELLEMZÉSE
(Some characterisations of harmonic spaces)

16:15 **Kincses János** (SZTE, Szeged, Magyarország)
VÉGES KONVEX GEOMETRIÁK REPREZENTÁCIÓJA
„SZÉP” KONVEX HALMAZOKKAL
(On the representation of finite convex geometries with „nice” convex sets)

16:45 ***Búcsúfogadás*** (könnyű falatok, üdítő és kávé a Haar teremben (BO-214))

18:20 ***Zárás***

**SZTE TTIK, Bolyai Intézet, Geometria Tsz.**

http://www.math.u-szeged.hu/Geo/

# SZEGEDI GEOMETRIA NAP 2017

http://www.math.u-szeged.hu/Geo/GN

Szeged, SZTE TTIK Bolyai Intézet, Bolyai terem (BO-215), 2017. október 6.

# POSZTERSZEKCIÓ

- **Gévay Gábor** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  Feloldható konfigurációk
  (Resolvable configurations)
- **Kozma József** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  Hilbert-geometriák euklidészi tulajdonságokkal
  (Hilbert geometries with Euclidean properties)
- **Kurusa Árpád** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  Kvadratikus projektív metrikák
  (Quadratic projective metrics)
- **Lukács Péter** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  Szakaszok takarási függvénye
  (Masking function of segments)
- **Mezőfi Dávid** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  Absztrakt unitálok osztályozása számítógépes módszerekkel
  (Classification of abstract unitals by computation methods)
- **Molnár Emil** és **Szirmai Jenő** (BME, Budapest, Magyarország):
  Diszkrét geometria Thurston-terekben
  (Discrete geometry in Thurston spaces)
- **Vígh Viktor** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  A képakasztó játék
  (The picture hanging puzzle)
- **Zarnócz Tamás** (SZTE, Szeged, Magyarország):
  Gömbi zónák elrendezéseinek multiplicitása
  (On the multiplicity of arrangements of equal zones on the sphere)

# Kalibrációk kompakt sokaságokon

2017. október 6.

ifj. **Székelyhidi László**

Lipcse, Németország

Legyen $M$ egy $n$-dimenziós kompakt Riemann-sokaság. Köztudott, hogy egységhosszúságú vektormező pontosan akkor létezik $M$-en, ha $M$ Euler-karakterisztikája $\chi(M) = 0$. Thurston bebizonyította, hogy ebben az esetben 1-kodimenziós fóliázás is létezik: ez megfelel egy egységhosszúságú vektormezőnek, melynek az ortogonális hipersík-disztribúciója integrálható.

Az előadásban azt a kérdést tárgyaljuk, hogy mely esetben létezik olyan vektormező, amely egységhosszúságú és divergenciamentes. Amennyiben egy ilyen $V$ ortogonális hipersík-disztribúciója integrálható, akkor ez megfelel egy 1-kodimenziós fóliázásnak, amely minimálfelületekből áll — ez esetben $V$-t kalibrációnak hívjuk. Az ilyen fóliázások nagyon speciálisak és létezésük nem csak $M$ topológiájától hanem a metrikától is függ. Viszont az ellentétes „kontakt" esetben, ha $V$ egységhosszúságú, divergenciamentes, de ortogonális hipersík-disztribúciója nem integrálható, létezése csakis a topológiától függ amennyiben $n \geq 5$. Ennek az állításnak a bizonyítására egy olyan módszert mutatunk be, amit Nash vezetett be a sima izometrikus beágyazási tétele bizonyítására.

# Calibrations on compact manifolds

6 October 2017

**László Székelyhidi** jr.

Leipzig, Germany

Let $M$ be an $n$-dimensional compact Riemannian manifold with $n \geq 5$. As is well known, a unit-length vectorfield on $M$ exists if and only if the Euler characteristic $\chi(M)$ vanishes. Thurston showed that under this condition one can also find a codimension-1 foliation on $M$: that is, a unit-length vectorfield $V$ whose perpendicular hyperplane-distribution is integrable.

In the talk we discuss the possibility that the vectorfield is in addition divergence-free. If the perpendicular hyperplane-distribution is integrable, such vectorfields $V$ correspond to codimension-1 foliations by minimal surfaces and in this case $V$ is called a calibration. Such foliations are rather special and their existence depends very much on the metric, not just the topology. It turns out however, that in the opposite "contact" case, when the perpendicular hyperplane-distribution is non-integrable, the existence of unit-length divergence-free vectorfields is determined solely by the Euler characteristic, provided $n \geq 5$. This can be proved using a method of construction very similar to Nash's construction of smooth isometric embeddings.

# A Metszési Lemma multigráfokra

2017. október 6.

**Tóth Géza**

Rényi, Budapest, Magyarország

Egy $G$ gráf metszési száma, $cr(G)$ a metszések minimális száma $G$ lerajzolásaira a síkra. A Metszési Lemma szerint minden $n$ csúcsú és $e \geq 4n$ élű egyszerű $G$ gráfra $cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{e^3}{n^2}$.

Ez az eredmény nyilván nem érvényes multigráfokra (amelyekben lehetnek párhuzamos élek illetve hurokélek). Belátjuk, hogy néhány egyszerű és természetes feltétellel viszont már kiterjeszthető a Metszési Lemma multigráfokra is.

Közös munka Pach Jánossal.

# The Crossing Lemma for multigraphs

6 October 2017

**Géza Tóth**

Rényi, Budapest, Hungary

The crossing number $cr(G)$ of a graph $G$ is the minimum number of crossings over all possible drawings of $G$ on the plane. According to the Crossing Lemma, for any simple graph $G$ with $n$ vertices and $e \geq 4n$ edges, $cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{e^3}{n^2}$.

Clearly, this result does not hold for multigraphs (graphs with parallel edges or loops). We find natural conditions that imply the analogue of the Crossing Lemma for multigraphs.

Joint work with János Pach.

# Kritikus pontok követése időben változó sima felületeken és finom diszkretizációikon

2017. október 6.

**Domokos Gábor**[1] és **Lángi Zsolt**[2]

MTA-BME Morfodinamikai Kutató Csoport, Budapest, Magyarország

[1]Mechanika, Anyag és Struktúra Tanszék, Budapest Műszaki Egyetem
[2]Geometria Tanszék, Budapest Műszaki Egyetem

Az elmúlt években nyilvánvalóvá vált, hogy a geofizikai kopás jól karakterizálható a kopó felület statikai egyensúlyi pontjai $N$ számának $N(t)$ időbeli változásával. A statikus egyensúlyi pontok a részecske felületének a kritikus pontjainak feleltethetőek meg, ahol a felületet a kopó test tömegközéppontjától mért $r$ távolságfüggvénnyel reprezentáljuk, így az időbeli evolúció egy $N(r(t))$ függvényként adható meg.

A részecske matematikai modellje két skálán adható meg: a makró (globális) skálán a részecske egy sima felületnek tekinthető, amit egy sima $r$ távolságfüggvény ír le $N = N(r)$ egyensúlyi ponttal, míg a mikro (lokális) skálán a részecske természetes modellje $r$ egy finoman diszkretizált $r_\Delta$ poliedrikus approximációja $N_\Delta = N(r_\Delta)$ egyensúlyi ponttal. Erős intuitív érvek sugallják, hogy $N(t)$ és $N_\Delta(t)$ döntően ellenkező irányban változik (azaz ha az egyik nő akkor a másik csökken és fordítva), és ez a megfigyelés fontos tényezőnek tűnik a geofizikai kopási folyamat követésében.

A jelen előadásban bemutatjuk a matematikai eszközöket, melyek szükségesek ezen jelenség tanulmányozásához. Amellett, hogy belátunk eredményeket, melyek alátámasztják az eredeti intuitív képet, azt is megmutatjuk, hogy a matematikai modellünk strukturálisan stabil, azaz számítógépes szimulációkkal igazolható.

Az ismertetett eredmények Sipos Andrással végzett közös munka eredményei.

# Tracking critical points on evolving smooth manifolds and their fine discretizations

6 October 2017

**Gábor Domokos**[1] and **Zsolt Lángi**[2]

MTA-BME Morphodynamics Research Group, Budapest, Hungary

[1]Dept. of Mechanics, Materials and Structures, Budapest University of Technology
[2]Dept. of Geometry, Budapest University of Technology

In recent years it became apparent that geophysical abrasion can be well characterized by the time evolution $N(t)$ of the number $N$ of static balance points of the abrading particle. Static balance points correspond to the critical points of the particle's surface represented as a scalar distance function $r$, measured from the center of mass of the particle, so their time evolution can be expressed as $N(r(t))$.

The mathematical model of the particle can be constructed on two scales: on the macro (global) scale the particle may be viewed as a smooth manifold described by the smooth distance function $r$ with $N = N(r)$ equilibria, while on the micro (local) scale the particle's natural model is a finely discretized polyhedral approximation $r_\Delta$ of $r$, with $N_\Delta = N(r_\Delta)$ equilibria. There is strong intuitive evidence suggesting that $N(t)$ and $N_\Delta(t)$ may primarily evolve in the opposite manner (i.e. if one is increasing then the other is decreasing and vice versa) and this observation appears to be a key factor in tracking geophysical abrasion.

Here we create the mathematical framework necessary to study this phenomenon. Beyond proving some results which appear to confirm the original intuitive picture we also show that our mathematical model is structurally stable, i.e. it may be verified by computer simulations.

The presented results are achieved jointly with András Sipos.

# Lefogó ponthalmazok diszjunkt Baer-részsíkok uniójára vonatkozóan

2017. október 6.

**Szőnyi Tamás**

ELTE, Budapest, Magyarország

Egy $q^2$ rendű Galois-síkon tekintsük a $t$ diszjunkt Baer-részsík pontjai és egyenesei alkotta reguláris és uniform illeszkedési struktúrát. Ebben keressük a minimális méretű lefogó ponthalmazokat. Ha $t$ kicsi, ezek $t$ darab részegyenes uniói (minden részsíkban annak egy egyenesét vesszük), azaz $t(q+1)$ pontból állnak. Ha $t$ nagy (azaz $q^2 - q$ közelében van), akkor viszont egy Baer-részsíkot kell vennünk, azaz a legkisebb méret $q^2 + q + 1$.

Az előadás ezt a problémát járja körük. Az eredmények Aart Blokhuis-szal és Leo Storme-val közösek.

# Relative blocking sets for the union of disjoint Baer subplanes

6 October 2017

**Tamás Szőnyi**

ELTE, Budapest, Hungary

In a Galois plane of order $q^2$, consider the incidence structure formed by the points and lines of $t$ disjoint Baer-subplanes. We are looking for the smallest blocking sets in this structure. For small $t$, they are unions of $t$ Baer-sublines (one in each Baer subplane), hence they consist of $t(q+1)$ points. For large $t$ (close to $q^2 - q$), we have to take a Baer-subplane, hence the smallest size is $q^2 + q + 1$.

In our lecture we present recent results on this problem, obtained with Aart Blokhuis and Leo Storme.

# A duális Minkowski problémáról

2017. október 6.

ifj. **Böröczky Károly**
ELTE, Budapest, Magyarország

A klasszikus Minkowski probléma adott felületi mértékű konvex testet kíván megtalálni. Több évtizedes fejlődést megkoronázva Lutwak, Yang, Zhang a múltévben találta meg a felületi mérték duálisának megfelelő fogalmat, az úgynevezett $L_p$-duális $q$-adik görbületi mértéket valós $p, q$ paraméterekkel. Az ehhez tartozó Minkowski problémát, ami egy Monge–Ampere típusú PDE a gömbfelületen, Huang és Zhao már meg is oldotta a $p > 0$ és $q < 0$ esetet. Az előadásban a $p > 1$ és $q > 0$ különböző $p, q$-ra eset megoldását ismertetem.

Az előadás Fodor Ferenccel közös eredményeken alapszik.

# About the dual Minkowski problem

6 October 2017

**Károly Böröczky** sr.
ELTE, Budapest, Hungary

The classical Minkowski problem asks for the existence of a convex body with prescribed surface area measure. After several decades of progress, recently Lutwak, Yang, Zhang found the right generalization of a dual notion to the the surface area measure which is called $L_p$ dual $q$th curvature measure for real numbers $p$ and $q$. The corresponding dual Minkowski problem, which is in fact a Monge-Ampere type PDE on the sphere, has been solved if $p > 0$ and $q < 0$ by Huang and Zhao. We present the solution if $p > 1$ and $q > 0$ for different $p$ and $q$.

This talk is based on joint work with Ferenc Fodor.

# Két probléma az ellipszoidról

2017. október 6.

**G. Horváth Ákos**

BME, Budapest, Magyarország

Két olyan legendás problémát szeretnénk megvizsgálni, amelyeket a tizenkilencedik században megoldottak, de az akkor használt speciális módszerek a legtöbb mai matematikus számára többé-kevésbé ismeretlenek. Az ábrázoló geometriában jártas kollégák számára a Rytz-szerkesztés nyilván jól ismert. Azonban kevesen tudják, hogy a tizenkilencedik század első felében Chasles (lásd [1]) adott egy szerkesztést az analóg térbeli probléma megoldására. Erre a megoldásra egyedül Salmon analitikus geometria könyvében találtam egy leírást (lásd [2]). Hasonlóan érdekes feladat az ellipszoid Staude-féle drót szerkesztése (lásd [3]), melyre szintén nehéz az eredetitől különböző bizonyítást találni. Az előadásban a megoldások eredeti módszereit vizsgáljuk meg.

# Two problems on ellipsoids

6 October 2017

**Ákos G. Horváth**

BME, Budapest, Hungary

We investigate two legendary problems which solved with such special methods in the nineteens century which more or less forgotten for today's mathematician. The construction of Rytz is known every mathematics who learned descriptive geometry. It is less well-known that in the first half of the nineteens century Chasles (see in [1]) gave a construction in space to the analogous problem. The only reference in English (is found by me) has in an old book written by Salmon (see in [2]) on the analytic geometry of the three-dimensional space. Another result the so-called wire construction of ellipsoid by Staude (see in [3]) which is similarly difficult to access. In this talk we investigate the original methods of proofs.

## References

[1] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie,* Hayez, Bruxelles, 1837. https://archive.org/details/aperuhistorique01chasgoog

[2] G. Salmon, *A treatise on the analytic geometry of three dimension,* (Fourth Edition) Hodges, Figgis and Co., 1882.

[3] O. Staude, *Die Focaleigenschaften Der Flachen Zweiter Ordnung,* Leipzig, Teubner, 1896.

# Konstans görbületű síkprojektív Randers-felületek holonómia csoportjainak klasszifikációja

2017. október 6.

**Muzsnay Zoltán**

Debrecen, Magyarország

A Riemann- illetve Finsler-terek holonómia-csoportja a zárt görbék mentén vett párhuzamos eltolások által generált csoport. A Riemann-féle holonómia-csoportokat igen alaposan tanulmányozták és mára ezek teljes klasszifikációja ismert. A Finsler-sokaságok holonómiatulajdonságairól egyelőre keveset tudunk, de az az eddigi vizsgálatokból is kiderült, hogy ezen sokaságok holonómia-tulajdonságai nagyon eltérhetnek a Riemann-terek holonómia-tulajdonságaitól.

Ebben az előadásban a Zermelo navigációs problémából (is) származtatható Finsler-terek, az úgynevezett Randers-terek holonómiáját vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a konstans görbületű síkprojektív Randers-sokaság holonómia-csoportja pontosan akkor véges dimenziós Lie csoport, ha a görbület zérus, vagy ha a tér Riemann-típusú. Meghatározzuk továbbá az egyszeresen összefüggő konstans görbületű síkprojektív Randers-felületek lehetséges holonómiacsoportjait. Megmutatjuk, hogy a nemzérus, konstans görbületű síkprojektív nem Riemann-féle Randers-felületek holonómia-csoportjának lezártja izomorf a kör irányítástartó diffeomorfizmuscsoportjával.

Az előadás a Nagy Péterrel (Óbudai Egyetem) és Hubicska Balázzsal (Debreceni Egyetem) végzett közös kutatás eredményein alapul.

# Classification of the holonomy groups of projectively flat Randers two-manifolds of constant curvature

6 October 2017

**Zoltán Muzsnay**

Debrecen, Hungary

The holonomy group of a Riemannian or Finslerian manifold can be introduced in a very natural way: it is the group generated by parallel translations along loops. The Riemannian holonomy groups have been extensively studied and by now, their complete classification is known. The holonomy properties of the Finsler spaces, however, can be essentially different from the Riemannian ones, as recent results show.

In this talk, we consider the case of Randers manifolds, which can be considered as the solutions of the Zermelo's navigation problem. We show that the holonomy group of a simply connected locally projectively flat Randers manifold of constant curvature is a finite dimensional Lie group if and only if it is flat or it is Riemannian. Moreover, we determine the holonomy groups of simply connected projectively flat Randers two-manifolds of constant curvature. In particular, we show that the holonomy group of a non-Riemannian projective Finsler manifold of non-zero constant curvature is maximal and its closure is diffeomorphic to the orientation preserving diffeomorphism group of the circle.

The talk is based on joint work with Péter Nagy (Óbuda University) and Balázs Hubicska (University of Debrecen).

# A harmonikus terek néhány jellemzése

2017. október 6.

**Csikós Balázs**

ELTE, Budapest, Magyarország

E. T. Copson és H. S. Ruse 1940-ben bevezetett definíciója szerint egy harmonikus tér egy olyan Riemann-sokaság, melyre minden pont egy kilyukasztott kis környezetében megadható egy nem konstans radiális harmonikus függvény.

Ismert, hogy egy harmonikus térben két kis geodetikus gömb metszetének térfogata csak a gömbök sugarától és középpontjaik távolságától függ. Bebizonyítottuk, hogy egy harmonikus térben egy egyszerű ív körüli kis sugarú cső térfogata, illetve a csőszerű hiperfelület felszíne, teljes középgörbülete, valamint teljes skalárgörbülete csak az egyszerű ív hosszától és a cső sugarától függ. Megmutatjuk, hogy ezen tulajdonságok mindegyike jellemzi a harmonikus tereket már akkor is, ha a gömbök metszetére vonatkozó feltételt csak egyforma sugarú gömbökre, a csövekre vonatkozó feltételeket pedig csak geodetikus szakaszok körüli csövekre követeljük meg.

Az előadás a Horváth Mártonnal végzett közös kutatás eredményein alapul.

# Some characterizations of harmonic spaces

6 October 2017

**Balázs Csikós**

ELTE, Budapest, Hungary

E. T. Copson and H. S. Ruse defined harmonic manifolds in 1940 as Riemannian manifolds admitting a non-constant radial harmonic function in a small punctured neighborhood of any point.

It is known that in a harmonic space, the volume of the intersection of two small geodesic balls depends only on the radii of the balls and the distance between their centers. We proved that the volume of a tube of small radius about a simple arc in a harmonic space, as well as the surface, the total mean curvature and the total scalar curvature of the tubular hypersurface depend only on the length of the arc and the radius of the tube. We show that each of these properties characterize harmonic spaces even if we require the condition for the intersection of balls only for balls of equal radii, and the conditions on tubes only for tubes about geodesic segments.

The talk is based on joint work with Márton Horváth.

# Véges konvex geometriák reprezentációja „szép” konvex halmazokkal

2017. október 6.

**Kincses János**

Szeged, Magyarország

Az utóbbi időben, meglepő módon, algebristák kezdték vizsgálni konvex geometriák reprezentációját konvex halmazokkal. Richter és Rogers belátták, hogy konvex sokszögekkel reprezentálható minden konvex geometria. Ezt a konstrukciót általánosítva kiderítjük, hogy nagy szabadságunk van a reprezentáló halmazok választásában. Egy Erdős–Szekeres-féle akadályt mutatunk a körökkel vagy ellipszisekkel való reprezentálhatóságra. Belátjuk továbbá, hogy nem korlátozhatjuk a reprezentáló halmazok közös érintőinek számát. Magasabb dimenzióban belátjuk, hogy minden konvex geometria reprezentálható ellipszoidokkal.

# On the representation of finite convex geometries with “nice” convex sets

6 October 2017

**János Kincses**

Szeged, Hungary

Recently algebraists started to investigate the represetation of convex geometries with convex sets. Richter and Rogers proved that any convex geometry can be represented by a family of convex polygons in the plane. We shall generalize their construction and obtain a wide variety of convex shapes for representing convex geometries. We present an Erdős–Szekeres-type obstruction for representing with circles or ellipses. Moreover, we shall prove that one cannot even bound the number of common supporting lines of the pairs of the representing convex sets. In higher dimensions we prove that all convex geometries can be represented with ellipsoids.

# Feloldható konfigurációk

2017. október 6.

**Gévay Gábor**
Szeged, Magyarország

Bevezetünk egy új konfiguráció-osztályt: egy $(v_r, b_k)$ konfigurációt *feloldható konfigurációnak* nevezünk, ha blokkjai $r$ számú színnel színezhetők úgy, hogy minden színosztályon belül a blokkok particionálják a konfiguráció ponthalmazát. A feloldható konfiguráció fogalma a *feloldható blokkrendszer* fogalmának általánosítása.

Egy $\mathcal{C}$ feloldható konfigurációnak a duálisa csak akkor feloldható, ha $\mathcal{C}$ nem blokkrendszer. Bevezetjük feloldható konfiguráció *transzponáltját* is, amely mindig feloldható. A duális leképezés és a transzponálás kombinálásával egy feloldható konfigurációhoz öt különböző típusú konfigurációt rendelhetünk hozzá.

Megadunk geometriai példákat feloldható konfigurációkra (egyebek között, végtelen sorozatokat is).

# Resolvable configurations

6 October 2017

**Gábor Gévay**
Szeged, Hungary

We introduce a new class of configurations: a $(v_r, b_k)$ configuration is called a *resolvable configuration* if its blocks can be coloured in such a way that within each colour class, the blocks partition the set of points of the configuration. The notion of a resolvable configuration is a generalization of the notion of a *resolvable block design*.

Given a resolvable configuration $\mathcal{C}$, its dual is resolvable only if $\mathcal{C}$ is not a block design. We also introduce the *transpose* of a resolvable configuration, which is always resolvable. By combining the dual map and the transposition, one may obtain configurations of five different types from a resolvable configuration.

We present geometric examples of resolvable configurations (among them, infinite series).

# Hilbert-geometriák Euklidészi tulajdonságokkal

2017. október 6.

**Kozma József**

Szeged, Magyarország

Célunk a hiperbolikus geometria jellemzése a Hilbert-geometriák között olyan geometriai konfigurációk vizsgálatával, amelyek jól ismertek az euklideszi geometriában.

Bemutatjuk, hogy egy Hilbert-geometria akkor és csak akkor hiperbolikus, ha a következő feltételek legalább egyike teljesül:

- Minden háromszögre teljesül a Ceva-tétel;
- Minden háromszögre teljesül a Menelaosz-tétel;
- Minden háromszög magasságvonalai egy pontra illeszkednek;
- Minden háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontra illeszkednek.

# Hilbert geometries with Euclidean properties

6 October 2017

**József Kozma**

Szeged, Hungary

Our aim is to characterize hyperbolic geometry among Hilbert geometries via investigation of geometric configurations well-known in Euclidean geometry.

We show that a Hilbert geometry is hyperbolic if and only if any of the following conditions fulfills:

- Theorem of Ceva holds true for every triangle;
- Theorem of Menelaus holds true for every triangle;
- The altitudes of every triangle are concurrent;
- The bysectors of every triangle are concurrent.

# Kvadratikus projektív metrikák

2017. október 6.

**Kurusa Árpád**

Szeged, Magyarország

A projektív metrikák jellemzője, hogy a lineáris szakaszok pontjaira a végpontoktól mért távolságok összege éppen a végpontok távolsága.

Felvetődik a kérdés, hogy a kvadratikus görbéket is karakterizálja e, hogy pontjainak két fix ponttól mért távolságait összeadva egy állandót kapunk:

*Mely projektív metrikákra teljesül, hogy ellipsziseinek valamely csoportja kvadratikus?*

Az ilyen projektív metrikákat kvadratikusnak hívjuk, és az a sejtés [3], hogy

*pontosan a konstans görbületű projektív metrikák kvadratikusak.*

A sejtést korábban csak *Beltrami* 1865-ös tétele [1] és *Busemann* 1953-as tétele [2, 25.4] támasztotta alá. Ezek azt állítják, hogy *ha egy projektív metrika Riemann-féle, vagyis minden „infinitezimális" gömbfelülete kvadratikus, akkor konstans görbületű*, illetve *egy Minkowski-metrika akkor és csak akkor euklidészi, ha egy gömbfelülete kvadratikus.*

A poszter a sejtés hátterét és az azt alátámasztó néhány eredményemet [3] mutatja be.

# Quadratic projective metrics

6 October 2017

**Árpád Kurusa**

Szeged, Hungary

Projective metrics have the property that the distances of any point of any linear segment from the endpoints sum up to a constant, the distance of the endpoints.

The question arises if the quadratic curves has a similar property, namely, the distances of any point of a quadratic curve from two fixed points sum up to a constant, bigger than the distance of the fixed points:

*What kind of projective metrics fulfills, that a proper set of its ellipses are quadratic?*

Such projective metrics are called quadratic, and there is a conjecture [3], that

*exactly the projective metrics of constant curvature are quadratic.*

Previously only *Beltrami*'s theorem from 1865 [1] and *Busemann*'s theorem from 1953 [2, 25.4] supported the conjecture. These theorems state respectively that *if a projective metric is Riemannian, i.e. every "infinitesimal" sphere is quadratic, than it is of constant curvature*, and *a sphere of a Minkowski-metric is quadratic if and only if the metric is Euclidean.*

This poster describes the background of the conjecture and presents some supporting new results [3].

## References

[1] E. Beltrami, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette, *Opere*, **I** (1865), 262–280.

[2] H. Busemann and P. J. Kelly, *Projective Geometries and Projective Metrics,* Academic Press, New York, 1953.

[3] Á. Kurusa, Projective metrics with quadratic ellipses, *manuscript*, (2016), submitted.

# Szakaszok takarási függvénye

2017. október 6.

**Lukács Péter**

Szeged, Magyarország

A geometriai tomográfia egyik új fogalma, a *takarási szám* a látószög általánosítása. Síkban, egy szakaszok és konvex zárt görbék által alkotott halmaz takarási száma egy adott pontban nem más, mint a halmazban szereplő alakzatok látószögeinek összege. A *takarási függvény* a sík minden pontjában megadja a takarási számot.

Megmutatjuk, hogy közös végpont nélküli két zárt szakasz takarási függvénye a szakaszokat körülvevő bármely $\mathcal{C}$ körön akkor és csak akkor szimmetrikus egy, a $\mathcal{C}$ kör középpontján áthaladó $\sigma$ egyenesre, ha a szakaszok egymás tükörképei a $\sigma$ egyenesre nézve.

# Masking function of segments

6 October 2017

**Péter Lukács**

Szeged, Hungary

A new concept of geometric tomography, the *masking number* is the generalization of the angle of view. The masking number of a set consisting of segments and convex closed curves at a given point in the plane is the sum of the angles the shapes in the set subtend. The *masking function* gives at every point of plane the masking number.

We show that the masking function of two segments having no common endpoints restricted to a circle $\mathcal{C}$ surrounding the segments is symmetric to a straight line $\sigma$ passing through the center of $\mathcal{C}$ if and only if the segments are placed reflected in $\sigma$.

## Absztrakt unitálok osztályozása számítógépes módszerekkel

2017. október 6.

**Mezőfi Dávid**

Szeged, Magyarország

Absztrakt unitálok beágyazhatósága véges (klasszikus vagy nem klasszikus) projektív síkokba a véges geometria régóta vizsgált kérdésköre. Harmad és negyedrendű unitálok ismert osztályaira számítógépes módszerrel végzünk vizsgálatokat a belső szimmetriáik és más hozzájuk kapcsolódó permutációcsoportok felhasználásával. Néhány nem-beágyazhatósági eredményt kapunk.

## Classification of abstract unitals by computation methods

6 October 2017

**Dávid Mezőfi**

Szeged, Hungary

The embeddings of abstract unitals in (classical or non-classical) finite projective planes is a well studied question of finite geometry. We make computer assisted analysis for known classes of unitals of order 3 and 4, concerning their inner symmetries and other related permutation groups. We obtain some non-embeddability results.

# Diszkrét geometria Thurston terekben

2017. október 6.

**Molnár Emil** és **Szirmai Jenő**

BME, Budapest, Magyarország

A diszkrét geometria problémái, eredményei általában az $n$-dimenziós állandó görbületű geometriákra $\mathbf{E}^n$, $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{S}^n$ $(n \geq 2)$ korlátozódnak és ezek közül az egyik a klasszikus gömbelhelyezési illetve fedési problémakör. A kérdéskör klasszikus eredményei többek között Fejes Tóth L., id. Böröczky K., Florian A., Fejes Tóth G., Roger C., Hales T., Molnár J., Heppes A. munkásságához tartoznak. Azonban sok nyitott kérdés is megválaszolásra vár a témával kapcsolatban.

Ezek közül a hiperbolikus terek klasszikus gömbjeivel, horoszféráival illetve hiperszféráival kapcsolatos kérdéseket vizsgálták a szerzők többek között a [3], [9], [10], [4], [7], [13] and [14] munkáikban. Ezekben több új jelenségre is fény derült és ezen kérdések is megoldásra várnak, így az $n$-dimenziós állandó görbületű terekben se zárult le a gömbkitöltések és fedések vizsgálata.

Általában a diszkrét geometriai problémák átfogalmazhatók a 3-dimenziós maximális homogén Riemann terekre a Thurston geometriákra is, így a gömbelhelyezések és fedések témaköre is. Ezt az tette lehetővé, hogy a Thurston geometriák modellezhetők a 3-dimenziós projektív térben $\mathcal{P}^3(\mathbf{V}^4, \boldsymbol{V}_4, \mathbf{R})$ (lásd [6]) így az egzotikus $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$, $\mathbf{Nil}$, $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$, $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$, $\mathbf{Sol}$, geometriákban is tárgyalhatóvá váltak a diszkrét kérdések (lásd például [11], [12], [16], [8]). Többek között találtunk egy nagyon sűrű gömbkitöltést az $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ térben, amely sejtésünk szerint a legsűrűbb a Thurston geometriákban. Természetesen a hiperbolikus geometriához hasonlóan itt is kritikus a sűrűség definíciója. Az eddigi legsűrűbb gömbkitöltés $\approx 0.85327613$ sűrűséggel a hiperbolikus térben realizálódott a most talált konfiguráció sűrűsége $\approx 0.87499429$ (lásd [15]). További érdekesség, hogy a $\mathbf{Nil}$ geometriában a legsűrűbb rácsszerű gömbkitöltés sűrűsége meghaladja az euklideszi legsűrűbb gömbelrendezését és a konfiguráció érintési száma 14 ([11]). Ennek a kövezésnek Dirichlet–Voronoi celláját is bemutatjuk.

# Discrete geometry in Thurston spaces

6 October 2017

**Emil Molnár** and **Jenő Szirmai**

BME, Budapest, Hungary

In mathematics sphere packing problems concern the arrangements of non-overlapping equal spheres which fill a space. Usually the space involved is the three-dimensional Euclidean space. However, ball (sphere) packing problems can be generalized to the other 3-dimensional Thurston geometries.

In an $n$-dimensional space of constant curvature $\mathbf{E}^n$, $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{S}^n$ $(n \geq 2)$ let $d_n(r)$ be the density of $n+1$ spheres of radius $r$ mutually touching one another with respect to the simplex spanned by the centres of the spheres. L. Fejes Tóth and H. S. M. Coxeter conjectured that in an $n$-dimensional space of constant curvature the density of packing spheres of radius $r$ can not exceed $d_n(r)$. This conjecture has been proved by C. Roger in the Euclidean space ([5]). The 2-dimensional case has been solved by L. Fejes Tóth. In an 3-dimensional space of constant curvature the problem has been investigated by Böröczky and Florian in [2] and it has been studied by K. Böröczky in [1] for $n$-dimensional space of constant curvature $(n \geq 4)$.

In [3], [9], [10], [4], [7], [13] and [14] we have studied some new aspects of the ball, horoball and hyperball packings in $\mathbf{H}^n$ and we have realized that the ball, horoball and hyperball packing problems are not settled yet in the $n$-dimensional $(n \geq 3)$ hyperbolic space.

One of our aim in this topic to generalize the above problem of finding the densest geodesic and translation ball (or sphere) packing to the other 3-dimensional homogeneous geometries

(Thurston geometries) $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$, **Nil**, $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$, $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$, **Sol**, (see e.g. [11], [12], [16], [8]). We describe a candidate of the densest geodesic and translation ball arrangement. The greatest density until now is $\approx 0.85327613$ whose horoball arrangement is realized in the hyperbolic space $\mathbf{H}^3$. Here we show a geodesic ball arrangement in $\mathbf{S}^2\times\mathbf{R}$ geometry whose density is $\approx 0.87499429$ (see [15]).

We will use the unified interpretation of the Thurston geometries in the projective 3-sphere $\mathcal{PS}^3(\mathbf{V}^4, \boldsymbol{V}_4, \mathbf{R})$ introduced in [6].

## References


[1] Böröczky, K. Packing of spheres in spaces of constant curvature, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **32 (1978),** 243–261.

[2] Böröczky, K. – Florian, A. Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15** (1964), 237–245.

[3] Kozma, T. R. - Szirmai, J. Optimally dense packings for fully asymptotic Coxeter tilings by horoballs of different types, *Monatshefte für Mathematik*, **168,** (2012), 27-47, DOI: 10.1007/s00605-012-0393-x.

[4] Kozma, T. R. - Szirmai, J. New Lower Bound for the Optimal Ball Packing Density of Hyperbolic 4-space, *Discrete and Computational Geometry*, **53,** (2015), 182-198, DOI: 10.1007/s00454-014-9634-1.

[5] Fejes Tóth, G. - Kuperberg, G. - Kuperberg, W. Highly Saturated Packings and Reduced Coverings, *Monatsh. Math.*, **125/2** (1998), 127–145.

[6] Molnár, E. The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beitr. Algebra Geom.* **38** (1997), No. 2, 261–288.

[7] Molnár, E., Szirmai, J. Top dense hyperbolic ball packings and coverings for complete Coxeter orthoscheme groups, *Submitted manuscript,*, (2017).

[8] Molnár, E. - Szirmai, J. - Vesnin, A. The optimal packings by translation balls in $\widetilde{\mathbf{SL_2R}}$. *Journal of Geometry* (2014) **105 (2)**, (2014) 287–306, DOI: 10.1007/s00022-013-0207-x.

[9] Szirmai, J. Horoball packings and their densities by generalized simplicial density function in the hyperbolic space. *Acta Mathematica Hungarica.* **136/1-2**, (2012), 39–55, DOI: 10.1007/s10474-012-0205-8.

[10] Szirmai, J. Horoball packings to the totally asymptotic regular simplex in the hyperbolic $n$-space. *Aequationes Mathematicae.* **85**, (2013), 471–482, DOI: 10.1007/s00010-012-0158-6.

[11] Szirmai, J. The densest geodesic ball packing by a type of **Nil** lattices. *Beitr. Algebra Geom.* **48** No. 2, (2007), 383–398.

[12] Szirmai, J. The densest translation ball packing by fundamental lattices in **Sol** space. *Beitr. Algebra Geom.* **51** No. 2, (2010), 353–373.

[13] Szirmai, J. Packings with horo- and hyperballs generated by simple frustum orthoschemes, *Acta Math. Hung.,* **152 (2)** (2017), 365-382, DOI:10.1007/s10474-017-0728-0.

[14] Szirmai, J. Density upper bound for congruent and non-congruent hyperball packings generated by truncated regular simplex tilings, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2),* (2017), DOI: 10.1007/s12215-017-0316-8.

[15] Szirmai, J. A candidate for the densest packing with equal balls in Thurston geometries, *Beitr. Algebra Geom.* **55/2**, (2014) 441–452, DOI:10.1007/s13366-013-0158-2.

[16] Szirmai, J. Geodesic ball packings in $\mathbf{H}^2\times\mathbf{R}$ space for generalized Coxeter space groups. *Mathematical Communications.* **17/1**, (2012), 151-170.

# A képakasztó játék

2017. október 6.

**Vígh Viktor**

Szeged, Magyarország

A. Spivak 1997-ben publikálta a következő feladatot: akasszunk fel egy festményt a falra kettő szögre úgy, hogy a szögek közül bármelyiket kihúzva a festmény essen le. A probléma kettő helyett $n$ szögre is kitűzhető, az így kapott feladat a szórakoztató matematika művelői („puzzle community") köreiben gyors népszerűségre tett szert. Nem túlságosan bonyolult olyan rekurzív algoritmust adni, amely a feladatot $O(n^2)$ hurkolással megoldja. Másrészről a megoldáshoz szükséges hurkolások számára a legjobb ismert alsó korlát $\Omega(n2^{\sqrt{\log n}})$, Radoslav Fulek nem publikált eredménye. A poszteren összefoglaljuk a képakasztó játékról ismert eredményeket, és bemutatjuk a matematika egyéb területeihez való kapcsolatait.

# The picture hanging puzzle

6 October 2017

**Viktor Vígh**

Szeged, Hungary

In 1997 A. Spivak published the following "brainteaser": "[...] Dr. Smile hammered two nails (instead of one) into the wall. He says that he would the picture wire around these nails in such a way that the painting would fall if either the nail were pulled out. How did he do it?" This puzzle has since circulated around the puzzle community mainly for $n$ nails instead of just two. It is not very hard to find a recursive algortihm that solves the puzzle with $O(n^2)$ wrappings. On the other hand the best known lower bound for the number of necessary wrappings is $\Omega(n2^{\sqrt{\log n}})$ due to Radoslav Fulek (unpublished). On the poster we survey the known results about the picture hanging puzzle, and point out some connections to different areas in mathematics.

# Egyforma gömbi zónák elrendezéseinek multiplicitása

2017. október 6.

**Zarnócz Tamás**

Szeged, Magyarország

Tekintsünk egy $n$ zónából álló elrendezést az $S^{d-1}$ gömbfelületen, ahol zóna alatt a gömbfelületnek, és egy origóra szimmetrikus euklideszi sávnak a metszetét értjük. Megmutatjuk, hogy elég nagy $n$-re létezik $n$ egyforma szélességű zónából álló elrendezés úgy, hogy a gömbfelület semelyik pontja sem eleme több zónának, mint egy csak a dimenziótól és a zónák közös szélességétől függő konstans. Megmutatjuk továbbá, hogy az $S^{d-1}$ gömbfelület lefedhető $n$ zónával úgy, hogy minden pont legfeljebb $A_d \ln n$ zónának pontja, ahol az $A_d$ konstans csupán a dimenziótól függ. Ez Frankl, Nagy és Naszódi egy 2016-os 3 dimenziós eredményének általánosítása. Ezeken felül vizsgáljuk még $S^{d-1}$ egyformá zónákkal történő fedéseit azon feltétel mellett, hogy a gömbfelület minden pontja legfeljebb $d-1$ sávnak legyen belső pontja.

A poszter Bezdek Andrással, Fodor Ferenccel és Vígh Viktorral közös eredményeket mutat be.

# On the multiplicity of arrangements of equal zones on the sphere

6 October 2017

**Tamás Zarnócz**

Szeged, Hungary

Consider an arrangement of $n$ congruent zones on the $d$-dimensional unit sphere $S^{d-1}$, where a zone is the intersection of an origin symmetric Euclidean plank with $S^{d-1}$. We prove that, for sufficiently large $n$, it is possible to arrange $n$ equal zones of suitable width on $S^{d-1}$ such that no point belongs to more than a constant number of zones, where the constant depends only on the dimension and the width of the zones. Furthermore, we also show that it is possible to cover $S^{d-1}$ by $n$ equal zones such that each point of $S^{d-1}$ belongs to at most $A_d \ln n$ zones, where the $A_d$ is a constant that depends only on $d$. This extends the corresponding 3-dimensional result of Frankl, Nagy and Naszódi (2016). Moreover, we also examine coverings of $S^{d-1}$ with equal zones under the condition that each point of the sphere belongs to the interior of at most $d-1$ zones.

This poster presents joint results with András Bezdek, Ferenc Fodor and Viktor Vígh.