

A GEOMETRIA ALAPJAIRÓL

ELSŐ KÖTET

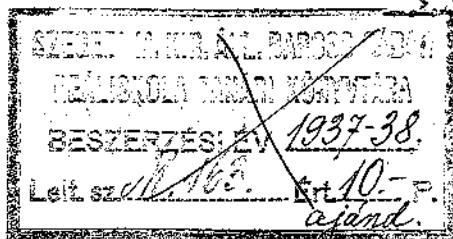
AZ EUKLIDESI GEOMETRIA ELEMI FELÉPÍTÉSE

ÍRTA

Dr. KERÉKJÁRTÓ BÉLA

EGYETEMI NY. R. TANÁR

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA L. TAGJA



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL



SZEGED, 1937

H. 10-

JAY, SZEGED
POLYAI INTÉZET KÖNYVTÁRA

kelt. sz. 1979 - 1095

~~2979~~
SZERZŐ KIADÁSA

Sajtóhibák.

- IX. o., 15. sor: „ pontnégyest “ helyett „ számnégyest “
78. o., 22. sor: „ $T(S(a))$ “ „ „ $T(S(A))$ “
107. o., alulról 7. sor: „ 'k “ „ „ k “
165. o., 23. sor: „ a D pont a C pontnak “ helyett „ a C pont a D pontna
280. o., 10. sor: „ $n.P^{\circ}O$ “ helyett „ $n.P^{\circ}E$ “

Előszó.

A geometria tudománya EUKLIDES korában s még azután is a klasszikus műveltség szerves részét alkotta; évszázadokon át ebből ismerték meg a tudományos rendszert, és tanulták meg a szigorúan logikus gondolkodást. A geometria tudományos jellege azóta sem változott meg, legfeljebb előnyére, s napjainkban mégis úgy tekintik, mint szükséges rosszat, melyet csak azért kell tanulni az általános műveltséget nyújtó középiskolában, mert érettségi tárgy. A geometria hitelét annak jobb oktatásával adhatjuk vissza; véleményem szerint kevesebb anyagot kellene tanítani, de azt sokkal elmélyülőbb, a logikai szempontokat jobban kidomborító módon. Ennek első feltétele pedig az, hogy maga a tanár alaposabban ismerje azt az anyagot, melyet előad.

A geometria alapjairól írt munkámmal azt a célt kívánom szolgálni, hogy a középiskolai tanár megismerje az általa a középiskolában tanított tételeknek a geometria tudományos rendszerében való helyét. A geometria alapjairól több éven át adtam elő a szegedi Ferencz József-Tudományegyetemen; általános összefoglalást adtam 6 előadásban, melyet a budapesti Tanárképző Intézet által a középiskolai tanárok továbbképzésére rendezett tanfolyamon tartottam. Látva azt az érdeklődést, mellyel a középiskolai tanárok és tanárjelöltek ezt a tárgyat s az erre vonatkozó előadásaimat fogadták, határoztam el magam jelen munkám megírására. A jelen kötetben s a később megjelenendő második kötetben a geometria megalapozására vonatkozó régebbi és újabb eredményeket foglalom össze.

Öszinte mély hálával tartozom a MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIÁNAK értékes támogatásáért, mellyel könyvem megjelenését lehetővé tette. Az anyagi segítségen felül számomra magas kitüntetést és erkölcsi sikert jelent az, hogy munkám a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával jelenhetik meg.

Öszinte hálával tartozom a nagyméltóságu VALLÁS- és KÖZOKTATÁSI MINISZTERIUMNAK azért az értékes támogatásáért, hogy

könyvem példányait a magyar állami középiskolák részére megrendelte s ezzel nem csak anyagilag támogatta könyvem megjelenését, hanem már eleve gondoskodott arról is, hogy könyvem eljusson ahhoz az olvasókörzöshöz, melyre munkám megírásakor elsősorban gondoltam. Ezért a megértő szíves támogatásért legmélyebb hálámat fejezem ki Dr. HÓMAN BÁLINT m. kir. titkos tanácsos, vallás- és közoktatásügyi m. kir. Miniszter úr Őexcellenciájának és Dr. SZILY KÁLMÁN m. kir. titkos tanácsos, vallás- és közoktatásügyi Államtitkár úr Őexcellenciájának.

Végül legőszintébb köszönetem fejezem ki kedves munkatársaimnak, kik önzetlen, értékes segítségükkel számomra megkönnyítették a könyv létrejöttét: Dr. KÁLMÁR LÁSZLÓ és Dr. LIPKA ISTVÁN egyetemi magántanár urak és Dr. ZÁNYI LÁSZLÓ kegyesrendi gimnáziumi tanár úr a korrektúra-olvasás során sok értékes tanácsukkal voltak segítségemre.

Szeged, 1937. május hó.

Kerékjártó Béla.

Tartalomjegyzék.

Bevezetés	Oldal VII.
---------------------	---------------

I. Összetartozási tételek.

1. §. Alapfogalmak és axiómák	1
2. §. Az összetartozás axiómái	1

II. Rendezési tételek.

3. §. A lineáris rendezés tételei	5
4. §. A sík rendezési tételei	10
5. §. Konvex sokszögek	16
6. §. A sík kettéosztása egyszerű sokszöggel	24
7. §. Egyszerű sokszög belsejének felosztása	31
8. §. Sugársor ciklikus rendezése	38
9. §. A tér rendezési tételei	45
10. §. Konvex poliéderek	53
11. §. A tér kettéosztása poliéderrel	66

III. Egybevágóság.

12. §. Szakaszok egyenlősége	72
13. §. Az egyenes eltolásai és tükrözései	77
14. §. Síkidomok egybevágósága	82
15. §. A sík tükrözései	87
16. §. Szögek egyenlősége	91
17. §. Háromszögek egybevágósága	97
18. §. Szögek egyenlőségére vonatkozó axiómák	107
19. §. A sík eltolásai és forgásai	114
20. §. A sík irányítása	119
21. §. A sík mozgásai	123
22. §. Síkbeli egyenes-seregek	126
23. §. Háromszögek nevezetes pontjai és vonalai	139
24. §. Körök és szabályos sokszögek	142
25. §. Egyenesek és síkok a térben	157
26. §. A tér kongruens leképezései	167
27. §. A tér irányítása	176
28. §. A tér mozgásai	184
29. §. Térbeli egyenes-nyalábok	189
30. §. Gömbök és szabályos poliéderek	195

IV. Párhuzamosság.

31. §. Az euklidesi párhuzamossági axioma	211
32. §. Háromszögek és négyszögek	213
33. §. Középponti és kerületi szögek	220
34. §. Arányos szakaszok	226
35. §. Szakaszok szorzása	239
36. §. Szakaszkoordináták a síkban	243
37. §. Párhuzamos egyenesek és síkok	248
38. §. Szakaszkoordináták a térben	252
39. §. Az euklidesi sík és tér mozgáscsoportja	255

V. Folytonosság.

40. §. Az egyenes folytonossága a lineáris rendezés alapján	262
41. §. A sík és a tér folytonossága a rendezés alapján	270
42. §. Az egyenes folytonossága szakaszok egyenlősége alapján	276
43. §. A sík és a tér folytonossága egybevágóság alapján	283
44. §. A tér folytonos mozgásai	293
45. §. Az axiomarendszer áttekintése	296
Irodalom	302
Tárgymutató	303

Bevezetés.

Axioma est propositio fide digna
quae negari non potest.

A geometria empirikus alapjai. A geometria empirikus alapját a merev testek mozgásainak vizsgálata képezi. Miután absztrakcióval eljutottunk a „pont” fogalmához, azt látjuk, hogy ha egy merev testet két pontban rögzítünk, a test összes még lehetséges mozgásainál bizonyos pontok helyükön maradnak; ezeknek az összessége egy „egyenest” alkot. Ha a testet egy egyenes két pontjában rögzítjük, az egyenes pontjai, és csakis ezek, helyükön maradnak; ezt úgy fejezzük ki, hogy bármely két pont meghatároz egy egyenest, s az egyenes bármely két pontja meghatározza ezt az egyenest.

A merev testet egy egyenese körül folytonosan forgatva, egy bizonyos forgásnál a test minden pontja visszatér eredeti helyére; ezt a forgást az illető egyenes körül való teljes forgásnak nevezzük. Olyan forgást, melynek kétszeri alkalmazása teljes forgást ad, félforgásnak neveztünk. Egy egyenes körül való félforgásnál bizonyos egyenesek önmagukba mennek át; ezeket az illető egyenesre merőleges egyeneseknek nevezzük.

Egy egyenes körül való teljes forgás folyamán bármely erre az egyenesre merőleges egyenes egy „síkot” ír le.

Az egyenesen a pontok elrendezése megfelel annak az időbeli sorrendnek, melyben egy az egyenesen haladó pont rajtuk átmegy.

A merev test fogalmából absztrakcióval jutunk el a geometriai idom fogalmához, amennyiben eltekintünk a test anyagától s csak az általa a térben elfoglalt helyet tekintjük. Két idomot egybevágónak neveztünk, ha az egyiket átvihetjük a másikba valamely mozgással (vagyis elmozdulással). Két egymás után alkalmazott mozgás helyettesíthető egy mozgással; ebből következik, hogy ha egy idom egy másikkal, s a másik egy harmadikkal egybevágó, akkor az első a harmadikkal egybevágó.

A *geometria rendszere*. Fent ismerteltük a geometria leg-egyszerűbb alapfogalmait, melyekhez tapasztalati úton eljuthatunk. Ezeknek alapján a geometria felépítése logikai módszerekkel történik.

Egy geometriai rendszer alapjait bizonyos *elemek*, ezek között fennálló *alapvető vonatkozások és alaptételek*, vagy *axiomák* képezik, melyek az elemek és az alapvető vonatkozások összefüggéseit, vagy kapcsolatait határozzák meg. Minden olyan tétel, melyet az alaptételekből logikai módszerekkel levezethetünk, a geometriai rendszerhez tartozik; ezt úgy fejezzük ki, hogy a geometria tételeinek összessége (logikailag) zárt rendszert alkot.

EUKLIDES Elemel. A geometria első rendszerbe foglalása EUKLIDES-től származik. EUKLIDES *Elemel* nemcsak a geometria fejlődésére hatottak még ma is érezhető módon, hanem példáját adták a szigorú tudományos gondolkodásnak, mintaképét egy tudományos rendszernek. Tagadhatatlan, hogy mai szemmel nézve, felmerülnek bizonyos kifogások az euklidesi tárgyalás ellen. Nem tekinthető hibának az, hogy EUKLIDES a pontnak, egyenesnek, síknak meghatározását adja; ezek csak aféle magyarázatok olyanok számára, kiknek nincs fogalmuk pontról, egyenesről, síkról. De a szigorúság mai követelményeivel nem egyeztethető össze az, hogy bizonyításaiban felhasznál olyan fogalmakat (mint például két idom egymásra helyezését), melyek nem vezethetők le axiómaiból. Ezért az euklidesi axiomarendszer bizonyos kiegészítésekre szorul, éppen úgy mint számos követője által adott tárgyalás.

A *geometria HILBERT-féle megalapozása*. PASCH, VERONESE és mások úttörő vizsgálatait után HILBERT-nek sikerült az euklidesi tárgyalást teljessé tenni. HILBERT tárgyalásának alapjai a következők: 1. elemek: a pontok, egyenesek és síkok; 2. alapvető vonatkozások: összetartozás, rendezés és egybevágóság. Alaptételeit, vagy axiómáit öt csoportba foglalja, melyek sorban az elemek összetartozására, a rendezésre, az egybevágóságra, a párhuzamosságra és a folytonosságra vonatkoznak.

Az axiomarendszer ellenmondástól való mentessége. A geometria rendszerére vonatkozó általános logikai követelmények közül a legfontosabb az, hogy a tételek rendszere ellenmondástól mentes legyen, vagyis hogy az alaptételekből levezetett tételek között ne

forduljon elő valamely tétellel együtt annak tagadása is. Ha ez a követelmény teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az axiomarendszer ellenmondástól mentes. A matematika megalapozására vonatkozó újabb vizsgálatok közvetlen módszereket adnak ugyan annak eldöntésére, vajjon egy axiomarendszer ellenmondástól mentes-e; de a következőben egy geometriai axiomarendszer ellenmondástól való mentességét nem közvetlenül, hanem olyan módon fogjuk igazolni, hogy megmutatjuk annak analitikus létezését. Erre a célra mintaképpül szolgál a DESCARTES-féle analitikus geometria.

A DESCARTES-féle analitikus geometria. A térgeometriának DESCARTESTÓL származó analitikus tárgyalásában ponton értünk bármely valós (x, y, z) számhármaszt; az x, y, z számokat az (x, y, z) pont koordinátáinak nevezzük. Az (x, y, z) és az (x', y', z') pontok akkor és csak akkor azonosak egymással, ha $x = x', y = y', z = z'$. Síkon értünk minden olyan (u, v, w, t) pontnégyest, melyben az u, v, w számok közül legalább az egyik zérustól különböző; az (u, v, w, t) és az (u', v', w', t') síkok akkor és csak akkor azonosak, ha létezik egy olyan zérustól különböző λ valós szám, melyre $u' = \lambda u, v' = \lambda v, w' = \lambda w, t' = \lambda t$. Az (x, y, z) pont akkor és csak akkor tartozik az (u, v, w, t) síkhoz, ha fennáll az $ux + vy + wz + t = 0$ egyenlőség. Ha az (u, v, w, t) és az (u', v', w', t') síkok különbözők, s ha az $(uv' - u'v), (vw' - v'w), (wu' - w'u)$ számok közül legalább az egyik zérustól különböző, akkor az $(u, v, w, t; u', v', w', t')$ számnegyolcas egy egyenest állít elő; az (x, y, z) pont akkor és csak akkor tartozik ehhez az egyeneshez, ha fennállanak az $ux + vy + wz + t = 0$ és $u'x + v'y + w'z + t' = 0$ egyenlőségek. Az $(U, V, W, T; U', V', W', T')$ számnegyolcas ugyanezt az egyenest állítja elő akkor és csakis akkor, ha léteznek olyan $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ valós számok, melyekre $U = \lambda u + \mu u', U' = \lambda' u + \mu' u'$, s hasonlóan a többi betűkre.

Az (x, y, z) és az (x', y', z') pontok távolságán értjük a

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

pozitív (vagy zérus) számértéket.

Ha $(x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')$ egy egyeneshez tartozó három pont, s ha fennáll az $x < x' < x''$, vagy az $x > x' > x''$ vonatkozás, akkor azt mondjuk, hogy az (x', y', z') pont a másik két pont között fekszik; hasonlóan, ha $x = x' = x''$, és $y < y' < y''$, vagy $y > y' > y''$, végül ha $x = x' = x''$, $y = y' = y''$ és $z < z' < z''$, vagy $z > z' > z''$.

Az euklidesi geometria analitikus modellje. Az euklidesi geometriának analitikus modellje, vagy megvalósítása a DESCARTES-féle analitikus geometria. A geometriai elemeknek (pontoknak, egyeneseknek, síkoknak) analitikus kifejezéseket (számhármasokat, négyeseket, nyolcasokat) feleltettünk meg; az elemek között fennálló vonatkozásoknak analitikus feltételek felelnek meg: például az, hogy egy pont egy síkhoz tartozik, azzal fejeződik ki, hogy koordinátáikra fennáll egy lineáris egyenlőség.

Az euklidesi geometria megalapozására felveendő axioma-rendszer ellenmondástól való mentességet olyan módon fogjuk igazolni, hogy az axiómákról megmutatjuk, hogy azok teljesülnek a DESCARTES-féle analitikus geometriában. Ennek a módszernek jogosultsága azon a feltevésen alapul, hogy az analízisben, illetve a valós számok aritmetikájában nincs ellenmondás.

Az a követelmény, hogy a felépítendő geometria ellenmondástól mentes legyen, az ellenmondásra vonatkozó logikai alapelvnek (principium contradictionis) felel meg.

Az axioma-rendszer teljessége. Az axioma-rendszerre vonatkozó további elvi követelmény, hogy az teljes, vagy kategorikus legyen; ez azt jelenti, hogy az axioma-rendszer a geometriai rendszert egyértelműen meghatározza; tehát bármely a geometriai rendszer fogalmaira vonatkozó állítás vagy maga, vagy ennek tagadása levezethető legyen a rendszer alapját képező axiómákból. Ez az elv a harmadik kizárására vonatkozó logikai alapelvnek (principium tertii exclusi) felel meg, s az analitikus modelleket illetően a következő feltétellel fejezhető ki: az axioma-rendszer által meghatározott geometriai rendszer bármely két analitikus modellje között létesíthető egy izomorf vonatkozás, azaz megfeleltethetjük a két modell elemeit egymásnak, s az alapvető vonatkozásokat egymásnak úgy, hogy ha bizonyos elemek között fennáll valamely vonatkozás, akkor az ezeknek megfelelő elemek között fennáll az illető vonatkozásnak megfelelő vonatkozás. (Ez alkalommal ismét áthárítottuk az analízisre a megfelelő nehézségeket.)

Az axiómák függetlensége. Az axioma-rendszerre vonatkozó további elvi követelmény az axiómák függetlensége. Logikai szempontból ez a legkevésbé fontos; ha ugyanis a rendszer axiómái nem függetlenek egymástól, ez nem hibája, csak szépséghibája az

axiomarendszernek ; ebben az esetben kevesebb axioma is elegendő a rendszer felépítéséhez. Az axiómák függetlenségét általában nem is lehet olyan szigorúsággal eldönteni, mint az ellenmondástól való mentességet, vagy a teljességet. — A rendszer egy axiómájának a többitől való függetlenségét így szokás igazolni : kihagyjuk az illető axiómát, s megszerkesztjük a többi axióma által értelmezett geometriának olyan modelljét, melyben a kérdéses axióma nem teljesül. Felmertülhet azonban, többek között, a következő nehézség : az illető axióma elhagyásával más axiómák értelmetlenné válnak, mivel azok éppen az ebben az axiómában leírt vonatkozásról adnak további felvilágosítást.

Az elvi megállapítással ellentétben a történeti fejlődés éppen az axiómák függetlenségére vonatkozó kérdésnek juttatta a legfontosabb szerepet. EUKLIDESTől kezdve a múlt század elejéig a geometria egyik legfontosabb feladatának tartották az euklidesi parallela-posztulátumnak a többi axiómákból való levezetését. A magyar tudomány dicsőségére, BOLYAI JÁNOSnak sikerült ezt a kérdést végérvényesen megoldani ; megmutatta, hogy az euklidesi parallela-posztulátum független a többi axiómáktól ; felépített egy olyan geometriai rendszert, melyben a parallela-posztulátumot egy annak ellentmondó axiómával helyettesítette, s megmutatta, hogy ez a geometriai rendszer (BOLYAI szavai szerint : egy új, más világ, melyet a semmiből teremtet) éppen olyan jogosult, mint az euklidesi. BOLYAI felfedezésével szinte egyidejűleg az orosz LOBACSEFSZKIJ jutott el ugyanennek a hiperbolikus nem-euklidesi geometriának a fogalmához és felépítéséhez. Majd RIEMANN vizsgálatai az elliptikus nem-euklidesi geometria felfedezésével egészítették ki a geometria alapjaira vonatkozó ismereteinket.

Az axiomarendszer egyszerűsége. A fenti általános logikai jellegű követelményeken kívül felmerül még egy követelmény axiómáinkat illetően ; ez az, hogy az alapul vett axiómák egyszerűek legyenek. Valamely rendszernek, mely ellenmondástól mentes és zárt rendszer, geometriai jellegét éppen az adja meg, hogy az elemek, az alapvető vonatkozások s az alaptételek szemléletünk tárgyainak s az ezek között fennálló szemléletes vonatkozásoknak közvetlenül felelnek meg. Erre vonatkozik a Bevezetés élén közölt latin idézet. Az alaptételeknek olyan „igazságoknak“ kell lenni, melyek a matematikailag nem művelt közönség számára maguktól érte-

tődnek. A geometria elemi felépítésénél ezt a szempontot kell mértékadónak tekintenünk.

A matematikailag művelt olvasó számára ismeretes a következő tényállás. Miheiyt egy rendszerről megismertük, hogy az ellennondástól mentes és zárt rendszer, annak axiomatikus felépítésére sok különböző mód adódhatik. A rendszerben szereplő fogalmak közül bizonyos elemeket, alapvető vonatkozásokat, és a tételek közül bizonyos alaptételeket választunk olyan módon, hogy a rendszerben szereplő összes fogalmakat ezeknek alapján értelmezhetjük, s a rendszer összes tételeit az alaptételekből logikai módszerekkel levezethetjük. Eszerint az euklidesi geometriának is nem egy, hanem sok különböző megalapozása létezik. — Például ahelyett, hogy elemekként a pontokat, egyeneseket és síkokat vesszük fel, felvehetnők elemekként a pontokat, értelmezniők a mozgásokat mint a tér pontjai között való megfeleltetéseket, s a mozgásokra vonatkozó axiomák alapján vezetnők be az egyenes és a sík fogalmát (úgy, mint a geometria empirikus alapjaira vonatkozó megjegyzéseinkben vázoltuk). A geometria ilyen megalapozásával a második kötetben foglalkozni fogunk; ez a tárgyalás azonban lényegesen különbözik az EUKLIDES óta szokásossá vált tárgyalástól.

A jelen kötetben adott tárgyalás főbb szempontjai. Tárgyalásunk alapjául a HILBERT-féle axiomarendszert vettük fel csekély módosításokkal. Megtartottuk az axiomáknak HILBERT-től származó csoportosítását is.

Az első fejezetben az elemek összetartozására vonatkozó axiomákat és tételeket vezetjük be. A második fejezetben az egyenesen a pontok elrendezésére vonatkozó axiomákat és tételeket; majd a sík és a tér rendezési tételeit tárgyaljuk. Ezek olyan jellegű tételek (nemcsak az axiomák, hanem az azokból levezetett tételek is), hogy mindenki magától értetődőnek tartaná őket, s mégis a legnagyobb zavarba kerülne, ha egyiknek, vagy másiknak szigorú levezetését kellene adni. Például az a tétel, hogy a síkot egy benne fekvő egyszerű zárt sokszög két részre osztja fel, nem „alapvető igazság“, hanem a sík rendezésére vonatkozó axioma alapján bebizonyítandó és bebizonyítható tétel. Az ilyen természetű tételeknek részletes és mégis lehetőleg egyszerű bebizonyításával foglalkozunk a második fejezetben. Súlyt helyeztünk arra itt is, úgy mint a továbbiakban is, hogy az egyenes geometriájára vonatkozó tételeket

az egyenesre vonatkozó axiómák alapján bizonyítsuk be; utóbb megjegyezzük, ha valamely a síkra, vagy a térre vonatkozó axiómából levezethető egy átmenetileg az egyenesre vonatkozóan felvett axióma.

A harmadik fejezet az egybevágóságra vonatkozó tételekkel foglalkozik. Az olvasó itt sok olyan tételt talál, melyet szokás szerint a párhuzamossági axióma felhasználásával bizonyítanak be. Az a körülmény, hogy az illető tételt, vagy annak módosítását a párhuzamossági axióma felhasználása nélkül bizonyítjuk be, felvilágosít arról, hogy az illető tétel, vagy annak módosítása a nem-euklidesi geometriában is érvényes. Ez a fejezet tehát az abszolút geometriának, vagyis a párhuzamossági axiómától független geometriának a tárgykörébe tartozik.

Az egybevágóság tárgyalásánál PASCH, VERONESE, MOLLERUP tárgyalásának, s főképen POINCARÉ kritikájának megfelelően egyedi alapfogalomként szakaszok egyenlőségét vezettem be. Ennek alapján értelmeztem a kongruens, azaz a távolságot megtartó leképezéseket, s vezettem be a szögek egyenlőségének a fogalmát. Ezzel lényegesen jobban megközelítettem az eredeti EUKLIDES-féle tárgyalást, mely ellen a legfőbb kifogás éppen az volt, hogy idomok egymásra helyezésének módszerét alkalmazza anélkül, hogy ez a módszer felvett axiómái által meg lenne alapozva. A síkidomok egybevágóságára vonatkozó axiómáink, melyek egyébként eleget tesznek a szemléletességre vonatkozó követelményeinknek is, lehetővé teszik az euklidesi módszernek szigorú megalapozását. — HILBERT tárgyalásában szakaszok egyenlőségén kívül szögek egyenlősége is alapfogalomként szerepel, s axiómaként a háromszögek első egybevágósági tétele. A mi tárgyalásunkban a háromszögek harmadik egybevágósági tétele (szemléletesen kifejezve: a háromszög merevsége) következik közvetlenül az axiómákból. Azt hiszem, hogy oktatási szempontból bizonyos előnyöket nyújt az általunk felvett axiómarendszer.

A negyedik fejezetben a párhuzamossági axiómát s ennek következményeit tárgyalom HILBERT nyomán. Az ötödik fejezetben a folytonosságra vonatkozó fogalmakat és alaptételeket fejtem ki.

HILBERT módszerét követve bebizonyítjuk, hogy az axiómarendszer ellenmondástól mentes, és teljes. Az axiómák függetlenségére nem helyeztünk súlyt. Ha sikerülne egy axiómát egy kevesebbet posztuláló (s esetleg mégis bonyolultabb) axiómával helyet-

tesíteni, s ezáltal nehézkessé tennők a tárgyalást, nem felelhetnénk meg a jelen kötet feladatának, mely abban áll, hogy a geometria legfontosabb elemi tételeit elemi módon vezessük le az axiómákból.

A később megjelenendő második kötetben fogunk foglalkozni a terület és térfogat fogalmával, valamelyest a geometriai szerkesztések elméletével, továbbá a projektív és a nem-euklidesi geometriákkal, azok megalapozásával. Ennek során az euklidesi geometria más, nem elemi megalapozását is fogjuk tárgyalni, s megvizsgáljuk azt a kérdést is, mely kevesebb alapfogalomra vonatkozó és kevesebb axiómából álló rendszer elegendő a geometria felépítéséhez; számolnunk kell azonban azzal, hogy egy ilyen redukált axiómarendszer alapján a geometria felépítése más, kevésbé elemi módszerekkel történik.

Megnyugtató szavak a túlságosan szigorú olvasóhoz. Eddig a kevésbé kritikus olvasó figyelmét akartam felhívni arra a szempontra, hogy egy geometriai tételt nem fogadhatunk el igaznak csupán szemléletünk alapján, hanem azt logikai módszerekkel kell az axiómákból levezetni. A szigorú logikai módszer alkalmazása céljából elvben leghelyesebb lett volna a szöveg minden mondatát megszámozni, hogy utalás alkalmával pontosan megjelölhessem azokat a mondatokat, melyekre hivatkozom. Némely állítás igazolásánál azonban egész sereg számot kellett volna felsorolnom, s mert nem akartam olvasóim munkáját megnehezíteni, csupán a tételeket számoztam meg, s az utalásoknál is csak azokra a tételekre hivatkozom, melyek az illető meggondolás szempontjából a leglényegesebbek. Eszerint egy ilyen kifejezés: „a 13. tételből következik, hogy . . .” nem azt jelenti, hogy az illető állítás kizárólag a 13. tételből következik, hanem azon kívül több olyan tételből és eredményből, melyek az olvasónak az illető szakasz olvasásakor úgyszólván tudatában vannak; a 13. tételre való hivatkozás felhívja az olvasó figyelmét egy olyan tényre, melyre esetleg magától nem gondolna, s amely nélkül a levezetés olyannak tűnhetnék, mintha az a naiv szemléleten és nem az axiómákon alapulna. A tételek számozása is csupán az utalások céljára szolgál, s nem áll arányban a tételek fontosságával. Az előadás célja tehát a jó megértés szerző és olvasó között. — Hasonló könnyedséggel siklottam át nyelvi kérdéseken is. Az első fejezetben például még megadtam az összes szinonimáit annak a kifejezésnek, hogy egy pont és egy

egyenes összetartoznak; de később mellőztem az ilyen csupán nyelvi értelmezéseket. Például ahelyett, hogy az A és B pontok által meghatározott szakasz egyenlő az A és C pontok által meghatározott szakasszal, röviden azt mondom, hogy az A pontnak a B és a C ponttól való távolsága egyenlő. De ha egy pontnak egy egyenestől, vagy egy síktól való távolságáról akarok beszélni, ahhoz már tárgyi és nem csak nyelvi értelmezésre van szükség.

A fentiek figyelembe vételével, azt hiszem, sikerült a felőlet anyag egyszerű és teljes tárgyalását megadni. Mivel könyvem első-sorban oktatási célokat szolgál, nem kell külön hangsúlyoznom, hogy olvasóimnak tárgyi megjegyzéseit szívesen fogadom, s kérdéseikre örömet adok felvilágosítást.

A könyv végén adott irodalmi jegyzékben a legfontosabb könyveket soroltam fel. A geometria megalapozásáról írt dolgozatok teljes jegyzéke egész kötetre rúgna.



1. Összetartozási tételek.

1. §. Alapfogalmak és axiómák.

Az euklidesi geometriának HILBERT-től származó megalapozásában a *pont*, az *egyenes* és a *sík* szerepelnek mint *alapelemek*; ezek között fennálló *vonatkozások*at fejezünk ki a következő szavakkal: „*összetartoznak*“, „*között*“ és „*egyenlő*“. A vonatkozásoknak pontos és a geometria megalapozása szempontjából teljes leírását adják az *alaptételek*, vagy *axiómák*, melyeknek felsorolásánál az eredeti HILBERT-féle csoportosítást és sorrendet megtartjuk. Az axiómák csoportjai a következők:

- I. Összetartozás axiómái.
- II. Rendezés axiómái.
- III. Egybevágóság axiómái.
- IV. Párhuzamosság axiómája.
- V. Folytonosság axiómái.

A pontok a *lineáris geometriának*, pontok és egyenesek a *síkgeometriának*, végül pontok, egyenesek és síkok a *térgeometriának* az elemei. A pontokat latin nagy betűkkel fogjuk jelölni ($A, B, C, \dots$), az egyeneseket latin kis betűkkel ($a, b, c, \dots$), a síkokat pedig görög kis betűkkel ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

2. §. Az összetartozás axiómái.

Az alapelemekre: pontokra, egyenesekre és síkokra vonatkozóan bizonyos vonatkozások állanak fenn, melyeket az „*összetartozik*“ szóval fejezünk ki. Bár ez az egy szó logikai szempontból elegendő lenne a pontok, egyenesek és síkok közt fennálló összetartozási vonatkozások leírására, mégis, csupán stilisztikai szempontból, kifejezéseink megkönnyítése céljából, alkalmazni fogunk több vele egyértelmű kifejezést. Így ahelyett, hogy az A pont és az a egyenes összetartoznak, azt is mondjuk, hogy az A pont az a egyeneshez tartozik, vagy az a egyenesen fekszik, vagy az a

egyenes pontja; az a egyenes az A ponthoz tartozik, vagy az A ponton átmegy. Hasonlóan, ha az A pont az α síkkal összetartozik, azt mondjuk, hogy az A pont az α síkhoz tartozik, vagy az α síkban fekszik, vagy az α sík pontja; az α sík ekkor az A ponthoz tartozik, vagy az A ponton átmegy. Ha az A és B pontok az a egyeneshez tartoznak, azt mondjuk, hogy a az A és B pontokat összeköti. Ha A az a egyeneshez és a b egyeneshez tartozik, azt mondjuk, hogy A az a és b egyenesek közös pontja, vagy hogy az a és b egyenesek az A pontban metszik egymást, s. i. b. Ha két vagy több elemről beszélünk, mindig feltesszük, hogy azok egymástól különböző elemek, kivéve ha az ellenkező lehetőséget kimondjuk. Az alapelemek összetartozására vonatkoznak a következő axiómák:

I. 1. Bármely egyeneshez legalább két pont tartozik.

I. 2. Bármely két ponthoz tartozik egy és csak egy egyenes. Az A és B pontokhoz tartozó egyenest AB egyenesnek fogjuk nevezni.

I. 3. Bármely síkhoz legalább három nem egy egyenesen fekvő pont tartozik.

I. 4. Bármely három nem egy egyenesen fekvő ponthoz tartozik egy és csak egy sík. Az A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontokhoz tartozó síkot ABC síknak fogjuk nevezni.

I. 5. Ha egy egyenes két pontja egy síkhoz tartozik, az egyenes minden pontja ehhez a síkhoz tartozik.

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az egyenes a síkhoz, a sík az egyeneshez tartozik, vagy az egyenes a síkban fekszik, a sík átmegy az egyenesen.

I. 6. Ha valamely pont két síkhoz tartozik, van legalább még egy olyan pont, mely mindkét síkhoz tartozik.

I. 7. Van legalább négy olyan pont, mely nem tartozik egy síkhoz.

Az I. 1 lineáris axióma, az I. 2—3 sík-axiómák, I. 4—7 tér-axiómák.

Az I. 6 axiómában foglaltatik az, hogy a tér legfeljebb háromdimenziós; az I. 7 axióma folytán a tér legalább háromdimenziós.

A fenti axiómarendszernek eleget tesz például a következő véges sok pontból, egyenesből és síkból álló rendszer:

4 pont: A, B, C, D ;

6 egyenes: AB, AC, AD, BC, BD, CD ;

4 sík: ABC, ABD, ACD, BCD .

Az A pont az AB, AC, AD egyenesekhez és az ABC, ABD, ACD síkokhoz tartozik, stb., az AB egyenes az ABC és ABD síkokhoz tartozik, stb.

A fenti I. 1—7 axiómák alapján bebizonyíthatjuk a következő két tételt:

1. tétel. *Két egyenesnek vagy egy közös pontja van, vagy egy sincs. — Két síknak vagy nincs közös pontja, vagy van egy közös egyenesük (mely mindkét síkhoz tartozik) s ezenkívül nincs más közös pontjuk. — Egy síknak és egy nem benne fekvő egyenesnek vagy egy közös pontja van, vagy egy sincs.*

Bizonyítás. Ha az egymástól különböző a és b egyeneseknek két közös pontja lenne, A és B , akkor az a és b egyenesek mindketten hozzátartoznának az A és B pontokhoz, ellentétben az I. 2 axiómával.

Ha α és β két sík, és A ezeknek közös pontja, azaz olyan pont, mely az α síkhoz és a β síkhoz tartozik, akkor az I. 6 axióma szerint van legalább még egy olyan B pont, mely mindkét síkhoz tartozik; az AB pontokon áthaladó egyenes az I. 5 axióma folytán az α síkhoz, s ugyancsak a β síkhoz tartozik; tehát az AB egyenes a két síknak közös egyenesé. Ha az egymástól különböző α és β síkoknak lenne olyan C közös pontja, mely nem tartozik az AB egyeneshez, akkor az A, B, C pontok az I. 2 axióma folytán nem fektüdnének egy egyenesen, viszont az α és β síkok mindketten hozzátartoznának az A, B, C pontokhoz az I. 4 axiómával ellentétben.

Ha α valamely sík, és a olyan egyenes, melynek két A és B pontja az α síkhoz tartozik, akkor az I. 5 axióma szerint az AB egyenes minden pontja az α síkhoz tartozik. Ha tehát az a egyenes nem fekszik az α síkban, akkor az a egyenesnek legfeljebb egy pontja tartozhatik az α síkhoz.

2. tétel. *Egy egyeneshez és egy nem rajta fekvő ponthoz, továbbá két egymást metsző egyeneshez tartozik egy és csak egy sík.*

Bizonyítás. Legyen a egy egyenes és A egy nem az a -n fekvő pont. Az I. 1 axióma szerint van a -n legalább két B és C pont; I. 4 szerint az A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontokhoz tartozik egy és csak egy α sík; mivel az a egyenes B és C pontjai az α síkhoz tartoznak, az I. 5 axióma szerint a BC egyenes az α síkban fekszik. Ha viszont β másik olyan sík volna, melyhez hozzá-

tartoznak az A pont és az a egyenes, akkor az A, B, C pontokhoz két különböző α és β sík tartoznék, ellentétben az I. 4. axiómával.

Ha a és b két egyenes, melyeknek C közös pontja, az I. 1. axióma szerint van a -nak és b -nek legalább egy-egy a C -től különböző A illetve B pontja; a nem egy egyenesen fekvő A, B, C pontokhoz az I. 4. axióma szerint tartozik egy és csak egy α sík; az I. 5. axióma szerint az $a = AC$ és a $b = BC$ egyenesek az α síkhoz tartoznak. Viszont ha β másik olyan sík volna, melyekhez az a és b egyenesek hozzátartoznak, akkor az A, B, C pontokhoz két különböző α és β sík tartoznék, ellentétben az I. 4. axiómával.

A fenti bizonyításokat teljes részletességgel adtuk. A következőkben fokozatosan összevontabb alakban fogjuk adni bizonyításainkat; természetes, hogy ezek az összevont bizonyítások is teljesek, azaz felbonthatók elemi meggondolásokra. Például nem fogjuk mindig a fenti I. 2. axiómát, vagy az 1. tételt idézni, mikor kimondjuk, hogy két ponton egy és csak egy egyenes megy át, vagy hogy két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.

A jelen axioma-rendszerben az I. csoport axiómái képezik a továbbiak alapját.

II. Rendezési tételek.

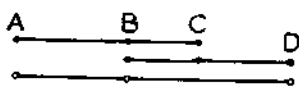
3. §. A lineáris rendezés tételei.

A második axiomasorozat axiómái a pontoknak az egyenesen és a síkon való elrendezésére vonatkoznak. Az egyenes pontjaira bizonyos rendezési vonatkozások állanak fenn, melyeket a „között” szóval fejezünk ki. Ha A, B, C egy egyenesen fekvő pontok, s ezek közül a B pont az A és C pontok között fekszik, akkor azt mondjuk, hogy ezekre a pontokra az ABC elrendezés áll fenn. Az egyenes pontjainak rendezési vonatkozásait írják le a következő axiómák.

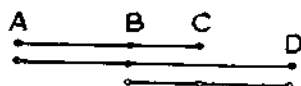
II. 1. Ha A, B, C egy egyenes három pontja, és B az A és C között fekszik, akkor B a C és A között fekszik; jelben: $ABC \rightarrow CBA$, amit így olvasunk: az ABC elrendezésből következik a CBA elrendezés.

II. 2. Ha A, B, C egy egyenes három különböző pontja, ezek közül egyik és csak egyik fekszik a másik kettő között; vagyis az ABC, BCA, CAB elrendezések közül egyik és csak egyik áll fenn. — Viszont, ha egy egyenes A, B, C pontjaira a nevezett három elrendezés közül valamelyik fennáll, akkor az A, B, C pontok egymástól különbözők.

II. a. Ha A, B, C, D egy egyenes pontjai, melyekre fennállnak az ABC és BCD elrendezések, akkor fennáll az ABD elrendezés. Jelben $ABC, BCD \rightarrow ABD$ (1. ábra).



1. ábra.



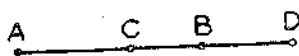
2. ábra.

II. b. Ha A, B, C, D egy egyenes pontjai, melyekre fennállnak az ABC és ABD elrendezések, akkor fennáll vagy a BCD , vagy a BDC elrendezés (2. ábra).

A fenti II. 1, 2, a, b axiómákat a *lineáris rendezés* általános axiómáinak nevezzük. Ha valamely összesség elemeire nézve fennállanak a II. 1, 2, a, b axiómáknak eleget tevő rendezési vonatkozások, az illető összességet lineárisan rendezettnek nevezzük.

Az egyenes pontjainak elrendezésére vonatkozóan még a következő két axiómát vezetjük be.

II. 3. Ha A és B az a egyenes két különböző pontja, van az a egyenesnek olyan D pontja, melyre az ABD elrendezés áll fenn (3. ábra).



3. ábra.

II. c. Ha A és B az a egyenes két különböző pontja, van az a egyenesnek olyan C pontja, melyre az ACB elrendezés áll fenn (3. ábra).

A II. 1, 2, a, b axiómák alapján be fogjuk bizonyítani a lineáris rendezésre vonatkozó következő 3., 4. és 5. tételeket.

3. tétel. Ha adva van egy egyenesnek négy különböző pontja, jelölhetők ezek A, B, C, D -vel olyan módon, hogy a következő elrendezések álljanak fenn: ABC, ABD, ACD, BCD . (Ha ez a négy elrendezés egyidejűleg fennáll, azt fogjuk mondani, hogy az adott négy pont elrendezése $ABCD$).

Bizonyítás. A tételt a következő lemmák segítségével bizonyítjuk be.

1. lemma. Ha ABC és ACD , akkor BCD . — Ellenkező esetben volna CDB , vagy DBC (II. 2). Ha CDB , akkor: $ACD, CDB \rightarrow ACB$ (II. a), ami ellentmond az ABC feltételnek (II. 2). — Ha DBC , akkor a CBD és CBA elrendezésekből következne BDA , vagy BAD (II. b); az első esetben: $ADB, DBC \rightarrow ADC$ (II. a) ellentétben az ACD feltétellel; a második esetben: $DAB, ABC \rightarrow DAC$ (II. a), szintén ellentétben az ACD feltétellel. (Ebben a megfontolásban s a továbbiakban is külön hivatkozás nélkül alkalmazzuk a II. 1 axiómát, mely szerint $ABC \rightarrow CBA$.)

2. lemma. Ha ABC és ACD , akkor ABD . — Az 1. lemma értelmében $ABC, ACD \rightarrow BCD$; II. a folytán $ABC, BCD \rightarrow ABD$.

Ha adva van egy egyenesnek négy pontja, jelöljük közülük hármat A, B, C -vel úgy, hogy B az A és C között legyen (II. 2). Jelöljük D -vel a negyedik pontot; ennek az A, B pontokkal való elrendezése vagy DAB , vagy ADB , vagy ABD (II. 2). — Ha DAB ,

akkor **II. a**-ból $DAB, ABC \rightarrow DAC$, és $CBA, BAD \rightarrow CBD$; tehát $DABC$. — Ha ADB , akkor az 1. és 2. lemma szerint $ADB, ABC \rightarrow DBC, ADC$; tehát $ADBC$. — Végül ha ABD , akkor **II. b** szerint vagy BCD , vagy BDC ; első esetben $DCB, CBA \rightarrow DCA$ (**II. a**), tehát $ABCD$; a második esetben $CDB, DBA \rightarrow CDA$ (**II. a**), tehát $ABDC$.

A 3. tétel fent adott bebizonyítása VEBLENTől származik.

A 3. tétel általánosítása n pont esetére a következő:

4. tétel. *Ha adva van egy egyenesnek n pontja, jelölhetőek ezek $A_1, A_2, \dots, A_n$ -nel olyan módon, hogy bármely három $i < j < k$ indexnek megfelelő pontok elrendezése $A_i A_j A_k$ legyen; az n pontnak ezt az elrendezését $A_1 A_2 \dots A_n$ -nel jelöljük.*

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk be. Feltesszük azt, hogy a tétel az n egész szám valamely értékénél érvényes s levezetjük ebből azt, hogy a tétel $n+1$ -re is érvényes; mivel pedig $n=1$ -re a tétel érvényes, tehát minden n -re is. (Mivel $n=1, 2, 3$ esetekben a tétel triviális, $n=4$ esetében pedig a 3. tétellel megegyezik, feltehetjük, hogy $n \geq 4$.) Legyen adva az egyenesen $n+1$ pont; ezek közül n -et $A_1, A_2, \dots, A_n$ -nel jelölünk olyan módon, hogy elrendezésük $A_1 A_2 \dots A_n$ legyen. Jelöljük A_0 -sal az $n+1$ -edik pontot. Az A_0, A_1, A_n pontok elrendezése vagy $A_0 A_1 A_n$, vagy $A_1 A_n A_0$ vagy $A_1 A_0 A_n$ (**II. 2**).

Az első esetben az $A_0 A_1 A_n$ és $A_1 A_2 \dots A_n$ feltételekből:

ha $1 < j < n$: $A_0 A_1 A_n, A_1 A_j A_n \rightarrow A_0 A_1 A_j, A_0 A_j A_n$ (1. és 2. lemma);

ha $1 < j < k$: $A_1 A_j A_k, A_0 A_1 A_j \rightarrow A_0 A_j A_k$ (**II. a**);

tehát: $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$.

Az $A_1 A_n A_0$ esetet az előbbire úgy vezetjük vissza, hogy az $(1, 2, \dots, n)$ indexek helyett rendre $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ -et teszünk.

Végül ha $A_1 A_0 A_n$, jelöljük p -vel a legkisebb olyan indexet, melyre az $A_1 A_0 A_p$ elrendezés áll fenn. Ha $1 < i < p$, akkor az A_1, A_i, A_0 pontok elrendezése $A_1 A_i A_0$; p megválasztása folytán nem állhat fenn ugyanis az $A_1 A_0 A_i$ elrendezés, mivel $i < p$; továbbá nem lehet $A_i A_1 A_0$, mivel az $A_i A_1 A_0$ és $A_1 A_0 A_p$ elrendezésekből **II. a** szerint következne $A_i A_1 A_p$, feltevésünkkel ellentétben. Ha $i < j < p$, akkor az $A_1 A_i A_j$ és $A_1 A_j A_0$ elrendezésekből az 1. lemma szerint következik $A_i A_j A_0$. Hasonlóan, ha $p < k$, akkor az $A_1 A_0 A_p$ és $A_1 A_p A_k$ elrendezésekből az 1. és 2. lemma szerint következik

$A_0 A_p A_k$ és $A_1 A_0 A_k$; továbbá, ha $p < k < l$, az $A_0 A_p A_k$ és $A_p A_k A_l$ elrendezésekből II. a szerint következik $A_0 A_k A_l$. Végül ha $i < p \leq k$, akkor előbbi eredményeink szerint fennállanak az $A_1 A_i A_0$, $A_1 A_0 A_k$ elrendezések s ezekből az 1. lemma szerint következik az $A_1 A_0 A_k$ elrendezés. Az adott $n+1$ pont elrendezése tehát $A_1 A_2 \dots A_{p-1} A_0 A_p \dots A_n$.

Értelmezés. Legyenek A és B az a egyenes pontjai; AB szakaszon, vagy BA szakaszon értjük az a egyenes olyan C pontjainak összességét, melyek az A és B között fekszenek. Ezek a C pontok az AB szakasz pontjai, vagy belső pontjai; A és B az AB szakasz végpontjai. Az AB szakasz pontjainak és végpontjainak összességét AB vonaldarabnak nevezzük; A és B a vonaldarab végpontjai.

Értelmezés. Ha A és B az a egyenes pontjai, akkor azt mondjuk, hogy az AB szakasz az a egyeneshez tartozik, vagy az a egyenesen fekszik, továbbá, hogy az a egyenes az AB szakaszon áthalad, vagy a az AB szakaszon átfektetett egyenes.

5. tétel. Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ egy egyenesen fekvő pontok, melyeknek elrendezése $A_1 A_2 \dots A_n$, akkor az $A_1 A_n$ szakasznak bármely az A_r -ktől különböző X pontja az $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ szakaszok közül pontosan egyhez tartozik. Viszont minden olyan X pont, mely az $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ szakaszok közül valamelyikhez tartozik, az $A_1 A_n$ szakasznak is pontja.

A fenti értelmezések alapján ez a tétel a 4. tételnek közvetlen következménye. Legyen ugyanis X olyan pont, melyre az $A_1 X A_n$ elrendezés áll fenn; az $A_1, A_2, \dots, A_n, X$ pontok elrendezése

legyen $A_1 A_2 \dots A_r X A_{r+1} \dots A_n$; ekkor az X pont az $A_r A_{r+1}$ szakaszhoz tartozik, de nem tartozik bármely más $A_k A_{k+1}$ ($k \neq r$) szakaszhoz. — Ha viszont

X olyan pont, melyre az $A_r X A_{r+1}$ elrendezés áll fenn, akkor az $A_1, A_2, \dots, A_n, X$ pontok elrendezése $A_1 A_2 \dots A_r X A_{r+1} \dots A_n$, tehát $A_1 X A_n$ (4. ábra).

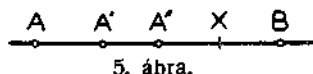
Értelmezés. Ha $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ véges sok az AA_n szakaszhoz tartozó pont, melyeknek elrendezése $AA_1 A_2 \dots A_n$, azt fogjuk mondani, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok közül A_1 fekszik legközelebb az A -hoz.

A II. 1, 2, a, b, c axiómákból levezetjük a következő tételt:
6. tétel. Minden AB szakaszon végtelen sok pont van.

Bizonyítás. A tétel értelme az, hogy ha n tetszőleges természetes szám, van n egymástól különböző olyan pont, mely az AB szakaszhoz tartozik. A tétel érvényes $n = 1$ esetén (II. c); tetszőleges n -re teljes indukcióval a következőképpen bizonyítjuk be. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ az AB szakaszon fekvő, egymástól különböző pontok; a 4. tétel értelmében a jelöléseket úgy választ-hatjuk meg, hogy elrendezésük $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ legyen. A II. c axioma szerint van az $A_{n-1}B$ szakaszon legalább egy A_n pont; az 5. tétel folytán A_n az AB szakaszhoz tartozik és különböző az $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ pontoktól.

Értelmezés. Ha az a egyenesen fekvő X, A, B pontok elrendezése AXB , akkor azt mondjuk, hogy X az A és B pontokat az a egyenesen elválasztja egymástól, vagy az A és B pontok az a egyenesen X különböző oldalán vannak. — Ha az a egyenesen fekvő A, A', X pontok elrendezése $AA'X$, vagy $A'A'X$, akkor X nem választja el az a egyenesen az A és A' pontokat; az A, A' pontok az a egyenesen az X pontnak ugyanazon az oldalán vannak (5. ábra).

A 3. tételből következik, hogy ha A, A', A'' és X az a egyenesnek olyan pontjai, melyek közül A és A' az X -nek ugyanazon az oldalán, A' és A'' az



X -nek ugyanazon az oldalán vannak, akkor A és A'' is az X -nek ugyanazon az oldalán vannak (5. ábra).

A következő értelmezéseknél feltesszük a II. 1, 2, 3, a, b, c axiómákat.

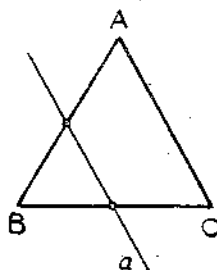
Értelmezés. Az egyenesnek azok a pontjai, melyek az egyenes X pontjának ugyanazon az oldalán fekszenek, *félsugarat* alkotnak; X a *félsugár kezdőpontja*. — Az egyenest bármely pontja két félsugárra osztja fel (3. tétel). Az AB egyenesnek azt az A pont által meghatározott félsugarát, mely a B pontot tartalmazza, $\vec{AB}$ félsugár-nak nevezzük.

Értelmezés. Az AB egyenesnek azokról a pontjairól, melyek nem pontjai, s nem is végpontjai az AB szakasznak, azt mondjuk, hogy az AB szakaszon kívül, vagy az AB szakasz meghosszabbításán fekszenek; az AB szakasznak a B felől való meghosszabbításán értjük a B által az AB egyenesen meghatározott félsugarat, melyhez nem tartozik az A pont. Például az, hogy a C pont az AB szakasznak B felől való meghosszabbításán fekszik, azt jelenti, hogy C az AB egyenesen fekszik s az A, B, C pontok elrendezése ABC .

4. §. A sík rendezési tételei.

A síkra vonatkozóan a következő rendezési axiómát vezetjük be:

II. 4. Legyenek A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és legyen a olyan egyenes, mely az ABC síkban fekszik s nem halad át az A, B, C pontok közül egyikén sem. Ha az a egyenesnek van az AB szakasszal közös pontja, akkor van vagy a BC , vagy a CA szakasszal is közös pontja (6. ábra).



6. ábra.

Értelmezés. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, az A, B, C pontok és az AB, BC, CA szakaszok összességét ABC háromszögnek nevezzük; az AB, BC, CA szakaszok a háromszög oldalai, az A, B, C pontok a háromszög csúcsai. Az A, B, C csúcsok által meghatározott sík az ABC háromszög síkja. A háromszögnek A csúcsával szemben fekvő oldala a BC oldal, stb.

A fenti II. 4 axióma röviden így fogalmazható:

Ha egy háromszög síkjában fekvő egyenes, mely a csúcsokon nem halad át, metszi a háromszög egyik oldalát, akkor metszi valamelyik másik oldalát is.

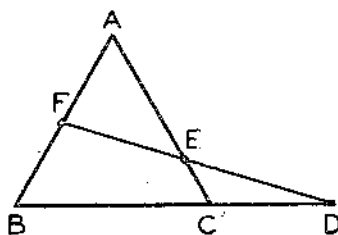
MOORE E. H. megjegyezte, hogy az I. 1–3 és a II. 1, 2, 3, 4 axiómákból következnek a lineáris rendezésre vonatkozó fenti 3. és 4. tételek. VEULEN módszerét alkalmazva meg fogjuk mutatni, hogy a nevezett axiómákból levezethetők a II. a, b és c axiómák.

7. tétel. *Legyenek A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok. Ha E az ABC háromszög AC oldalának pontja, és D a BC egyenesnek olyan pontja, melynek elrendezése BCD , vagy DBC , akkor a DE egyenesnek van a háromszög AB oldalával közös F pontja, s erre fennáll a DEF , vagy DFE elrendezés, aszerint, hogy a B, C, D pontok elrendezése BCD , vagy DBC .*

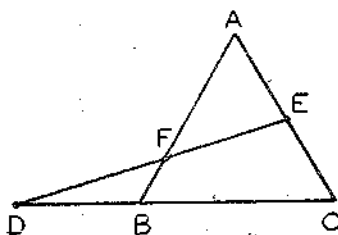
Bizonyítás. A DE egyenes nem halad át az A, B, C pontok közül egyikén sem; ha például A a DE egyenesen fekédnék, akkor a DE és AC egyeneseknek két közös pontja lenne: A és E , tehát ezek az egyenesek az 1. tétel szerint azonosak lennének. De ebből továbbá az is következne, hogy az AC és BC egyeneseknek C és D két egymástól különböző közös pontja lenne, s így az AC és BC egyenesek is azonosak lennének, ellentétben azzal a feltételünkkel, hogy az A, B, C pontok nem fekszenek egy egyenesen.

A DE egyenes metszi feltevésünk szerint az ABC háromszögnek AC oldalát, s mint láttuk, nem halad át az ABC háromszög egyik csúcán sem; a II. 4 axioma szerint a DE egyenes metszi ennek a háromszögnek AB és BC oldalai közül legalább egyiket. De a DE egyenes nem metszheti a BC oldalt, mivel a DE és a BC egyeneseknek közös D pontja feltevésünk szerint nem tartozik a BC szakaszhoz. Adódik tehát, hogy a DE egyenesnek van az AB oldallal közös F pontja; erre fennáll az AFB elrendezés.

Ha a B, C, D pontok elrendezése BCD (7. ábra), alkalmazzuk előbbi eredményünket a BFD háromszögre és az AC egyenesre; adódik, hogy az AC egyenes metszi a háromszög DF oldalát,



7. ábra.



8. ábra.

vagyis az AC és DF egyenesek E metszéspontja a DF szakaszon fekszik s így elrendezése DEF . — Ha pedig a B, C, D pontok elrendezése DBC (8. ábra), akkor a DCE háromszögre és az AB egyenesre vonatkozóan adódik, hogy az AB egyenes olyan F pontban metszi a DE egyenest, melyre a DFE elrendezés áll fenn.

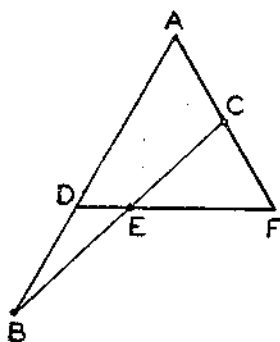
Megjegyzés. A 7. tétel bebizonyítása során nem használtuk fel a II. a, b, c axiómákat, sem az azok segítségével levezetett 3—6 tételeket. A II. c axiómát az I. 1—3 és II. 1, 2, 3, 4 axiómák, illetve az ezekből levezetett 7. tétel alapján a következőképpen bizonyítjuk be (lásd a 7. ábrát).

Legyen A és B az a egyenes két különböző pontja; az I. 3 axioma értelmében van olyan E pont, mely nem fekszik az AB egyenesen. A II. 3 axioma szerint van az AE egyenesnek olyan C pontja, melynek elrendezése AEC . A C pont nem fekszik az AB egyenesen, különben az I. tétel szerint az AB és AC egyenesek azonosak lennének, s így az AC egyenes E pontja az AB egyeneshez tartoznék, feltevésünkkel ellentétben. A BC egyenesnek van a II. 3 axioma szerint olyan D pontja, melynek elrendezése BCD . Az A, B, C, D, E pontokra nézve teljesülnek a 7. tétel feltételei;

ennélfogva van az AB egyenesnek olyan F pontja, melynek elrendezése AFB ; ez épen a II. c axioma állítása.

8. tétel. *Egy egyenesnek nem lehet egy háromszög mindhárom oldalával közös pontja.*

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőt s jelöljük az a egyenesnek az AB, BC, CA oldalakkal való metszéspontjait rendre D, E, F -fel; fennállanak tehát az ADB, BEC, CFA elrendezések. A II. 2 axioma szerint az a egyenes D, E, F pontjai közül egyik és csak egyik fekszik a másik kettő között; tegyük fel például, hogy elrendezésük DEF . Alkalmazzuk a 7. tételt az ADF háromszögre és a BE egyenesre (9. ábra); fennállanak ugyanis az ADB és DEF elrendezések. A 7. tétel szerint a BE egyenesnek van az AF oldallal közös pontja, s ez szükségképen az AF és BE egyenesek metszéspontja C ;



9. ábra.

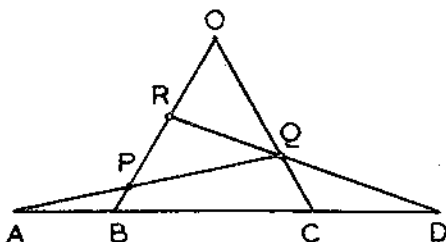
a 7. tétel szerint erre fennáll az ACF elrendezés, ellentétben a feltételezett AFC elrendezéssel.

Bebizonyítjuk a következő tételt (mely a II. a axiómával azonos):

Ha A, B, C, D az a egyenesen fekvő pontok, melyekre fennállnak az ABC és BCD elrendezések, akkor fennáll az ABD elrendezés.

Bizonyítás. Legyen O az a egyeneshez nem tartozó pont;

a BO szakaszon felvesszünk valamely P pontot. Az OBC háromszögre és az AP egyenesre alkalmazzuk a 7. tételt (10. ábra). Adódik, hogy az AP egyenes metszi a háromszög OC oldalát egy Q pontban, melyre az OQC és APQ elrendezések állanak fenn. Al-



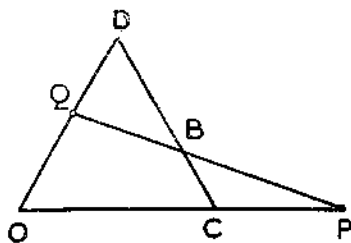
10. ábra.

alkalmazzuk ismét a 7. tételt az OBC háromszögre és a DQ egyenesre; ebből adódik, hogy a DQ egyenesnek van a háromszög OB oldalával közös R pontja, melyre az ORB és DQR elrendezések állanak fenn. — Alkalmazzuk a 7. tételt végül az AQD háromszögre és az RP egyenesre; az RP egyenesnek az AD oldallal közös pontjára, mely a B pont, adódik ebből az ABD elrendezés.

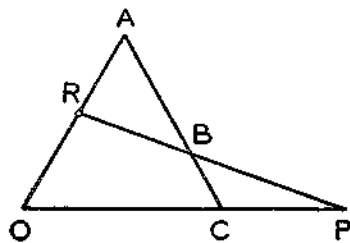
Bebizonyítjuk a következő tételt (mely a II. b axiómával azonos):

Ha az a egyenesen fekvő A, B, C, D pontokra fennállanak az ABC és ABD elrendezések, akkor fennáll vagy a BCD , vagy a BDC elrendezés.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellenkezően a CBD elrendezés áll fenn. Az a egyeneshez nem tartozó O pontot összekötjük C -vel s az OC egyenesen felvesszünk olyan P pontot, melyre az $OC P$ elrendezés áll fenn (II. 3) (11. ábra). Az OCD háromszögre s a PB egyenesre nézve teljesülnek a 7. tétel feltételei; következik tehát, hogy a PB egyenesnek van a



11. ábra.



12. ábra.

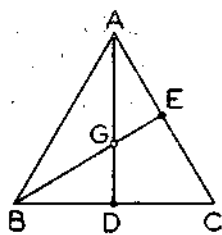
háromszög OD oldalával közös Q pontja s erre fennállanak az OQD és PBQ elrendezések. Az AOC háromszögre és a PB egyenesre alkalmazva a 7. tételt (12. ábra) kiadódik, hogy a PB egyenes metszi az AO oldalt olyan R pontban, melyre az ORA , PBR elrendezések állanak fenn. — A feltételeink között szereplő ABD , s a levezetett ORA és OQD elrendezések szerint a PB egyenesnek B, R, Q pontjai rendre az AD , OA és OD szakaszokhoz tartoznak; az A, D, O pontok nem fekszenek egy egyenesen; az ADO háromszögnek mindhárom oldalát metszené a PB egyenes; ez ellentmond a 8. tételnek.

Megjegyzés. Fenti eredményeinknek megfelelően a lineáris geometriában a II. 1, 2, 3, a, b, c axiómák, a sík- és téergeometriában a II. 1, 2, 3, 4 axiómák szolgálnak a rendezési tételek alapjául. Ez magyarázza meg jelöléseink módját; végleges axiomarendszerünk axiómáit 1, 2, 3, 4 számokkal, azokat az axiómákat pedig, melyek átmenetileg: a lineáris geometria önálló felépítéséhez szükségesek, de a sík- és téergeometria axiómáiból levezethetők, a, b, c betűkkel jelöltük. — További tárgyalásaink alapját az I (vagyis az I. 1–7, illetve a síkgeometriára vonatkozóan a I. 1–3) és a

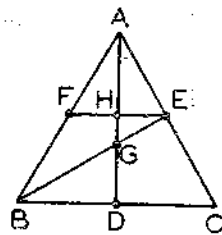
II. 1, 2, 3, 4 axiómák képezik; a II. 1, 2, 3, 4 axiómák összességét II-vel jelöljük.

9. tétel. Az ABC háromszög BC oldalának D pontját kössük össze A -val, és az AC oldal E pontját kössük össze B -vel. Az AD és BE szakaszoknak van közös pontja: G (13. ábra).

Bizonyítás. A feltételek szerint fennállanak a BDC és AEC elrendezések. Alkalmazzuk a 7. tételt a BEC háromszögre és az AD



13. ábra.



14. ábra.

egyenesre; adódik, hogy az AD egyenes metszi a BE oldalt olyan G pontban, melyre fennáll az AGD elrendezés.

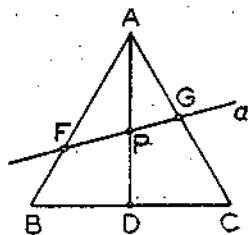
10. tétel. Az ABC háromszög BC , CA , AB oldalain vegyünk fel rendre D , E , F pontokat. Az AD és EF szakaszoknak van közös pontja (14. ábra).

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 7. tételt a BEC háromszögre és az AD egyenesre; adódik, hogy van olyan G pont, melyre fennállanak a BGE és DGA elrendezések. Alkalmazzuk ismét a 7. tételt a BEF háromszögre és az AG egyenesre; az AG egyenesnek van az FE oldallal közös H pontja, melyre fennállanak az FHE és GHA elrendezések. A 3. tétel szerint a DGA és GHA elrendezésekből következik a DHA elrendezés.

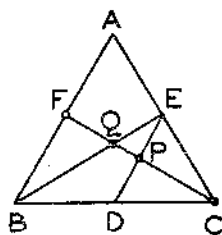
11. tétel. Ha D és E az ABC háromszögnek két olyan pontja, melyek nem tartoznak a háromszögnek ugyanahhoz az oldalához, és P tetszőleges a DE szakaszon fekvő pont, minden a P ponton áthaladó a egyenesnek van a háromszöggel két közös pontja, s ezeket a P pont az a egyenesen egymástól elválasztja.

Bizonyítás. Ha az E pont azonos az A csúccsal és D a szembenfekvő BC oldal valamely pontja, legyen P az AD szakaszon fekvő pont, és a tetszőleges a P ponton áthaladó egyenes (15. ábra). Alkalmazzuk a II. 4 axiómát az a egyenesre és sorban az ABD és ADC háromszögre; így kapjuk, hogy az a egyenesnek van olyan F pontja, mely vagy B -vel azonos, vagy az AB és BD

szakaszok közül az egyikhez tartozik; továbbá van α -nak olyan G pontja, mely vagy C -vel azonos, vagy az AC és CD szakaszok közül az egyikhez tartozik. Ha az F és G pontok közül az egyik a BC egyenesen fekszik, például ha F a BD szakasznak pontja, vagy végpontja, akkor G az AC oldalon fekszik; s a 7. tétel értelmében fennáll az FPG elrendezés. Ha pedig F és G rendre az AB és AC oldalakon vannak, akkor a 10. tételből következik az FPG elrendezés.



15. ábra.



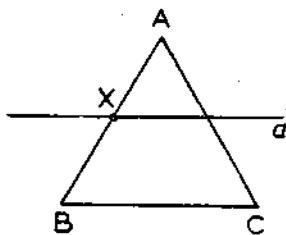
16. ábra.

Ha D a BC szakaszon és E az AC szakaszon fekszik, a DE szakaszon felvett tetszőleges P pontot a C csúccsal összekötő CP egyenesre és sorban a DEB és BEA háromszögekre alkalmazzuk a 7. tételt (16. ábra); adódik, hogy a BE oldalnak van a CP egyenessel közös Q pontja s erre a CPQ elrendezés áll fenn; továbbá, hogy a CQ egyenesnek van az AB oldallal közös F pontja, s erre a CQF elrendezés áll fenn. A CPQ és CQF elrendezésekből a 3. tétel szerint következik a CPF elrendezés.

A bebizonyított két állítás összefoglalásából kiadódik a 11. tétel.

12. tétel. Az α síkot bármely benne fekvő a egyenes két félsíkra osztja. Az a egyeneshez nem tartozó A és A' pontok ugyanahhoz a félsíkhöz tartoznak, ha az AA' szakasznak nincs az a egyenessel közös pontja. Az a egyeneshez nem tartozó A és B pontok különböző félsíkokhoz tartoznak, ha az AB szakasznak van az a egyenessel közös pontja. — Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok közül az A_1 és A_n nem tartoznak ugyanahhoz a félsíkhöz, akkor valamelyik $A_i A_{i+1}$ vonaladarabnak van az a egyenessel közös pontja.

Bizonyítás. Legyen A az a egyeneshez nem tartozó, az α síkban fekvő pont, és legyen X az a egyenes valamely pontja. Az AX egyenesen van legalább egy olyan B pont, melyre az AXB elrendezés áll fenn (II. 3); az A, B pontok tehát különböző félsíkokhoz tartoznak (17. ábra). — Legyen C a síknak tetszőleges, az a egyeneshez nem tartozó pontja; meg-



17. ábra.

mutatjuk, hogy vagy A és C tartoznak ugyanahhoz a félsíkhöz, s ekkor B és C különböző félsíkokhoz tartoznak, vagy megfordítva. Tegyük fel először, hogy A, B, C nem fekszenek egy egyenesen; az a egyenes nem halad át az ABC háromszög egyik csúcán sem, s metszi annak AB oldalát, tehát a II. 4 axioma szerint metszi az AC és BC oldalak közül az egyiket, de a 8. tétel szerint nem metszheti mindkettőt. — Ha az A, B, C pontok egy egyenesen fekszenek, akkor mivel a metszi az AB szakaszt, metszi az AC és BC szakaszok közül is az egyiket, de a másikat nem, bármilyen is az A, B, C pontok elrendezése; ez az 5. tételből közvetlenül következik. — Ha A_1, A_2, A_3 nem az a egyenesen fekvő olyan pontok, hogy az A_1A_3 szakasznak van az a egyenessel közös pontja, akkor a II. 4 axioma illetve az 5. tétel szerint vagy az A_1A_2 , vagy az A_2A_3 szakasznak van a -val közös pontja, akár egy egyenesen fekszenek az A_1, A_2, A_3 pontok, akár nem. Teljes indukcióval következik ebből, hogy ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok közül A_1 és A_n nem tartoznak ugyanahhoz a félsíkhöz, akkor valamely A_iA_{i+1} vonaldarabnak van a -val közös pontja.

Értelmezés. Ha egy síknak A és A' pontjai ugyanahhoz az a egyenes által meghatározott félsíkhöz tartoznak, akkor azt mondjuk, hogy A és A' az a egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, s hogy az a egyenes az A és A' pontokat nem választja el egymástól. — Ha A és B az a által meghatározott különböző félsíkokhoz tartoznak, azt mondjuk, hogy A és B az a egyenesnek különböző oldalán fekszenek, s hogy az a egyenes az A és B pontokat egymástól elválasztja.

5. §. Konvex sokszögek.

Értelmezés. Az $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ vonaldarabok törtvonalat alkotnak, mely az A_0 és A_n pontokat összeköti. Ezt a törtvonalat $A_0A_1\dots A_n$ -nel jelöljük. Az $A_0, A_1, \dots, A_n$ pontok a törtvonal csúcsai, az A_0 és A_n pontok a törtvonal végpontjai, az $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ szakaszok a törtvonal oldalai. Az A_i és A_{i+1} csúcsokat szomszédosnak nevezzük, hasonlóan az $A_{i-1}A_i$ és A_iA_{i+1} oldalakat.

A törtvonal pontjai az $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ oldalak pontjai és végpontjai. A törtvonalat egyszerűnek (vagy kettőspont nélkülinek) nevezzük, ha két-két nem szomszédos A_iA_{i+1} és A_jA_{j+1} vonaldarabnak nincs közös pontja (vagyis ha az A_iA_{i+1} oldal egyik pontja sem belső, sem végpontja A_jA_{j+1} -nek).

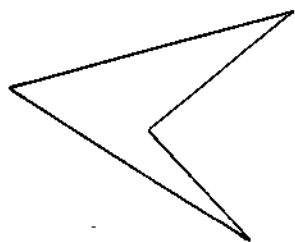
Értelmezés. Az $A_1A_2\dots A_n$ egyszerű törtvonalat a végpontjaitól különböző P pontja, mely az A_kA_{k+1} oldalhoz tartozik, az $A_1A_2\dots A_kP$ és a $PA_{k+1}A_{k+2}\dots A_n$ törtvonalakra osztja fel; ezeknek P -n kívül nincs közös pontjuk. Ha Q az $A_1A_2\dots A_kP$ és R a $PA_{k+1}A_{k+2}\dots A_n$ törtvonalnak egy-egy a P -től különböző pontja, akkor azt mondjuk, hogy az $A_1A_2\dots A_n$ törtvonalon P a Q és R pontokat egymástól elválasztja, s hogy ezeknek a pontoknak a törtvonalon való elrendezése QPR . Az egyszerű törtvonal pontjaira nézve ilyen módon értelmezett lineáris rendezés, mint könnyen belátható, eleget tesz a II. 1, 2, a, b axiómáknak.

A törtvonalat *zárt*nak nevezzük, ha $A_0 = A_n$; ebben az esetben A_n és A_1 is szomszédos csúcsok, s hasonlóan szomszédosak az A_nA_1 és az A_1A_2 oldalak. (Zárt törtvonal valamely oldalát általánosan A_iA_{i+1} -gyel jelöljük, s ha $i=n$, A_{n+1} -en értjük az A_1 csúcsot).

Értelmezés. Ha egy zárt törtvonal csúcsai egy síkban fekszenek, a törtvonalat *sokszögnek*, s nevezetesen $n=3, 4$ esetén *háromszögnek*, *négyszögnek*, s általában *n-szögnek* nevezzük. Olyan egyszerű zárt törtvonalat, melynek csúcsai egy síkban fekszenek, *egyszerű sokszögnek* nevezünk. Az értelmezésből a 4. tételre való tekintettel nyilvánvaló, hogy egy egyszerű sokszög összes csúcsai nem tarthatnak egy egyeneshez.

Értelmezés. Az $A_1A_2\dots A_n$ egyszerű sokszöget *konvexnek* nevezzük, ha bármely két szomszédos csúcsán áthaladó egyenesnek egyik oldalán fekszenek a sokszög összes többi csúcsai. Az A_iA_{i+1} egyeneseket a sokszög *oldalvonalainak* nevezzük; az A_iA_{i+1} oldalvonal által meghatározott két félsík közül azt, mely a sokszög többi csúcsát tartalmazza, az A_iA_{i+1} egyenes *pozitív oldalának*, a másikat *negatív oldalának* nevezzük. — Az értelmezés alapján következik a 12. tételből, hogy a konvex sokszögnek bármely az A_iA_{i+1} vonaldarabhoz nem tartozó pontja az A_iA_{i+1} oldalvonalnak pozitív oldalán fekszik.

Nyilván minden háromszög konvex.
A 18. ábra nem konvex négyszöget ábrázol.



18. ábra.

13. tétel. *Bármely egyenesnek, mely nem halad át egy konvex sokszög két szomszédos csúcsán, legfeljebb két közös pontja van a sokszöggel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az a egyenesnek az $A_1A_2\dots A_n$ konvex sokszöggel három közös pontja van: A, B, C , melyek nem

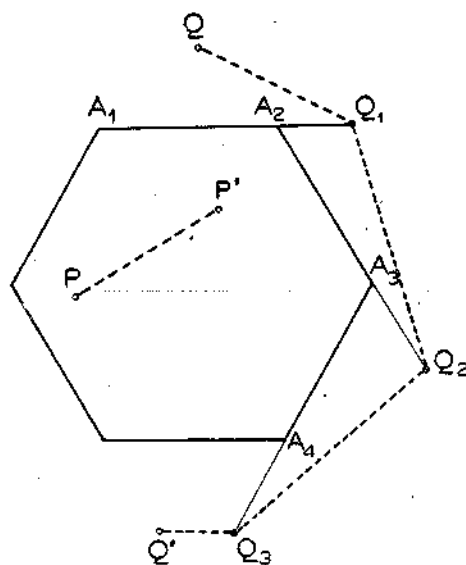
tartoznak a sokszögnek ugyanahhoz az oldalához; ezeknek az a egyenesen való elrendezése legyen ABC . Jelöljük A_1A_2 -vel a sokszögnek olyan oldalát, melynek pontja, vagy végpontja a B pont; a sokszögnek A_1A_2 oldalvonalára feltevésünk szerint nem halad át az A , vagy a C ponton. Mivel az AC szakasznak van az A_1A_2 egyenessel közös pontja: B , a 12. tétel értelmében a sokszög A és C pontjai az A_1A_2 oldalvonalnak különböző oldalán fekszenek, ellentétben a konvex sokszög értelmezésével.

14. tétel. *Konvex sokszög a síkot két részre osztja, melyeket a sokszög belsejének és külsejének nevezünk. Bármely két a sokszög belsejében fekvő pontot összekötő szakasz pontjai a sokszög belsejéhez tartoznak. Bármely két a sokszög külsejében fekvő pont összeköthető a sokszög külsejéhez tartozó törtvonallal. Minden törtvonalnak, mely a sokszög belsejében fekvő pontot, a sokszög külsejében fekvő ponttal a sokszög síkjában összeköt, van a sokszöggel közös pontja.*

Bizonyítás. (Lásd a 19. ábrát.) A síknak valamely a sokszöghöz nem tartozó pontjáról azt mondjuk, hogy a sokszög belsejéhez tartozik, ha a sokszög mind-egyik oldalvonalának pozitív oldalán fekszik, s hogy a sokszög külsejéhez tartozik, ha legalább egyik oldalvonalának negatív oldalán fekszik.

Ha D és E a sokszög két különböző oldalának egy-egy pontja, a DE szakasz pontjai a sokszög belsejéhez, a DE szakasz meghosszabbításán fekvő pontok a sokszög külsejéhez tartoznak. —

Ha ugyanis A_i, A_{i+1} a sokszög bármely két szomszédos csúcsa, akkor a konvex sokszög értelmezése folytán a D és E pontok vagy mindketten az A_iA_{i+1} oldalvonalnak pozitív oldalán, vagy közülök egyik az A_iA_{i+1} oldalvonalon s a másik annak pozitív oldalán fekszik; a 12. tétel értelmében a DE szakasz pontjai mindkét esetben az A_iA_{i+1} oldalvonal



19. ábra.

pozitív oldalán vannak, s mivel ez i -nek minden értékére vonatkozik, tehát értelmezés szerint a DE szakasz a sokszög belsejéhez tartozik. — Ha pedig Q a DE szakasz meghosszabbításán fekvő pont, melynek elrendezése QDE , akkor a 12. tétel szerint Q a D pontot tartalmazó oldalonak negatív oldalán, tehát a sokszög külsejében fekszik.

Ha P és P' két tetszőleges a sokszög belsejében fekvő pont, a 12. tétel folytán a PP' szakasz a sokszög minden oldalvonalának a pozitív oldalán, tehát a sokszög belsejében van.

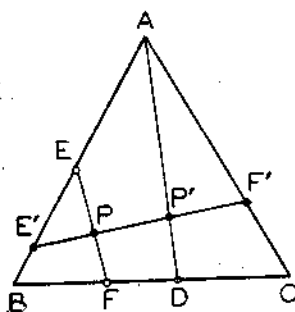
Ha a Q pont a sokszög A_1A_2 oldalának A_2 felőli meghosszabbításához tartozik, akkor az A_2A_3 oldalvonalnak negatív oldalán, tehát a sokszög külsejében fekszik. Ha Q és Q' két tetszőleges a sokszög külsejében fekvő pont, tegyük fel, hogy Q az A_1A_2 oldalvonalnak, és Q' az A_kA_{k+1} oldalvonalnak a negatív oldalán fekszik. Jelentse Q_i az A_iA_{i+1} oldalvonalnak olyan pontját, melynek elrendezése $A_iA_{i+1}Q_i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$); a $QQ_1Q_2 \dots Q_{k-1}Q'$ törtvonal a sokszög külsejében összeköti a megadott Q és Q' pontokat.

Legyen P a sokszög belsejében, Q annak külsejében fekvő pont; az értelmezés szerint van a sokszögnek legalább egy olyan oldalvonala, mely a P és Q pontokat elválasztja. A PQ szakasznak a sokszög oldalvonalaival közös pontjai közül jelöljük R -rel azt, mely P -hez legközelebb fekszik; R nem fekehetik valamely oldalvonal negatív oldalán, s mint fent láttuk, ebből következik, hogy R az adott sokszögnek pontja.

Ha $P \dots P'Q' \dots Q$ olyan törtvonal, mely a P és Q pontokat a sokszög síkjában összeköti, jelöljük Q' -vel ennek P -től számított első olyan csúcsát, mely nem tartozik a sokszög belsejéhez, és P' -vel az ezt megelőző csúcsát. A Q' pont vagy a sokszöghöz, vagy annak külsejéhez, P' pedig a sokszög belsejéhez tartozik; fenti eredményünk szerint tehát van a $P'Q'$ szakasznak a sokszöghöz tartozó pontja, vagy végpontja, s így a $P \dots P'Q' \dots Q$ törtvonalnak van a sokszöggel közös pontja. — Ezzel a 14. tétel összes állítását bebizonyítottuk.

15. tétel. Ha P az ABC háromszög belsejében fekvő pont, bármely a P ponton áthaladó egyenesnek van a háromszöggel két közös pontja, E és F , s ezeknek elrendezése EPF . Az EF egyenesnek mindegyik oldalán fekszik a háromszögnek legalább egy-egy csúcsa.

Bizonyítás. (Lásd a 20. ábrát.) A BC oldal valamely D pontját az A csúccsal összekötő AD szakasz bármely P' pontja az



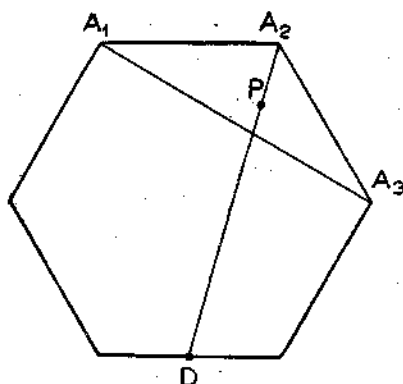
20. ábra.

ABC háromszög belsejéhez tartozik, s így a 14. tétel szerint a PP' szakasz is. A 11. tétel szerint a PP' egyenesnek van az ABC háromszöggel két közös pontja E' és F' , s ezeknek elrendezése $E'P'F'$. Mivel az $E'F'$ szakasz meghosszabbításán fekvő pontok a háromszög külsejéhez tartoznak, a P pont az $E'F'$ szakasz pontja. A 11. tétel szerint tehát bármely a P ponton áthaladó egyenes metszi a háromszöget két olyan E és F pontban, melyeknek elrendezése EPF . — Az E és F pontok közül nem lehet mindkettő az ABC háromszögnek a csúcsa; ha E az AB oldalhoz tartozik, akkor a háromszög A és B csúcsai az EF egyenesnek különböző oldalán vannak.

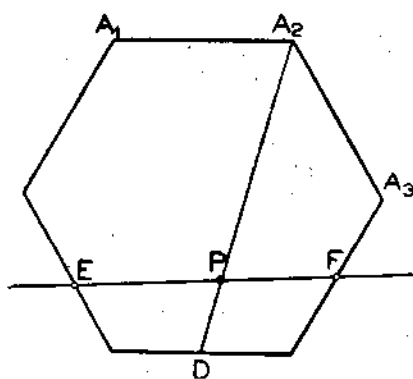
16. tétel. Ha P a π konvex sokszög belsejében fekvő pont, akkor bármely a P ponton áthaladó a egyenesnek mindegyik oldalán fekszik a sokszögnek legalább egy-egy csúcsa. Az a egyenesnek a sokszöggel két E és F közös pontja van, s ezeknek elrendezése EPF .

Bizonyítás. A sokszög legyen $A_1A_2\dots A_n$. Az A_2P szakasz pontjai a π sokszög belsejében, s nevezetesen az A_1A_2 és az A_2A_3 oldalvonalak pozitív oldalán vannak. Az A_2P szakasznak vagy van az A_1A_3 szakasszal közös pontja, vagy ha nincs, akkor P az A_1A_3 egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint az A_2 pont, s ebből következik, hogy P az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejéhez tartozik (21. ábra). A 15. tétel szerint tehát az A_2P egyenes ebben az esetben is metszi a háromszög A_1A_3 oldalát, s így az A_1 és az A_3 pontok az A_2P egyenesnek különböző oldalán vannak. Ebből a 12. tétel szerint következik, hogy az A_2P egyenesnek van az $A_3A_4\dots A_nA_1$ törtvonalal egy, és a 13. tétel folytán csak egy közös pontja: D .

Legyen a valamely a P ponton áthaladó egyenes; az A_2PD elrendezés következtében a -nak különböző oldalán vannak a π sokszög A_2 és D pontjai (22. ábra). Ha D a sokszög valamely oldalának pontja, ennek az oldalnak legalább egyik végpontja, tehát a sokszögnek valamelyik A_k csúcsa a -nak ugyanazon az oldalán fekszik mint a D pont. — Az $A_2A_3\dots A_k$ és az $A_kA_{k+1}\dots A_nA_1$ törtvonalak közül mindegyiknek van az a egyenessel egy és csak



21. ábra.



22. ábra.

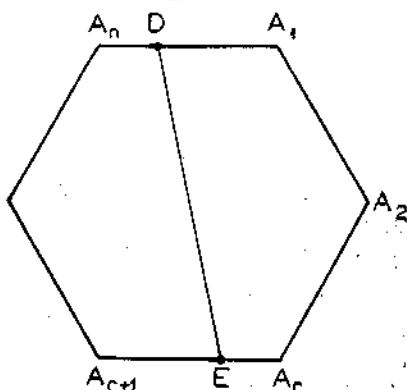
egy közös pontja: F és E . Mivel P a π sokszög belsejéhez tartozik, tehát P az EF szakasz pontja.

Megjegyzés. Ha P a π konvex sokszög A_1A_2 oldalának pontja, és a a P ponton áthaladó s az A_1A_2 -től különböző egyenes, akkor az A_1 és A_2 pontok a -nak különböző oldalán fekszenek, s így a 12. tétel szerint van a -nak az $A_2A_3 \dots A_nA_1$ törtvonallal egy, és a 13. tétel szerint csak egy közös pontja.

Értelemezés. Konvex sokszög belsejét síkbeli konvex tartománynak, a sokszöget, melyet a tartomány egyértelműen meghatároz (l. a 14. tétel bizonyítását), a tartomány határárnak nevezzük.

17. tétel. Legyenek D és E a π konvex sokszögnek olyan pontjai, melyek nem tartoznak a sokszögnek ugyanahhoz az oldalához. A konvex sokszög belsejét a DE szakasz két konvex tartományra osztja fel; a π sokszög belsejének minden a DE szakaszhoz nem tartozó pontja a két tartomány közül egyhez és csak egyhez tartozik.

Bizonyítás. (Lásd a 23. ábrát.) Jelöljük A_nA_1 és A_rA_{r+1} -gyel a π sokszögnek olyan két oldalát, melynek pontja, vagy végpontja a D illetve az E pont. A 13. tétel szerint a DE egyenesnek D és E -n kívül nincs a π sokszöggel, tehát a $DA_1A_2 \dots A_rE$ és az $EA_{r+1}A_{r+2} \dots A_nD$ törtvonallakkal közös pontja. A DE egyenesnek különböző oldalán fekszenek az A_n és A_1 (illetve, ha $D=A_1$, akkor



23. ábra.

az A_1 és A_2 pontok, tehát a nevezett két törtvonal is. A DE szakasz a $DA_1A_2 \dots A_nE$ törtvonallal π_1 , és az $EA_{n+1}A_{n+2} \dots A_nD$ törtvonallal π_2 konvex sokszöget alkot. Bármely a π_1 , vagy a π_2 belsejében fekvő P pontot a DE szakasz tetszőleges pontjával összekötő szakasznak nincs a π sokszöggel közös pontja, tehát P a π sokszög belsejében fekszik. Viszont bármely a π belsejében, s nem a DE szakaszon fekvő pont π_1 -nek, vagy π_2 -nek a belsejéhez tartozik, aszerint hogy a DE egyenesnek az A_1 -et, vagy az A_n -et tartalmazó oldalán fekszik.

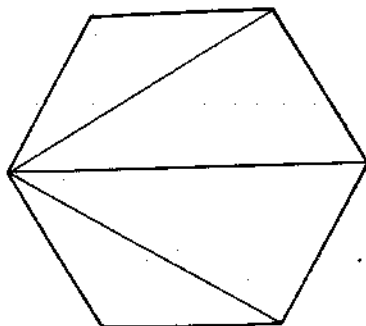
18. tétel. A π konvex sokszög belsejét a $k_1, k_2, \dots, k_r$ szakaszok, melyeknek végpontjai a sokszöghöz tartoznak, konvex tartományokra osztják fel; ezeket a k_i szakaszok által a π belsejében meghatározott tartományoknak nevezzük. A π sokszög belsejének bármely a k_i szakaszokhoz nem tartozó pontja a k_i szakaszok által meghatározott tartományok közül egyhez és csak egyhez tartozik.

Ez a tétel teljes indukcióval következik a 17. tételből.

Értelmezés. Konvex sokszög átlóján olyan szakaszt értünk, melynek végpontjai a sokszögnek két nem szomszédos csúcsa.

A 18. tétel speciális esete a következő

19. tétel. Konvex sokszög belsejét egyik csúcsából húzott átlói háromszögekre (azaz háromszög-tartományokra) osztják fel (24. ábra).

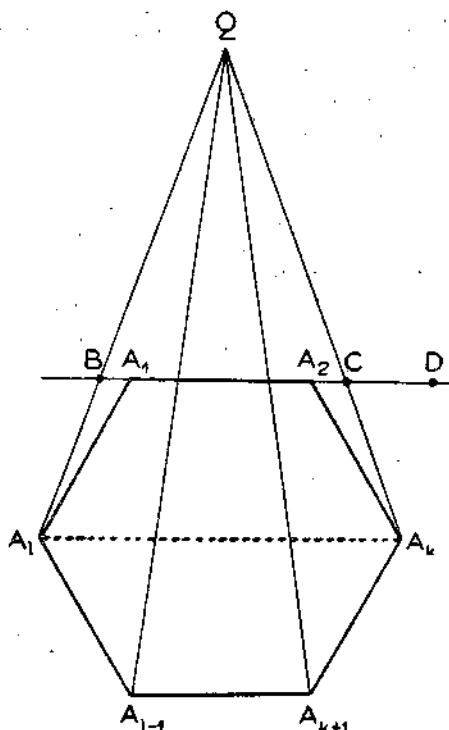


24. ábra.

20. tétel. Ha Q a π konvex sokszög külsejében fekvő pont, van olyan a Q ponton áthaladó egyenes, melynek minden pontja a sokszög külsejében fekszik.

Bizonyítás. Az értelmzés szerint van a π sokszögnek legalább egy olyan oldalvonala, jelöljük ezt A_1A_2 -vel, melynek negatív oldalán fekszik a Q pont, s pozitív oldalán a sokszögnek $A_3, A_4, \dots, A_n$ csúcsai (25. ábra). A $QA_3, QA_4, \dots, QA_n$ szakaszok-

nak az A_1A_2 oldalvonallal való metszéspontjai, továbbá az A_1, A_2 pontok közül jelöljük B -vel és C -vel azt a kettőt, melyek által meghatározott szakasz az összes többi tartalmazza (4. tétel). A QB egyenesnek (s ugyancsak a QC egyenesnek) egyik oldalán fekszenek a π sokszögnek az összes ehhez az egyeneshez nem tartozó pontjai; a QB (illetve a QC) egyenesnek ezt az oldalát pozitívnak nevezzük. Ha D a BC egyenesnek olyan pontja, melynek elrendezése BCD , akkor a QD egyenesnek nincs a π sokszöggel közös pontja, mivel a $\vec{DQ}$ félsugár pontjai az A_1A_2 oldalvonálnak, a $\vec{QD}$ félsugár pontjai pedig a QC egyenesnek a negatív oldalán fekszenek.



25. ábra.

21. tétel. Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ egy síkban, de nem egy egyenesen fekvő pontok, van egy és csak egy olyan konvex sokszög, hogy az A_i pontok közül mindegyik a sokszögön, vagy annak belsejében fekszik, s a sokszög minden csúcsa valamely A_i pont. Ezt a konvex sokszöget az adott pontok konvex burkolójának nevezzük.

Bizonyítás. A tétel nyilvánvaló $n=3$ pont esetén; tegyük fel hogy n -re is érvényes s bizonyítsuk be $n+1$ -re. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ és Q az adott $n+1$ pont; az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok konvex burkolóját jelöljük π -vel. Ha a Q pont π -hez, vagy π belsejéhez tartozik, akkor π az adott $n+1$ pont konvex burkolója. Ha Q a π sokszög külsejében, akkor valamely A_1A_2 oldalvonálnak negatív oldalán fekszik (25. ábra). A $QA_1, QA_2, \dots, QA_n$ szakaszoknak az A_1A_2 oldalvonalon fekvő pontjai és végpontjai közül jelöljük B és C -vel azt a kettőt, melyek által meghatározott szakasz az összes többi tartalmazza. A QC , illetve a QB egyenesen fekvő

A_i pontok közül jelöljük A_k -val illetve A_l -l azokat, melyekre nézve a QA_k , és a QA_l szakaszok meghosszabbításán nem fekszik egy A_i pont sem.

Ha a π sokszög valamelyik csúcsa az $A_k A_l$ egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, mint a Q pont, akkor a $QA_k A_l$ háromszöghöz, vagy annak belsejéhez tartozik. Ha az $A_k A_l$ egyenesnek másik oldalán nem fekszik a π sokszögnek egy csúcsa sem, akkor tehát a $QA_k A_l$ háromszög az adott $n+1$ pont konvex burkolója. — Ellenkező esetben legyenek $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{l-1}$ a π sokszögnek azok a csúcsai, melyeket az $A_k A_l$ egyenes a Q ponttól elválaszt. Az $A_k A_{k+1} \dots A_{l-1} A_l$ sokszög nyilván konvex. A 11. tételt a $QA_k A_l$ háromszögre és a BC szakaszra alkalmazva, adódik, hogy a $QA_{k+1}, QA_{k+2}, \dots, QA_{l-1}$ szakaszoknak az $A_k A_l$ egyenessel való metszéspontjai az $A_k A_l$ szakaszhoz tartoznak. Ebből következik, hogy a Q pont a π sokszög $A_k A_{k+1}, A_{k+1} A_{k+2}, \dots, A_{l-1} A_l$ oldalonvonalainak pozitív oldalán fekszik. Mint fent (a 20. tétel bebizonyításánál) megjegyeztük, a QA_k egyenesnek (s ugyancsak a QA_l egyenesnek) egyik oldalán fekszenek az összes A_i pontok. Eszerint a $QA_k A_{k+1} \dots A_{l-1} A_l$ sokszög konvex; ez az adott $n+1$ pont konvex burkolója.

Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontoknak két különböző konvex burkolója lenne π és π' , akkor közülük egyiknek, például π' -nek valamelyik A_i csúcsa a másik belsejében feküdne; π' bármelyik az A_i -n átmenő oldalonvonalának mindegyik oldalán lenne π -nek legalább egy-egy csúcsa (16. tétel), azaz legalább egy-egy A_i pont; ezek közül egyik π' külsejében feküdne, ellentétben a konvex burkoló értelmezésével.

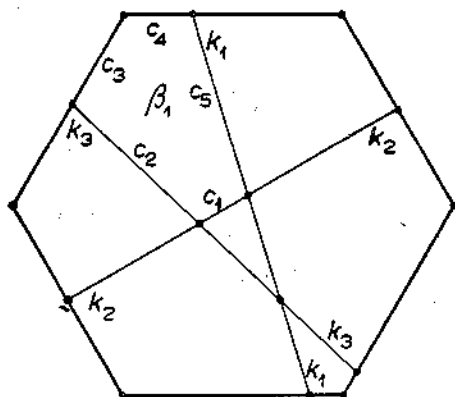
6. §. A sík kettéosztása egyszerű sokszöggel.

Legyen π' konvex sokszög, legyenek $k_1, k_2, \dots, k_m$ a sokszög belsejében fekvő szakaszok, melyeknek végpontjai a sokszöghöz tartoznak. A 18. tétel szerint a π' sokszög belsejét a k_i szakaszok konvex tartományokra osztják fel; jelöljük ezeket $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ -rel, s a β_i tartomány határát b_i -vel.

A π' sokszög minden oldalát a k_i szakaszok végpontjai, s a k_i szakaszok közül mindegyiket a többi k_j szakaszokkal közös pontok részsakaszokra osztják fel; jelöljük ezeket $c_1, c_2, \dots, c_s$ -sel. A b_i sokszög minden oldala valamely c_j szakasz; jelöljük $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i\mu}$ -vel a b_i oldalait; a b_i sokszöget a $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i\mu}$ szakaszok összegének

nevezzük: $b_i = c_i + c_2 + \dots + c_{i_v}$. (Lásd például a 26. ábrán: $b_1 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$.) Ha k_j jelenti az eredeti k_j szakaszok közül bármelyiket, melynek van b_i -vel közös pontja, akkor b_i -nek és k_j -nek közös része vagy egy c_i vonaladarab, vagy b_i -nek egy csúcsa.

Értelmezés. A $k_1, k_2, \dots, k_\mu$ ($\mu < m$) szakaszok által a π' konvex sokszög belsejében meghatározott bármely β' konvex tartományt a $k_{\mu+1}, k_{\mu+2}, \dots, k_m$ szakaszok egy vagy több konvex tartományra osztják fel (18. tétel); jelöljük ezeket



26. ábra.

$\beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_2}, \dots, \beta_{\lambda_h}$ -val. A β' tartományt a $\beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_2}, \dots, \beta_{\lambda_h}$ tartományok összegének nevezzük: $\beta' = \beta_{\lambda_1} + \beta_{\lambda_2} + \dots + \beta_{\lambda_h}$. Értelmezés szerint ehhez az összeghez tartozik a $\beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_2}, \dots, \beta_{\lambda_h}$ tartományokon kívül minden olyan szakasz is, mely a β_{λ_v} tartományok közül kettőnek a határához tartozik, továbbá minden olyan a π' belsejében fekvő csúcspont, amelyhez tartozó összes β_{λ_v} tartományok az összeg tagjai.

A β' tartomány határa azoknak a c_i szakaszoknak az összege, melyek a β_{λ_v} tartományok közül valamelyiknek, de csak egynek a határához tartoznak; ezeknek a c_i szakaszoknak a végpontjai is a β' határához tartoznak. A $\beta' = \beta_{\lambda_1} + \beta_{\lambda_2} + \dots + \beta_{\lambda_h}$ határát tehát úgy állíthatjuk elő, hogy a $b_{\lambda_1}, b_{\lambda_2}, \dots, b_{\lambda_h}$ határok közül mindegyik b_{λ_v} -t kifejezzük mint a hozzátartozó c_i -knek az összegét, s az összes b_{λ_v} -knek megfelelő c_i -k összegében a c_i -k együtthatóit mod 2 (olvassd: 2 modulus szerint) redukáljuk, azaz helyettesítjük 0-val, vagy 1-gyel aszerint, hogy az illető együttható páros, vagy páratlan szám. Az ilyen módon képezett összeget az illető b_{λ_v} -k (mod 2) összegének nevezzük és $b_{\lambda_1} + b_{\lambda_2} + \dots + b_{\lambda_h}$ -val jelöljük. Tartományok összeadásának, s határaik mod 2 összeadásának fenti értelmezését arra az esetre is kiterjesztjük, midőn az összeg nem konvex (tartomány illetve sokszög).

Lemma. Minden olyan π egyszerű sokszög, mely a fentiek közül bizonyos c_i szakaszok összege, előállítható egy és csak egy-

féleképen mint egymástól különböző b_i -k (mod 2) összege: $\pi = b_{\lambda_1} + b_{\lambda_2} + \dots + b_{\lambda_h}$. Az eredeti π' konvex sokszög az összes b_i -k összege: $\pi' = b_1 + b_2 + \dots + b_r$.

Bizonyítás. Ha a k_i szakaszok száma $m=1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $m-1$ -re is érvényes s bizonyítsuk be m -re. Legyen c_v a $\pi = c_1 + c_2 + \dots + c_q$ egyszerű sokszögnek olyan oldala, mely a k_m szakaszhoz tartozik; a b_i határok között van pontosan két olyan, melyeknek része c_v , ezek egyikét jelöljük b_1 -gyel s képezzük a $\pi + b_1$ összeget. Mivel π és b_1 egyszerű sokszögek, $\pi + b_1$ bármely csúcsa páros számú oldalnak végpontja, így $\pi + b_1$ vagy egyszerű sokszög, vagy több egyszerű sokszög összege, mint könnyen belátható. Alkalmazzuk ezekre a sokszögekre ismét a fenti eljárást, vagyis adjunk hozzá $\pi + b_1$ -hez egy olyan b_2 -t, melynek $\pi + b_1$ -gyel a k_m -hez tartozó közös c_v szakasza van. Véges sok lépés után eljutunk olyan $\pi + b_1 + b_2 + \dots + b_{p'}$ összeghez, melynek nincsen a k_m -mel közös c_v szakasza; ez az összeg vagy sokszög, vagy sokszögek összege. Ezek a sokszögek az indukciós feltevés szerint kifejezhetők olyan összegekként, melyeknek tagjai a $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ szakaszok által meghatározott konvex tartományok határai; ezek közül a tartományhatárok közül mindegyik egy vagy két b_i -nek az összege (lásd a 17. tétel bizonyítását). Végeredményben tehát $\pi + b_1 + b_2 + \dots + b_{p'}$ előállítható $b_{p'+1} + b_{p'+2} + \dots + b_p$ alakban, vagyis

$$\pi + b_1 + b_2 + \dots + b_{p'} = b_{p'+1} + \dots + b_p,$$

s ebből

$$(*) \quad \pi = b_1 + b_2 + \dots + b_p,$$

hol feltehetjük, hogy a jobboldalon mod 2 egyszerűsített összeg áll, azaz olyan, melynek bármely két tagja különböző.

π -nek fenti (*) előállítása egyértelmű; legyen ugyanis

$$(**) \quad \pi = b_{\lambda_1} + b_{\lambda_2} + \dots + b_{\lambda_h}$$

másik (egyszerűsített) előállítása; a (*) és (**) egyenletek összeadásából adódik

$$(+) \quad b_{\nu_1} + b_{\nu_2} + \dots + b_{\nu_h} = 0;$$

ez az egyenlet azt jelenti, hogy bármely b_{ν_i} tagjához tartozó c_{ν_i} szakasz az összegnek pontosan két b_{ν_i} és b_{ν_j} tagjához tartozik; $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ jelentik az $1, 2, \dots, p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ számok közül azokat, melyek ebben a sorozatban nem fordulnak elő kétszer. Ha a k szakaszok száma $m=1$, nyilván nem áll fenn (+) alakú egyenlet; tegyük fel, hogy $m-1$ számú szakasz esetén sem. Jelöljük β'_i -vel

a $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ szakaszok által a π' belsejében meghatározott konvex tartományokat, s b'_i -vel ezek határait. Tegyük fel, hogy a $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m$ szakaszok által meghatározott β_i tartományok b_i hatáira fennállana a (+) egyenlet. Ha valamelyik b_{v_i} -nek nincsen a k_m -hez tartozó c_i szakasza, akkor a megfelelő β_{v_i} egyben egy β'_μ tartomány is. Ha pedig b_{v_i} -nek van a k_m -hez tartozó c_i szakasza, akkor van még egy β_{v_j} tag, melyhez hozzátartozik c_i ; a megfelelő β_{v_i} és β_{v_j} tartományok összege valamely β'_μ tartomány; eszerint $b_{v_i} + b_{v_j} = b'_\mu$; a (+) egyenletben hasonló módon összeadva bármely két olyan b_{v_i} és b_{v_j} tagot, melyeknek van a k_m -hez tartozó közös szakaszuk, kapunk egy

$$b'_{\mu_1} + b'_{\mu_2} + \dots + b'_{\mu_t} = 0$$

alakú egyenletet, hol a baloldalon álló tagok egymástól különbözök; ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy $m-1$ esetén nem áll fenn (+) alakú vonatkozás. Bebizonyítottuk ilyen módon, hogy adott π sokszögnek (*) alakú előállításra egyértelmű.

A fenti lemma alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

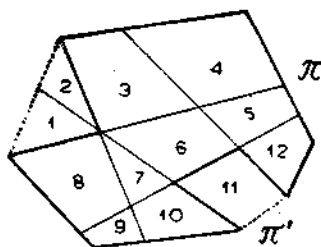
22. tétel. *Egyszerű sokszög a síkot két részre osztja, melyeket a sokszög belsejének és külsejének nevezünk. Bármely két a sokszög belsejében (vagy külsejében) fekvő pont összeköthető olyan a sokszög síkjában haladó törtvonallal, melynek nincs a sokszöggel közös pontja hanem egészen a sokszög belsejében (illetve külsejében) halad. Minden olyan törtvonalnak, mely a sokszög belsejében fekvő pontot annak külsejében fekvő ponttal a sokszög síkjában összeköt, van a sokszöggel közös pontja.*

Bizonyítás. Jelöljük π -vel az adott sokszöget és π' -vel a π csúcsait burkoló konvex sokszöget (21. tétel). π minden csúcsa s ezért minden oldala is a π' konvex sokszögön, vagy π' belsejében fekszik. π -nek a π' belsejében fekvő oldalain át fektessünk olyan $k_1, k_2, \dots, k_m$ szakaszokat, melyeknek végpontjai a π' konvex sokszögön vannak; jelöljük $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ -rel a $k_1, k_2, \dots, k_m$ szakaszok által a π' konvex sokszög belsejében meghatározott konvex tartományokat, s $b_1, b_2, \dots, b_r$ -rel ezek határait. A fenti lemma jelöléseit megtartva, nyilvánvaló, hogy a π sokszög mindegyik oldala vagy valamely c_i szakasz, vagy c_i szakaszok összege, s így a π sokszög is bizonyos c_i -k összege; a lemma szerint tehát a π sokszög kifejezhető egy és csak egyféleképpen mint különböző b_i -k összege:

$$(*) \quad \pi = b_1 + b_2 + \dots + b_p.$$

A megfelelő $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ tartományok összegét a π sokszög belsejének nevezzük; a $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_r$ tartományoknak s a konvex

sokszög külsejének összegét a π sokszög külsejének nevezzük. A síknak minden olyan pontja, mely nem fekszik π -n, az adott értelmezés szerint vagy π belsejéhez, vagy π külsejéhez tartozik; de nem tartozhatik mindkettőhöz. (A 27. ábrán a π sokszöget burkoló π' konvex sokszöget a π oldalain átfektetett szakaszok az



27. ábra.

1—12-vel jelzett konvex tartományokra osztják fel; ezek közül a 3—10 és 12 tartományok összege a π sokszög belseje; az 1, 2, 11 konvex tartományoknak és π' külsejének az összege a π sokszög külseje.)

Bármely két π belsejében fekvő pontot összeköthetünk π belsejében haladó törtvonalal. A β_1 konvex tar-

tomány két tetszőleges pontját összekötő szakasz β_1 -hez tartozik. Ha a fenti (*) egyenleiben $p > 1$, akkor van β_1 határának olyan c_1 oldala, mely nem tartozik π -hez, mert ellenkező esetben $\pi = b_1$ lenne, ellentétben a π egyértelmű előállítására vonatkozó eredményünkkel. Ugyanez a c_1 a $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p$ tartományok közül egyiknek és csak egynek a határához tartozik; jelöljük β_2 -vel ezt a tartományt. Ha P_1 a c_1 szakasznak s P_1 , illetve P_2 a β_1 és β_2 tartománynak egy-egy tetszőleges pontja, akkor a P_1P_2 törtvonalnak minden pontja $\beta_1 + \beta_2$ -hez tartozik. Ha a (*) előállításban $p > 2$, akkor van a $\beta_1 + \beta_2$ határan olyan c_2 szakasz mely a $\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_p$ tartományok közül egyiknek és csak egynek a határához tartozik; jelöljük ezt a tartományt β_3 -mal. Legyen P_2 a c_2 szakasznak s P_3 a β_3 tartománynak tetszőleges pontja; a c_2 szakasz vagy β_1 -nek, vagy β_2 -nek a határához tartozik; az első esetben a $P_1P_2P_3$, a második esetben a $P_1P_2P_3P_4$ törtvonal a $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ -ban a P_1 és P_3 pontokat összeköti. Ezt az eljárást folytatva, szerkesztünk olyan törtvonalat, mely a P_1 pontot a $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p$ bármely pontjával összeköti s melynek nincs a π sokszögön pontja. Hasonlóan (amennyiben a π' külsejét is a β_i tartományokéval meg-egyező szerephez juttatjuk) szerkesztünk olyan törtvonalat, mely bármely két a π külsejében fekvő pontot a π külsejében összeköt.

Legyen P a π sokszög belsejében, Q a π külsejében fekvő pont. Jelöljük $B_1, B_2, \dots, B_k$ -vel a PQ egyenesen fekvő c_i szakaszoknak a PQ szakaszhoz tartozó végpontjait, és a többi c_i szakaszoknak a PQ szakasszal való metszéspontjait; legyen ezeknek elrendezése $PB_1B_2 \dots B_kQ$. A PB_1 szakasz a P pontot tartalmazó

β , konvex tartományhoz, vagy egy ilyennek a határához tartozik, s ezért B_1 vagy a π sokszögön, vagy a π belsejében fekvő pont. Ha B_1 a π belsejében fekszik, hasonlóan adódik, hogy B_2 vagy a π sokszögön, vagy π belsejében fekszik, és így tovább. Így tehát a $B_1, B_2, \dots, B_k$ pontok közül legalább egyik a π sokszöghöz tartozik, különben Q is π belsejében fektüdnék, feltevésünkkel ellentétben. — Ha a π sokszög síkjában fekvő $P \dots P' Q' \dots Q$ törtvonal a π sokszög belsejében fekvő P pontot a π külsejében fekvő Q ponttal köti össze, jelentse Q' a törtvonalnak P -től számított első olyan csúcsát, mely nem tartozik π belsejéhez, és P' az ezt megelőző csúcsát; vagy π -hez tartozik a Q' pont, vagy π külsejéhez, s ebben az esetben, előbbi eredményünk szerint, van a $P'Q'$ szakasznak π -vel közös pontja.

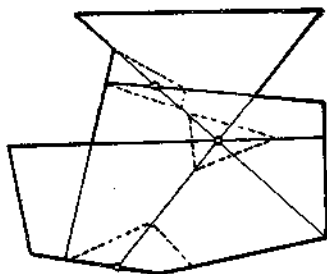
A 22. tétel bebizonyításánál alkalmazott módszer VEBLENTŐL származik.

A fenti bizonyításból közvetlenül adódik a következő tétel:

23. tétel. *Egyszerű sokszög bármely A pontját a sokszög belsejében, vagy külsejében fekvő bármely P ponttal összeköthetjük olyan törtvonallal, melynek a sokszöggel nincs más közös pontja.*

Bizonyítás. Legyen P a sokszög belsejében fekvő pont. A sokszög belsejét véges sok konvex tartomány összegeként állítottuk elő; ezek között van legalább egy olyan β konvex tartomány, melynek határához tartozik az A pont. A β tartomány P' pontját A -val összekötő szakasznak nincs a sokszöggel közös pontja. A 22. tétel értelmében összekötjük a P és a P' pontokat a sokszög belsejében törtvonallal; ez és a $P'A$ szakasz együtt olyan törtvonalat alkotnak, mely a P pontot a sokszög belsejében az A ponttal összeköti, amint azt a fenti tétel állítja. — Hasonlóan járunk el a sokszög külsejében fekvő pont esetében.

Megjegyzés. A 22. tétel bebizonyítása során a π egyszerű sokszög belsejét konvex tartományok összegeként állítottuk elő. Ezt az előállítást sokféleképpen módosíthatjuk, például azáltal, hogy a konvex tartományok közül egyeseket szakaszokkal konvex résztartományokra osztunk fel (17. tétel), vagy hogy közülök többet, melyeknek összege konvex tartomány, egyesítünk (28. ábra). Ilyen módosítással nevezetesen elérhetjük azt, hogy valamely a π belsejében fekvő pont a konvex résztartományok közül egyik-

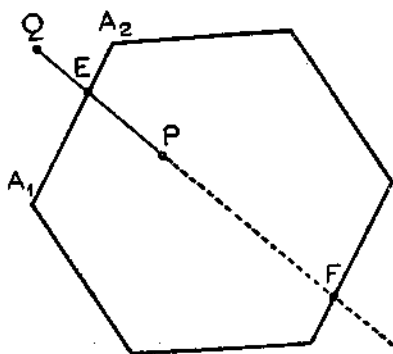


28. ábra.

nek (mégpedig egy három-, vagy egy négyszögű tartománynak) belső pontja legyen, vagy hogy π egyik oldalának valamely pontja a konvex résztartományok közül csak egynek a határához tartozzék. A módosítás után is fennáll az a tulajdonság, hogy bármely résztartomány határának a π sokszögön fekvő szakasza egy, a π sokszög belsejében fekvő szakasza pedig két résztartomány határához tartozik.

24. tétel. Ha a π egyszerű sokszög síkjában fekvő PQ szakasznak a π sokszöggel pontosan egy E közös pontja van, s ez nem csúcsa a sokszögnek, akkor π a P és Q pontokat elválasztja egymástól, vagyis a P, Q pontok közül egyik a sokszög belsejéhez, a másik annak a külsejéhez tartozik.

Bizonyítás. (29. ábra.) Ha π konvex sokszög, és A_1A_2 π -nek az az oldala, melyhez az E pont tartozik, akkor a PQ egye-



29. ábra.

nesnek különböző oldalán fekszenek az A_1 és A_2 pontok, s ezért a PQ egyenesnek a π sokszöggel E -n kívül egy és csak egy F közös pontja van (12. és 13. tétel). Erre feltevésünk folytán az FPQ , vagy az FQP elrendezés áll fenn; tegyük fel az előbbit. Az FPQ és PEQ elrendezésekből következik a 3. tétel szerint az EPF és FEQ elrendezés; tehát P a π sokszög belsejében, Q annak kül-

sejében fekszik (lásd a 14. tétel bizonyítását).

Ha π nem konvex sokszög, π belsejét előállítjuk $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ konvex tartományok összegeként olyan módon, hogy E csak egy konvex résztartomány határához tartozzék (l. a fenti Megjegyzést); jelöljük ezt β_1 -gyel. Legyen P' a PE szakasznak, és Q' a QE szakasznak olyan pontja hogy a $P'E$ és a $Q'E$ szakaszoknak E -n kívül egyik pontja vagy végpontja sem tartozik a β_i tartományok közül valamelyiknek a határához. A konvex tartományokra már bebizonyított tételünk szerint a P' és Q' pontok közül egyik és csak egyik tartozik a β_1 tartományhoz, mondjuk P' . A Q' pont nem tartozhatik valamely másik β_i tartományhoz sem, különben a $Q'E$ szakasz is β_1 -hez, s így az E pont két különböző β_1 és β_i tartománynak a határához tartoznék, feltevésünkkel ellentétben. Eszerint P' a π sokszög belsejéhez, Q' annak külsejéhez tartozik. Mivel pedig a PP' és QQ'

vonaldaraboknak nincs a π sokszöggel közös pontjuk, következik, hogy P a π sokszög belsejéhez, Q annak külsejéhez tartozik.

25. tétel. Legyen π egyszerű sokszög, és l a π sokszög síkjában fekvő egyszerű törtvonal. Tegyük fel, hogy π bármely oldalának l bármely oldalával legfeljebb egy közös pontja van, s hogy π vagy l egyik csúcsa sem tartozik l -hez, illetve π -hez. A π sokszög az l törtvonal végpontjait elválasztja egymástól, vagy nem, aszerint, hogy l -nek a π sokszöggel páratlan, vagy páros számú közös pontja van.

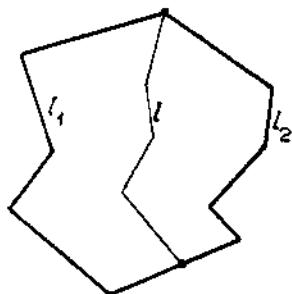
A tétel az l törtvonal oldalainak számára vonatkozó teljes indukcióval következik a 24. tételből.

7. §. Egyszerű sokszög belsejének felosztása.

A 22. tétel bebizonyításánál használt lemma alkalmazásával adódik a következő

26. tétel. A π egyszerű sokszög belsejét olyan l egyszerű törtvonal, melynek végpontjai a π sokszöghöz, többi pontjai a π belsejéhez tartoznak, két részre osztja fel.

Bizonyítás (30. ábra). Az l törtvonal két végpontja, melyekről feltesszük, hogy egymástól különbözők, a π sokszöget két l_1 és l_2 törtvonalra osztja fel; ezek közül mindegyik l -vel egyszerű sokszöget alkot; jelöljük ezeket $\pi_1 = l + l_1$ és $\pi_2 = l + l_2$ -vel. — Bármely olyan pont, mely π_1 konvex burkolójának belsejében fekszik, π konvex burkolójának is a belsejében van; ha tehát Q olyan pont, mely π konvex burkolójának külsejéhez tartozik, akkor Q a π_1 -nek és π -nek is a külsejéhez tartozik. Kössük össze Q -t az l törtvonalnak a végpontjaitól különböző valamely P pontjával olyan törtvonallal, melynek P -n kívül minden pontja π_1 külsejében van (23. tétel). Mivel P a π sokszög belsejében fekszik, a 22. tétel szerint a P és Q pontokat összekötő törtvonalnak van π -vel, tehát l_2 -vel közös pontja. Ebből következik, hogy az l_2 törtvonal, melynek végpontjain kívül nincs π_1 -gyel más közös pontja, π_1 külsejében s hasonlóan l_1 a π_2 sokszög külsejében fekszik. A 23. tétel szerint π_1 belsejének bármely pontját összeköthetjük π_1 belsejében az l és az l_1 törtvonalak bármely pontjával; ebből következik, hogy π_1 belsejének minden pontja π belsejéhez és π_2 külsejéhez tartozik;



30. ábra.

hasonlóan π_2 belsejének minden pontja π belsejéhez és π_1 külsejéhez tartozik. — Másrészt minden a π belsejéhez tartozó pont, mely nem fekszik az l törtvonalon, vagy π_1 -nek, vagy π_2 -nek belsejéhez tartozik. Állítsuk elő ugyanis π_1 és π_2 belsejét konvex tartományok összegeként; evégből a π -t burkoló π' konvex sokszög belsejét osszuk fel konvex résztartományokra a π sokszög és az l törtvonal oldalain átfektetett szakaszokkal, melyeknek végpontjai π' -höz tartoznak; jelöljük a résztartományokat határoló konvex sokszögek közül $b_1, b_2, \dots, b_r$ -rel, illetve $b'_1, b'_2, \dots, b'_r$ -vel azokat, melyeknek összege rendre π_1 , illetve π_2 : $\pi_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_r$ és $\pi_2 = b'_1 + b'_2 + \dots + b'_r$. Jelöljük a b_i illetve a b'_i által határolt konvex tartományt β_i -vel, illetve β'_i -vel. Előbbi eredményünk szerint a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_r$ tartományok valamennyien egymástól különböznek. Ezeknek összege a π sokszög belseje, mivel

$$b_1 + b_2 + \dots + b_r + b'_1 + b'_2 + \dots + b'_r = \\ = \pi_1 + \pi_2 = l + l_1 + l + l_2 = l + l_2 = \pi \pmod{2}.$$

Eszerint π_1 és π_2 belsejének összege a π sokszög belseje.

27. tétel. Ha az α síkban fekvő $\pi_1 = l_1 + l$ és $\pi_2 = l_2 + l$ egyszerű sokszögeknek közös része az l törtvonal, s ha az l_1 és l_2 törtvonalak végpontjaiktól eltekintve a π_2 illetve a π_1 sokszögnek külsejében fekszenek, akkor az adott két sokszög közös l törtvonala az $l_1 + l_2$ egyszerű sokszögnek a belsejében fekszik, végpontjait kivéve (30. ábra).

Bizonyítás. A $\pi_1 = l_1 + l$ sokszög belsejének tetszőleges A pontját s l_1 -nek végpontjaitól különböző B -pontját kössük össze a π_1 belsejében haladó t törtvonallal (23. tétel). Mivel feltevés szerint l_2 a π_1 sokszög külsejében fekszik, t -nek nincs a $\pi_2 = l_2 + l$ sokszöggel közös pontja; mivel pedig B , tehát A is a π_2 sokszög külsejében fekszik. Eszerint π_1 és π_2 belsejének nincs közös pontja; mint a 26. tétel bebizonyításánál, kiadódik ebből, hogy π_1 és π_2 belsejének összege az $l_1 + l_2$ egyszerű sokszög belseje, mivel

$$\pi_1 + \pi_2 = l_1 + l + l_2 + l = l_1 + l_2 \pmod{2};$$

ebből következik, hogy az l törtvonal végpontjaitól eltekintve az $l_1 + l_2$ sokszög belsejében fekszik.

A 27. tétel más megfogalmazása a következő:

Ha l_1, l_2 és l az α síkban fekvő egyszerű törtvonalak, melyek a sík két adott pontját összekötik, de ezeken kívül bármely kettőnek nincs közös pontja, akkor a három törtvonal közül vala-

melyik a másik kettő által alkotott egyszerű sokszögnek a belsejéhez tartozik.

A 22. tétel bebizonyítása során egyszerű sokszög belsejét véges sok konvex tartomány összegeként állítottuk elő; ezek közül mindegyiket felosztjuk háromszögekre. (azaz háromszög-tartományokra) a határát alkotó konvex sokszög egyik csúcsából kiinduló átlóival (19. tétel); ilyen módon az adott (nem konvex) sokszög belsejének háromszögekre való felosztásához jutunk. Meg fogjuk mutatni, hogy egyszerű sokszög belsejét olyan módon is feloszthatjuk háromszögekre, hogy mindegyik háromszög csúcsai az adott sokszögnek csúcsai legyenek.

Értelmezés. *Egyszerű sokszög átlóján* olyan szakaszt értünk, melynek pontjai a sokszög belsejéhez tartoznak, végpontjai pedig a sokszögnek csúcsai.

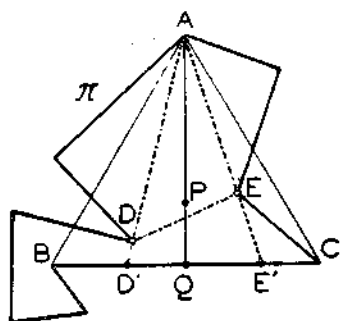
28. tétel. *Ha a π egyszerű sokszög oldalainak száma háromnál nagyobb, van a sokszögnek átlója.*

Bizonyítás. Legyen A a sokszög valamely csúcsa, és P a sokszög belsejének olyan pontja, hogy az AP szakasz minden pontja π belsejéhez tartozik (l. a 23. tétel bizonyítását). Az $\vec{AP}$ félsugárnak van a sokszög konvex burkolójához tartozó pontja (16. tétel), van tehát a π sokszöggel közös pontja is (22. tétel); a sokszögnek az $\vec{AP}$ félsugáron fekvő csúcsai, továbbá a sokszög oldalainak az $\vec{AP}$ félsugárral való metszéspontjai közül jelentse Q azt, mely P -hez legközelebb fekszik. Az AQ szakasz a π sokszög belsejéhez tartozik; ha Q a sokszögnek csúcsa, akkor AQ annak átlója. — Ha Q nem csúcsa a sokszögnek, legyen BC a sokszögnek az az oldala, melyhez a Q pont tartozik; mivel a B és C pontok az AP egyenesnek különböző oldalán vannak, következik, hogy az A, B, C pontok nem fekszenek egy egyenesen.

Ha a π sokszög valamely c oldalának R pontja az ABQ (vagy az ACQ) háromszögnek belsejében fekszik, akkor c -nek legalább egyik végpontja is ennek a háromszögnek a belsejéhez tartozik. A 15. tétel szerint ugyanis a c -n átfektetett egyenesnek van az ABQ háromszöggel két közös pontja E és F , s ezek elrendezése ERF . Az E és F pontok közül legalább egyik, mondjuk F , vagy az AQ , vagy a BC szakaszhoz tartozik, s mivel AQ a π sokszög belsejében fekszik, BC pedig a sokszög oldala, az F pont nem lehet a sokszög c oldalának pontja, vagy végpontja. Ebből

következik, hogy c egyik végpontja az RF szakaszon, tehát az ABQ háromszög belsejében fekszik.

A π sokszögnek azokat a csúcsait, melyek az ABC háromszöghöz, vagy annak belsejéhez tartoznak, (kivéve az A csúcsot) vetítsük az A pontból a BC egyenesre; vagyis minden ilyen D csúcsra nézve határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ félsugárnak a BC egyenessel való D' metszéspontját, melyet a D vetületének nevezünk (31. ábra).



31. ábra.

A BQ , illetve a QC vonaldarabokra eső vetületek közül jelöljük D' -vel és E' -vel azokat, melyek Q -hoz legközelebb fekszenek; az előző bekezdés szerint az ADE' háromszög belsejében nincsen π -nek pontja. Jelentse D , illetve E , π -nek az AD' , illetve az AE' vonaldarabon fekvő és A -tól különböző csúcsai közül azokat, melyek legközelebb fekszenek A -hoz. Az ADE háromszög valamely pontját a P -vel összekötő szakasznak nincs a π -vel közös pontja,

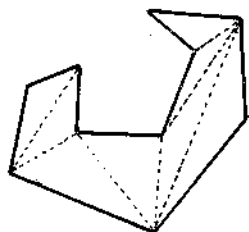
s így az ADE háromszög bármely pontja vagy π -hez, vagy π belsejéhez tartozik. Az A, D, E pontok a π sokszögnek csúcsai, viszont az AD, AE, DE szakaszok egyikéhez sem tartozik π -nek valamelyik csúcsa; ezért a három szakasz közül mindegyik a π sokszögnek oldala, vagy átlója. Mindhárom szakasz nem lehet π -nek oldala, különben π az ADE háromszöggel azonos lenne, ellentétben azzal a feltételünkkel, hogy π oldalainak száma háromnál nagyobb. Következik tehát, hogy az AD, AE, ED szakaszok közül legalább egyik a π sokszögnek átlója. Ezzel a 28. tételt bebizonyítottuk.

Jelöljük a π sokszög csúcsait $A_1, A_2, \dots, A_n$ -nel s tegyük fel, hogy A_1A_k a sokszögnek átlója. Az $A_1A_2 \dots A_k$ törtvonal és az A_kA_1 szakasz egyszerű sokszöget alkotnak, hasonlóan az $A_kA_{k+1} \dots A_nA_1$ törtvonal és az A_1A_k szakasz; jelöljük ezeket a sokszögeket π_1 -gyel és π_2 -vel; ezek közül mindegyiknek a belseje a π sokszög belsejéhez tartozik; másrészt π belsejének bármely pontja vagy az A_1A_k szakaszhöz, vagy a π_1 és π_2 sokszögek közül egyiknek és csak egyiknek a belsejéhez tartozik (26. tétel). Ha π_1 (vagy π_2) oldal-száma nagyobb mint három, megszerkesztjük ennek a sokszögnek egy átlóját (ez egyben az eredeti π sokszögnek is átlója), és így

tovább, míg végül az eredeti sokszög belsejének átlókkal háromszögekre való felosztásához jutunk. Jelöljük r -rel ezeknek a háromszögeknek, s ennek megfelelően $r-1$ -gyel az alkalmazott átlóknak a számát. Mivel az adott n -szög mindegyik oldala egy háromszöghöz, s mindegyik átló két háromszöghöz tartozik, a háromszögek oldalainak száma: $3r = n + 2(r-1)$; ebből következik, hogy a háromszögek száma $r = n-2$, és az átlók száma $n-3$. — Bebizonyítottuk a következő tételt:

29. tétel. *Egyszerű sokszög belsejét átlókkal háromszögekre oszthatjuk fel. (Lásd a 32. ábrát.)*

Értelmezés. *Sokszögű tartományon* egyszerű sokszög belsejét értjük; a sokszöget a *tartomány határának* nevezzük. — Legyenek $\pi, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i$ egyszerű sokszögek, és jelöljük rendre $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$ -vel ezeknek a belsejét. Ha a β_i tartományok valamennyien π belsejéhez tartoznak, s másrészt π belsejének bármely pontja vagy valamely π_i sokszöghöz,



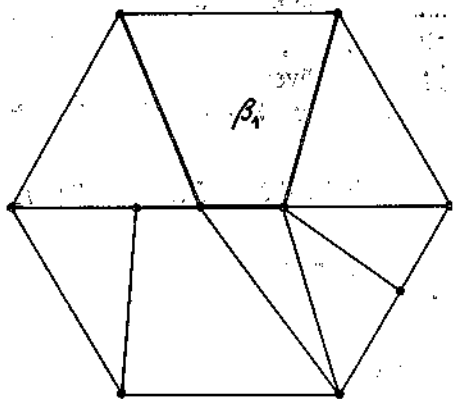
32. ábra.

vagy pedig egy és csak egy β_i tartományhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy a β tartomány a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$ tartományok összege, s hogy utóbbiak a β tartomány felosztását alkotják. A *felosztás csúcspontjának* nevezünk minden olyan pontot, mely legalább egyik π , vagy π_i sokszögnek csúcsa. *Élek* nevezünk minden olyan a π , vagy π_i sokszög oldalához tartozó szakaszt, melynek belső pontjai különböznek a felosztás csúcspontjaitól, s végpontjai a felosztásnak csúcspontjai. A β_i tartományokat a *felosztás lapjainak* nevezzük. — A lapok, élek és csúcsok számát jelöljük rendre $l, é, c$ -vel.

30. tétel. *Sokszögű tartomány felosztását alkotó lapok és csúcsok számának összege eggyel nagyobb az élek számánál: $l + c = é + 1$. (Ez a sokszögű síktartományokra vonatkozó EULER-féle tétel.)*

Bizonyítás. Valamely (sokszögű) *tartomány keresztmetszetén* olyan egyszerű törtvonalat értünk, melynek végpontjai a tartomány határának két különböző pontja, s többi pontjai a tartomány belsejében fekszenek. A β tartománynak a β_i tartományokra való felosztását olyan módon fogjuk származtatni, hogy a β tartományt keresztmetszettel két tartományra osztjuk fel (26. tétel), ezeket a tartományokat ismét keresztmetszetekkel felosztjuk, és így tovább. Meg fogjuk mutatni,

hogy az egymás után nyert felosztások közül bármelyikre nézve fennáll az $l+c=\acute{e}+1$ vonatkozás. — Tekintsük először a β tartománynak azt a felosztását, melynek egyetlen lapja maga β , s melynek



33. ábra.

csúcsai és élei a π sokszög csúcsai és oldalai; ebben az esetben $c=\acute{e}$, $l=1$, tehát $l+c=\acute{e}+1$. Módosítsuk ezt a felosztást azáltal, hogy β határán felvesszük a végleges felosztás csúcsait s az ezek által meghatározott éleket; ebben az esetben is $c=\acute{e}$ és $l=1$. — Legyen most β_1 az adott β_i tartományok közül egyik olyan, hogy az azt határoló π_1 sokszögon fekvő egyik éle a felosztásnak

a π sokszöghöz tartozik. A π_1 sokszög véges sok olyan törtvonal összege, melyek vagy a π sokszöghöz tartoznak, vagy a β tartománynak keresztmetszetei. Legyen λ a π_1 sokszöghöz tartozó olyan törtvonal, mely β -nak keresztmetszete; a λ keresztmetszet a β tartományt két tartományra osztja fel (26. tétel), tehát az előbbi felosztáshoz képest a lapok száma eggyel növekszik. A λ -hoz tartozó élek számát jelöljük m -mel, akkor a λ -hoz tartozó csúcsok száma $m+1$; ezek közül azt a kettőt, melyek λ -nak a végpontjai, már az előbbi felosztásnál számítottuk, úgyhogy λ alkalmazásakor a lapok száma 1-gyel, az élek száma m -mel, a csúcsok száma $m-1$ -gyel növekszik, vagyis $l+c-\acute{e}$ értéke változatlan marad. Ezt az eljárást a β_1 elhagyása után megmaradó egy, vagy több tartományra alkalmazzuk, s. i. t., míg végre eljutunk a β tartománynak a $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$ tartományokra való felosztásához, s mivel minden keresztmetszet alkalmazásakor $l+c-\acute{e}$ értéke változatlan marad, következik, hogy a végleges felosztásra vonatkozóan $l+c-\acute{e}$ értéke ugyanaz, mint az eredeti felosztásra vonatkozóan, vagyis egyenlő 1-gyel.

Fenti eredményeink alapján konvex sokszögek néhány jellemző tulajdonságát állapítjuk meg a következő tételekben.

31. tétel. Legyen $\pi=A_1A_2\dots A_n$ egyszerű sokszög, és legyen π' ennek a konvex burkolója (21. tétel). Jelöljük $i_1, i_2, \dots, i_m$ -mel azokat az indexeket nagyság szerint rendezve ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$),

melyeknek megfelelő A_{i_μ} csúcsok π' -höz tartoznak. Az A_{i_μ} pontoknak a π' konvex sokszögön való ciklikus elrendezése $(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_m})$.

Bizonyítás. Állításunk igazolására meg kell mutatnunk azt, hogy a π' konvex sokszögnek az A_{i_1} és A_{i_2} pontok által meghatározott két része közül az egyikhez nem tartozik más A_{i_μ} pont. Ellenkező esetben ugyanis a π sokszögnek $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_2}$ törtvonala (illetve oldala) végpontjaitól eltekintve a π' konvex sokszög belsejében feklődnek, s a 26. tétel szerint π' belsejét két olyan részre osztaná fel, melyek közül mindegyiknek a határán volna π -nek legalább egy A_{i_μ} és A_{i_ν} csúcsa ($2 < \mu < \nu$). A π sokszög $A_{i_\mu}A_{i_\mu+1}\dots A_{i_\nu}$ törtvonala, mely csúcsaitól eltekintve π' belsejében fekszik, volna közös pontja π -nek $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_2}$ törtvonalaival, ellentétben azzal a feltételünkkel, hogy π egyszerű sokszög.

Értelmezés. A következőkben egyszerű sokszögekről fogjuk tenni, hogy a sokszög két-két szomszédos oldala nem fekszik egy egyenesen. Ha az $A_1A_2\dots A_n$ egyszerű sokszög A_1A_2 és A_2A_3 oldalai egy egyenesen fekszenek, ezeket az A_1A_3 oldallal, s az adott sokszöget az $A_1A_3A_4\dots A_n$ sokszöggel helyettesítjük. Véges sok ilyen redukciót alkalmazva olyan egyszerű sokszöghöz jutunk, melynek pontjai az adott sokszög pontjaival megegyeznek, s amely eleget tesz a fenti feltételnek.

Értelmezés. A $\pi = A_1A_2\dots A_n$ egyszerű sokszög A_i csúcsát konvexnek, vagy konkávnak nevezzük aszerint, hogy az $A_{i-1}A_i$ oldal meghosszabbításán fekvő olyan A_iB vonaladarab, melynek nincs a sokszöggel közös pontja — A_i -n kívül — a π sokszög külsejéhez, vagy belsejéhez tartozik.

A fenti értelmezés igazolására, legyen például $i=2$, s vegyünk fel az A_1A_2 és az A_2A_3 oldalak A_2 felőli meghosszabbításain olyan B és C pontokat, hogy az A_2B , A_2C vonaladaraboknak A_2 -n kívül nincs π -vel közös pontjuk, s hogy π egyik csúcsa sem tartozik a BC szakaszhoz, sem az A_2BC háromszög belsejéhez. A BC szakasznak nincs π -vel közös pontja, tehát az A_2B és az A_2C vonaladarabok A_2 -től eltekintve mindketten a π sokszög belsejéhez, vagy mindketten π külsejéhez tartoznak.

Az értelmezésből következik, hogy egy egyszerű sokszög minden olyan csúcsa konvex, mely a sokszög konvex burkolójának is csúcsa. Ezért minden egyszerű sokszögnek legalább három konvex csúcsa van.

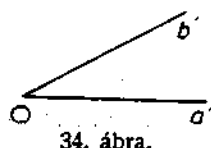
32. tétel. Ha egy egyszerű sokszög minden csúcsa konvex, akkor a sokszög konvex.

Bizonyítás. Ha a $\pi = A_1 A_2 \dots A_n$ egyszerű sokszög nem konvex, legyen A_i és A_k a π konvex burkolójának két olyan szomszédos csúcsa, melyek π -n nem szomszédosak, vagyis $i_2 \neq i_1 \pm 1$. Az A_i és A_k pontok által a π sokszögön meghatározott két törtvonal közül mindegyik az $A_i A_k$ szakasszal egy-egy π_1 , illetve π_2 egyszerű sokszöget alkot; ezek közül egyiknek, mondjuk π_1 -nek belseje egyenlő a másik belsejének és π belsejének az összegével (27. tétel). A fentiek szerint π_2 -nek van A_i -en és A_k -n kívül legalább még egy A_j konvex csúcsa; az értelmezés szerint az $A_{j-1} A_j$ oldalnak A_j felől való meghosszabbításán alkalmasan felvett vonalдарab π_2 külsejéhez, s mivel π_1 -nek ezért π -nek is belsejéhez tartozik; az értelmezés szerint tehát a π sokszög A_j csúcsa *konkáv*. Ezzel a 32. tételt bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy a π egyszerű sokszög A_2 csúcsa *konkáv*; az $A_1 A_2$ és az $A_2 A_3$ oldalakon vegyünk fel egy-egy olyan R és R' pontot, hogy π egyik oldala se feküdjék az RR' egyenesen. Az RR' egyenes egyik oldalán fekszik A_1 és A_3 , a másikon A_2 és π -nek legalább még egy A_j csúcsa (alkalmazzuk a 16. tételt π konvex burkolójára); az $A_3 A_4 \dots A_j$ és az $A_j A_{j+1} \dots A_m A_1$ törtvonalaknak legalább egy-egy, s ezért a π sokszögnek legalább négy közös pontja van az RR' egyenessel. — Legyenek P és P' az RR' egyenes olyan pontjai, melyeknek elrendezése $PRRP'$, s az RP és az $R'P'$ vonalдарaboknak R -en, illetve R' -n kívül nincs π -vel közös pontjuk; P és P' a π belsejében fekszenek, mint a konkáv csúcs értelmezése alapján könnyen belátható. Meggondolásunk eredménye a következő

33. tétel. *Ha egy egyszerű sokszögnek minden olyan egyenessel, amelyen nem fekszik rajta a sokszög valamely oldala, legfeljebb két közös pontja van, s ugyancsak ha a sokszög belsejének bármely két pontját összekötő szakasz a sokszög belsejében fekszik, akkor a sokszög konvex.*

8. §. Sugársor ciklikus rendezése.



34. ábra.

Értelmezés. Szögön értünk valamely O pontból kiinduló két a' és b' félsugarat, melyek nem tartoznak egy egyeneshez, hozzászámítva az O pontot is. O a szög csúcsa, az a' , b' félsugarak a szög szárai. A szöget $\sphericalangle(a', b')$, vagy $\sphericalangle(b', a')$ jellel fogjuk jelölni (34. ábra).

34. tétel. Az $\angle(a', b')$ szög a síkot, melyben az a', b' félsugarak fekszenek, két részre osztja.

Bizonyítás. Jelöljük a és b -vel az a' és b' félsugarakon átfektetett egyeneseket, a'' és b'' -vel ezeknek az O pont által meghatározott másik félsugarait. Az a és b egyenesek által meghatározott síkot jelöljük α -val. Az a (illetve a b) egyenes pozitív oldalán értjük azt az általa az α síkban meghatározott félsíkot, mely a b' (illetve az a') félsugarat tartalmazza. A síknak azok a pontjai, melyek mindkét egyenesnek a pozitív oldalán fekszenek, alkotják az $\angle(a', b')$ szög belsejét; a síknak azok a pontjai, melyek az a és b egyenesek közül legalább egyiknek a negatív oldalán fekszenek, alkotják az $\angle(a', b')$ szög külsejét. Bármely két a szög belsejében fekvő pontot összekötő szakasz összes pontjai a szög belsejéhez tartoznak a 12. tétel folytán. Bármely a szög külsejében fekvő pontot az a'' (vagy a b'') félsugár valamely pontjával összekötő szakasz pontjai a szög külsejéhez tartoznak; ezért két tetszőleges a szög külsejében fekvő pontot összeköthetünk egymással a szög külsejében fekvő törtvonnallal. — Ha a P pont a szög belsejében, a Q pont a szög külsejében fekszik, akkor az értelmezés szerint P az a és b egyenesek közül mindegyiknek a pozitív oldalán, Q pedig legalább az egyiknek, például a -nak a negatív oldalán fekszik; a PQ szakasznak van tehát az a egyenessel közös pontja: A . Ha a PQ szakasznak nincs a b egyenessel közös pontja, akkor A a b egyenesnek a pozitív oldalán, s ezért az a' félsugáron fekszik. Ha pedig a PQ szakasznak van a -val és b -vel is közös pontja: A és B , ezek vagy egybeesnek O -val, vagy egymástól különbözők; ebben az esetben elrendezésük legyen például $PABQ$, ekkor A az a' félsugáron, B pedig a b'' félsugáron fekszik. Eszerint bármely olyan szakasznak, melynek egyik végpontja a szög belsejében, másik végpontja a szög külsejében fekszik, van a szöggel egy és csak egy közös pontja. Ebből már ismételt alkalommal meggondolás szerint adódik, hogy bármely törtvonnalnak, mely a szög síkjában a szög belsejéhez tartozó pontot a szög külsejéhez tartozó ponttal köt össze, van a szöggel közös pontja.

A fenti bizonyítás során adódott a következő.

35. tétel. Ha a P pont az $\angle(a', b')$ szög belsejéhez, a Q pont annak külsejéhez tartozik, akkor a PQ szakasznak van a szöggel egy és csak egy közös pontja; ez vagy a szög csúcsával azonos, vagy a szög valamelyik szárához tartozik.

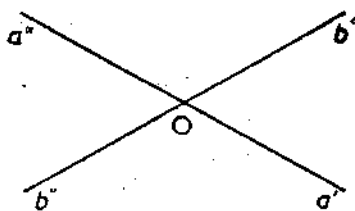
Az értelmezésekből közvetlenül adódik a következő

36. tétel. Ha A és B az $\sphericalangle(a', b')$ szög a' és b' szárain fekvő pontok, akkor az AB szakasz pontjai az $\sphericalangle(a', b')$ szög belsejéhez tartoznak.

37. tétel. Ha A és B az $\sphericalangle(a', b')$ szög a' és b' szárain fekvő pontok, bármely a szög O csúcsából kiinduló s a szög belsejében haladó c' félsugárnak van az AB szakasszal közös pontja.

Bizonyítás. Legyen P a c' félsugárnak tetszőleges pontja; ha az OP szakasznak egyik pontja, vagy végpontja sem tartozik az AB egyeneshez, akkor a P pont az OAB háromszög belsejében fekszik, s így a 15. tétel szerint az $\vec{OP}$ félsugárnak van a háromszög AB oldalával közös pontja.

Értelmezés. Két olyan szöget, melyeknek egyik száruk közös, másik száruk pedig egy egyenesnek két különböző félsugara, egymás *mellékszöge*inek nevezünk. — Két olyan szöget, melyeknek szárai két egymást metsző egyenesnek két-két különböző félsugara, egymás *csúcsszöge*inek nevezünk.



35. ábra.

A fenti jelölések megtartásával $\sphericalangle(a', b')$ és $\sphericalangle(a', b'')$ mellékszögek, $\sphericalangle(a', b')$ és $\sphericalangle(a'', b'')$ csúcsszögek (35. ábra).

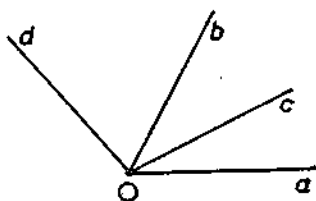
Az $\sphericalangle(a', b'')$ szög belsejéhez tartoznak a síknak azok a pontjai, melyek a b egyenes pozitív oldalán és az a egyenes negatív oldalán fekszenek, stb.

Az a, b egyenesek együtt a síkot négy részre osztják, ezek rendre az $\sphericalangle(a', b')$, $\sphericalangle(a', b'')$, $\sphericalangle(a'', b')$, $\sphericalangle(a'', b'')$ szögek belseje.

Ha c tetszőleges az O ponton áthaladó egyenes, mely különböző a -tól és b -től, s ha c -nek az O pont által meghatározott két félsugara közül egyik az $\sphericalangle(a', b')$ szög belsejében fekszik, akkor c -nek másik félsugara az $\sphericalangle(a', b')$ csúcsszögeinek, vagyis az $\sphericalangle(a'', b'')$ szögnek a belsejében fekszik. Ha ugyanis P és P' a c egyenesnek két olyan pontja, melyeket az O pont a c egyenesen elválaszt, akkor P és P' az a egyenesnek is, a b egyenesnek is különböző oldalán fekszenek.

Értelmezés. Az α síkhoz és az O ponthoz tartozó *sugársoron* értjük az α síkban fekvő s az O pontból kiinduló félsugarak összességét. — Ugyancsak *sugársornak* nevezzük az α síkban fekvő és az O ponton áthaladó egyenesek összességét is.

Értelmezés. Legyenek a, b, c, d az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugarak. Az a, b félsugarak az α síkot két részre osztják (12. és 34. tétel); ha ezek közül a c félsugár az egyikhez, a d a másikhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy az a, b félsugarak a c, d félsugarakat egymástól elválasztják. Ez az eset áll fenn 1. ha a és b ugyanannak az egyenesnek az O pont által meghatározott két félsugara, a c és d félsugarak pedig ennek az egyenesnek különböző oldalán fekszenek, 2. ha a és b nem fekszenek egy egyenesen, és a c, d félsugarak közül egyik az $\angle(a, b)$ szög belsejében, a másik annak külsejében fekszik (36. ábra).



36. ábra.

38. tétel. Ha a, b, c, d az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugarak, melyek közül az a, b félsugarak elválasztják egymástól a c, d félsugarakat, akkor viszont a c, d félsugarak is elválasztják egymástól az a, b félsugarakat.

Bizonyítás. Ha először c és d nem fekszenek egy egyenesen, akkor a c és d félsugarak egy-egy tetszőleges C és D pontját összekötő CD szakasznak van a 12. vagy a 35. tétel szerint az a, b félsugarak közül egyikkel, mondjuk a -val, közös pontja; a 36. és 37. tétel értelmében tehát a a (c, d) szög belsejéhez, b annak külsejéhez tartozik. — Ha másodszor c és d egy egyenesnek az O pont által meghatározott két félsugara, akkor a és b ennek az egyenesnek különböző oldalán fekszik; ellenkező esetben ugyanis a c és d félsugarak mindketten az (a, b) szög külsejéhez tartoznának (37. tétel), feltevésünkkel ellentétben; tehát ebben az esetben is elválasztják egymástól a c és d félsugarak az a és b félsugarakat. — Hasonló megfontolással adódik, hogy az a, c félsugarak nem választják el egymástól a b és d félsugarakat.

Értelmezés. Ha a, b, c, d az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugarak, melyek közül az a és b félsugarak elválasztják egymástól a c és d félsugarakat, akkor azt mondjuk, hogy a sugársor a, b, c, d elemeire az $(acbd)$ ciklikus elrendezés áll fenn. Az értelmzés szerint, s a 38. tételre való tekintettel, az $(acbd)$, $(cbda)$, $(dbca)$ ciklikus elrendezések megegyeznek egymással; ezek közül az elsőből a másodikat az elemek ciklikus felcserélésével, az elsőből a harmadikat az elemek sorrendjének megfordításával kapjuk. Eszerint

tehát ugyanazt a ciklikus elrendezést fejezik ki a következő jelek: $(acbd)$, $(cbda)$, $(bdac)$, $(dacb)$, $(adbc)$, $(dbca)$, $(bcad)$, $(cadb)$.

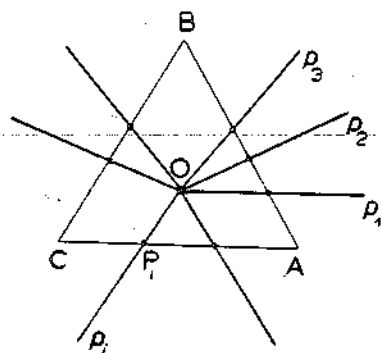
Mint a 38. tétel bebizonyításának végén megjegyeztük, kölcsönösen kizárják egymást a következő ciklikus elrendezések: $(abcd)$, $(acbd)$, $(abdc)$.

39. tétel. Ha a, b, c, d az α síkhoz és az O ponthoz tartozó sugársor négy tetszőleges félsugara, fennáll közöttük egyik és csak egyik a következő ciklikus elrendezések közül: $(abcd)$, vagy $(acbd)$, vagy $(abdc)$.

Ez a tétel, mely a lineáris rendezésre vonatkozó II. 2. axiómának felel meg, a lenti 40. tételnek speciális esete.

Értelmezés. Legyenek $p_1, p_2, \dots, p_n$ az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugarak; ha bármely négy $i < j < k < l$ indexnek megfelelő p_i, p_j, p_k, p_l félsugarak ciklikus elrendezése $(p_i p_j p_k p_l)$, akkor azt mondjuk, hogy az adott n félsugar ciklikus elrendezése $(p_1 p_2 \dots p_n)$.

40. tétel. Legyen adva n az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugar; jelölhetők ezek $p_1, p_2, \dots, p_n$ -nel olyan módon, hogy ciklikus elrendezésük $(p_1 p_2 \dots p_n)$ legyen. (Ez a tétel a lineáris rendezésre vonatkozó 4. tételnek felel meg.)



37. ábra.

Bizonyítás. Felveszünk az α síkban három olyan A, B, C pontot, melyek nem fektüsznek egy egyenesen, egyikük sem tartozik valamelyik p_i félsugarhoz, s az O pont az ABC háromszögnek a belsejéhez tartozik (37. ábra). (Ilyen ABC háromszög meghatározására valamely az O ponton át nem haladó egyenesen felveszünk két olyan A, B pontot, melyek nem tartoznak a p_i félsugarakhoz (6. tétel); az AB szakaszhoz van

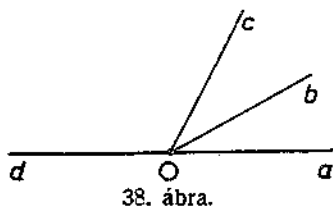
olyan D pontja, mely nem tartozik egyik p_i félsugaron átfektetett egyeneshez sem; legyen C a DO egyenes olyan pontja, melynek elrendezése DOC ; O az ABC háromszög belsejéhez tartozik.) A p_i félsugarak közül mindegyiknek van a háromszöggel egy és csak egy közös pontja (15. tétel); jelöljük ezeket P_i -vel ($i=1, 2, \dots, n$), olyan módon, hogy az AB szakaszhoz tartozó pontok elrendezése

$AP_1P_2\dots P_nB$, a BC és CA szakaszokhoz tartozók elrendezése $BP_{n+1}P_{n+2}\dots P_nC$, és $CP_{n+1}P_{n+2}\dots P_nA$ legyen. Az $\vec{OP_i}$ félsugarat p_i -vel jelölve, a $p_1, p_2, \dots, p_n$ félsugarak ciklikus elrendezése $(p_1p_2\dots p_n)$, mint a 36. és 37. tételből következik.

A 39. tétel alapján bebizonyítjuk a következőt:

41. tétel. Ha a, b, c az α síkban fekvő, az O pontból kiinduló félsugarak, melyek közül b és c az a -nak (vagyis az a -n átfektetett egyenesnek) ugyanazon az oldalán fekszenek, akkor vagy a b félsugár fekszik az $\angle(a, c)$ szög belsejében, vagy a c félsugár fekszik az $\angle(a, b)$ szög belsejében.

Bizonyítás. (Lásd a 38. ábrát.) Jelöljük d -vel az a -n átfektetett egyenesnek az O pont által meghatározott másik félsugarát. Mivel b és c az a, d egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, nem állhat fenn az $(abdc)$ ciklikus elrendezés, s ezért a négy sugár ciklikus elrendezése $(abcd)$, vagy $(acbd)$. Mivel a d félsugár az $\angle(a, b)$ és $\angle(a, c)$ szögek külsejéhez tartozik, az első esetben a b félsugár fekszik az $\angle(a, c)$ szög belsejében, a második esetben pedig a c félsugár fekszik az $\angle(a, b)$ szög belsejében.



38. ábra.

Értelmezés. Az α síkban fekvő, és az O ponton áthaladó egyenesek összességére a következő előírással adhatunk meg ciklikus rendezést. Legyenek a, b, c, d az α síkban fekvő, az O ponton áthaladó egyenesek; ezeknek ciklikus elrendezése $(abcd)$, ha az a és c egyenesek által meghatározott egyik csúcsszög-párhoz tartozik a b , a másikhoz a d egyenes. Az α síkban fekvő és az O ponton áthaladó egyenesek, illetve az O pontból kiinduló félsugarak összességére megadott ciklikus elrendezések között a következő az összefüggés. Legyenek a, b, c, d az O ponton áthaladó egyenesek, a', b', c', d' ezeknek egy-egy olyan félsugara, hogy b', c', d' az a egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek. Ha az a, b, c, d egyenesek ciklikus elrendezése $(abcd)$, akkor az a', b', c', d' félsugaraké $(a'b'c'd')$ és megfordítva.

Értelmezés. Elemek adott összességének ciklikus elrendezésén általában olyan előírást értünk, mely bármely négy különböző a, b, c, d elemhez az $(abcd)$, $(acbd)$, $(abdc)$ vonatkozások közül egyiket és csak egyiket rendeli hozzá olyan módon, hogy a következő feltételek teljesülnek:

1. Ha $(abcd)$, akkor $(bcda)$ és $(dcba)$:

2. Ha $(abcd)$ és $(abde)$, akkor $(bcde)$.

Ez a két feltétel félsugarak sorának ciklikus elrendezésénél a 38. és 40. tétel folytán teljesül.

42. tétel. Ha a, b, c, d, e egy ciklikusan rendezett összesség öt tetszőleges eleme, melyekre fennállanak az $(abcd)$ és $(abde)$ elrendezések, akkor fennállanak a $(bcde)$, $(abce)$, $(acde)$ elrendezések is; ebben az esetben azt mondjuk, hogy az öt elemre fennáll az $(abcde)$ ciklikus elrendezés.

Bizonyítás. $(abcd), (abde) \rightarrow (bcde)$ (2. feltétel folytán).

$(abde) \rightarrow (deab)$, és $(bcde) \rightarrow (debc)$ (1)

$(deab), (debc) \rightarrow (eabc)$ (2)

$(eabc) \rightarrow (abce) \rightarrow (bcea)$ (1)

$(bcde), (bcea) \rightarrow (cdea)$ (2)

$(cdea) \rightarrow (acde)$ (1).

43. tétel. Ciklikusan rendezett összesség öt tetszőleges egymástól különböző eleme jelölhető a, b, c, d, e -vel olyan módon, hogy ciklikus elrendezésük $(abcde)$ legyen.

Bizonyítás. Az adott öt elem közül egyiket jelöljük e -vel; a többi négyet a, b, c, d -vel, jelölésüket olyan módon választva, hogy elrendezésük $(abcd)$ legyen. Az a, b, c, e elemek ciklikus elrendezése vagy $(abce)$, vagy $(acbe)$, vagy $(abec)$. Ha $(abcd)$ és $(acbe)$, akkor $(cbea)$ és $(cbad)$; s ebből a 42. tétel szerint következik $(cbead)$. — Ha $(abec)$, $(abcd)$, akkor ugyanúgy $(abecd)$. — Végül ha $(abce)$ és $(abcd)$, akkor a b, c, d, e elemek elrendezése nem lehet $(becd)$, mivel $(dceb), (dcba) \rightarrow (ceba)$, ami ellentmond az $(abce)$ feltételnek; tehát vagy $(bcde)$, vagy $(bced)$. Az első esetben $(bcde), (bcea) \rightarrow (bcdea)$; a második esetben $(bced), (bcda) \rightarrow (bceda)$. A jelölések megváltoztatásával mindegyik esetben elérhető tehát, hogy az adott öt elem ciklikus elrendezése $(abcde)$ legyen.

Értelmezés. Egyszerű zárt törtvonalat annak két különböző P és R pontja két egyszerű törtvonalra oszt fel, melyeknek nincs P és R -en kívül közös pontjuk. Ha Q és S a két különböző résznek egy-egy a P és R -től különböző pontja, akkor azt mondjuk, hogy az adott egyszerű zárt törtvonalon a P, R pontok elválasztják egymástól a Q, S pontokat, s ezeknek a pontoknak ciklikus elrendezése $(PQRS)$. Ez az elrendezés eleget tesz a ciklikus rendezés általános feltételeinek.

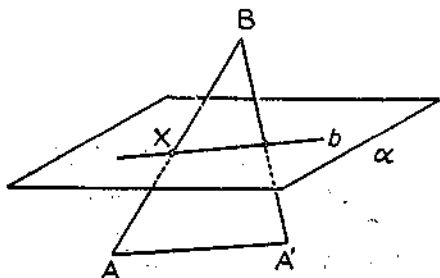
Megjegyzés. A ciklikus és a lineáris rendezés között való kapcsolatra vonatkozóan a következőt jegyezzük meg. Valamely ciklikusan rendezett összesség tetszőleges u elemét kihagyva, bármely más három a, b, c elemre vonatkozóan az abc lineáris rendezést írjuk elő, ha ezeknek az elemeknek u -val való ciklikus elrendezése $(abcu)$. Az adott ciklikusan rendezett összesség u -tól különböző elemeire vonatkozóan ilyen módon értelmezett lineáris rendezés eleget tesz a II. 1, 2, a, b axiómáknak.

9. §. A tér rendezési tételei.

A térre vonatkozóan nincs szükségünk újabb rendezési axiómára; a lineáris és a síkbeli rendezésre vonatkozó II. 1, 2, 3, 4 axiómák alapján levezethetjük a térbeli rendezésre vonatkozó tételeket.

44. tétel. Bármely α sík a teret két részre osztja fel. Két az α síkhoz nem tartozó A és A' pont ugyanahhoz a térrészhez tartozik, ha az AA' szakasznak nincs az α síkkal közös pontja; ebben az esetben azt mondjuk, hogy A és A' az α síknak ugyanazon az oldalán fekszenek. Két az α síkhoz nem tartozó A és B pont az α sík által meghatározott különböző térrészekhez tartozik, vagy az α sík különböző oldalán fekszik, ha az AB szakasznak van az α síkkal közös pontja. — Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n$ törtvonalnak A_1 és A_n végpontjai az α síknak különböző oldalán fekszenek, a törtvonalnak van az α síkkal közös pontja.

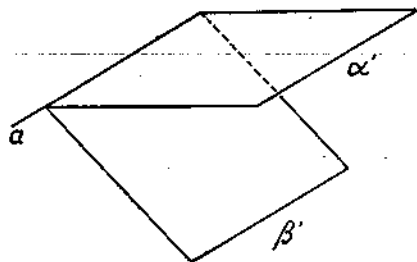
Bizonyítás. (39. ábra.) Legyen A tetszőleges az α síkhoz nem tartozó pont (I. 7), és X az α sík valamely pontja. Az A és X pontokat összekötő egyenesnek (I. 2) van olyan B pontja, melynek elrendezése AXB (II. 3); A és B az α sík különböző oldalán fekszenek. Legyen A' olyan pont, hogy az AA' vonaldarabnak nincs az α síkkal közös pontja; megmutatjuk, hogy A' és B az α síknak különböző oldalán vannak. Ha először A' az AB egyenesen fekszik, akkor az A, A', X, B pontok elrendezése vagy $AA'XB$, vagy $A'AXB$; mindkét esetben az $A'B$ szakaszhoz tartozik az α sík X pontja. Ha másodszor A' nem fekszik az AB egyenesen, az A, A', B pontokhoz



39. ábra.

tartozik egy és csak egy sík (I. 2, I. 4), jelöljük ezt β -val. Az AB egyenes s ennek X pontja is a β síkban fekszik (I. 5); X az α és β síkoknak közös pontja; I. 6 folytán van ennek a két síknak legalább még egy közös pontja Y , s így az $XY = b$ egyenes az α és β síkokhoz tartozik (I. 5). A β síkban az A, A', B pontokon át nem haladó b egyenesnek van az $AA'B$ háromszög AB oldalával közös pontja: X , a II. 4 axioma szerint tehát van a b egyenesnek az $AA', A'B$ oldalak közül is egyikkel közös pontja; feltevésünk szerint az AA' szakasznak nincs az α síkkal, tehát a b egyenessel sem közös pontja. Következik tehát, hogy az $A'B$ szakasznak van a b egyenessel, tehát az α síkkal is közös pontja, vagyis hogy az A' és B pontok az α síknak különböző oldalán fekszenek. — Az 5. és a 8. tételből következik, hogy ha A és B , s ugyancsak A' és B az α síknak különböző oldalán, akkor A és A' az α síknak ugyanazon az oldalán fekszenek.

Ha $A_1 A_2 \dots A_n$ olyan törtvonal, melynek A_1 és A_n végpontjai az α síknak különböző oldalán vannak, legyen ν a legkisebb olyan index, melyre A_1 és $A_{\nu+1}$ nem fekszenek a síknak ugyanazon az oldalán; vagy az α síkhoz tartozik az $A_{\nu+1}$ pont, vagy pedig az A_ν és $A_{\nu+1}$ pontok az α sík különböző oldalán vannak, s így az $A_\nu A_{\nu+1}$ szakasznak, s ezért az adott törtvonalnak is van az α síkkal közös pontja.



40. ábra.

Értelmezés. Legyen a tetszőleges egyenes, legyenek α és β az a -n áthaladó síkok, α', β' ezeknek az a egyenes által meghatározott egy-egy félsíkja. Az α' és β' félsíkok és az a egyenes együtt *lapszöget* alkotnak; ezek a félsíkok a *lapszög lapjai*; az a egyenes a *lapszög éle* (40. ábra).

45. tétel. *Lapszög a teret két részre osztja.*

Bizonyítás. Jelöljük, mint a fenti értelmezésben, a -val a lapszög élet, α', β' -vel lapjait és α, β -val az ezeken áthaladó síkokat. Az α , illetve a β sík pozitív oldalán érjük azt az általa meghatározott térrészt, mely a β' , illetve az α' félsíkot tartalmazza. A tér valamely P pontja a *lapszög belsejéhez* tartozik, ha α és β -nak pozitív oldalán fekszik; a Q pont a *lapszög külsejéhez* tartozik,

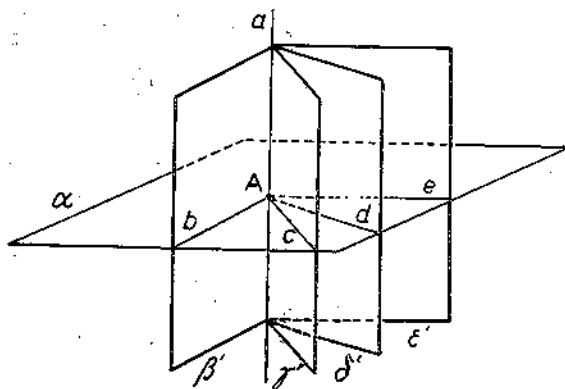
ha az α és β síkok közül legalább egyiknek a negatív oldalán fekszik. Ebből az értelmezésből a 44. tétel szerint következik, hogy bármely két a lapszög belsejében fekvő P és P' pontot összekötő PP' szakasz pontjai is a lapszög belsejéhez tartoznak; ugyancsak, ha A és B az α' és β' félsík egy-egy tetszőleges pontja, akkor az AB szakasz pontjai a lapszög belsejéhez tartoznak. — Ha P a lapszög belsejében, és C az a élen fekvő pont, a PC szakasznak a C felől való meghosszabbításán fekvő bármely Q pont az α és β síkoknak a negatív oldalán, tehát a lapszög külsejében fekszik; ha Q' tetszőleges másik a lapszög külsejében fekvő pont, akkor Q' az α és β síkok közül legalább egyiknek a negatív oldalán fekszik, s így a QQ' szakasz pontjai a lapszög külsejéhez tartoznak. Ebből következik, hogy két tetszőleges a lapszög külsejéhez tartozó pontot összeköthetünk a lapszög külsejében fekvő törtvonallal. — Ha P a lapszög belsejében, Q annak külsejében fekszik, a PQ szakasznak van az α és β síkok közül legalább egyikkel közös pontja; jelöljük A -val a PQ szakasznak az α, β síkokkal való metszéspontjai közül azt, mely P -hez legközelebb fekszik; tegyük fel például, hogy A az α sík pontja. Mivel a PA szakasznak nincs az α, β síkokkal közös pontja, tehát A vagy az a élhez tartozik, vagy pedig a β síknak pozitív oldalán s így az α' félsíkban fekszik. Eszerint a lapszög belsejében és külsejében felvett P és Q pontokat összekötő PQ szakasznak van a lapszöggel közös pontja. Ha a P és Q pontokat törtvonallal kötjük össze, ennek van olyan $P'Q'$ szakasza, hogy a $P \dots P'$ törtvonal a lapszög belsejéhez, a Q' pont pedig a lapszöghöz, vagy annak külsejéhez tartozik; a $P'Q'$ vonal darabnak, tehát a törtvonalnak is van a lapszöggel közös pontja.

A bebizonyított tételből következik, hogy az α, β síkok együtt a teret négy részre osztják; ha a síkoknak az a egyenes által meghatározott félsíkjait $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ -vel jelöljük, ezek a térrészek rendre az (α', β') , (α', β'') , (α'', β') , (α'', β'') lapszögek belseje.

Értelmezés. Az a egyenes által határolt félsíkon értjük az a -n áthaladó valamely α síknak az a egyenes által meghatározott egyik félsíkját. Az a egyeneshez tartozó félsík-sornak nevezzük az a egyenes által határolt félsíkok összességét. — Síksoron értjük az a egyenesen áthaladó síkok összességét.

Értelmezés. Az a egyenes által határolt félsíkok összességének ciklikus rendezését a következő módon értelmezzük. Legyenek $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ az a egyenes által határolt félsíkok, és legyen α olyan

sík, melynek az a egyenessel egy és csak egy közös pontja van. (Az α sík meghatározására feiveszünk az a egyenesen valamely A pontot, továbbá az a -hoz nem tartozó B pontot, végül a B pont és az a egyenes által meghatározott síkhoz nem tartozó C pontot; az $\alpha = ABC$ síknak az a egyenessel A -n kívül nincs közös pontja). Az α síknak a $\beta', \gamma', \delta', \epsilon'$ félsíkokkal való metszésvonalai legyenek a b, c, d, e félsugarak; ha ezeknek ciklikus elrendezése $(bcde)$, akkor az illető



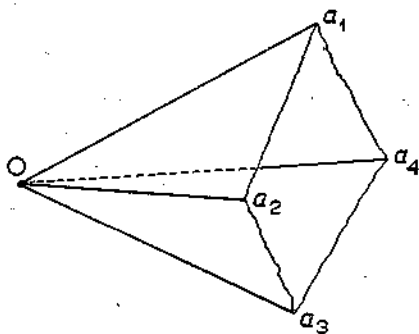
41. ábra.

félsíkokra a $(\beta' \gamma' \delta' \epsilon')$ ciklikus rendezési írjuk elő (41. ábra). A 44. és 45. tételből következik, hogy a $(\beta' \gamma' \delta' \epsilon')$ ciklikus elrendezés esetében vagy β' és δ' egy síkban, γ' és ϵ' ennek a síknak különböző oldalán fekszenek, vagy pedig γ' és ϵ' közül egyik a (β', δ') lapszög bel-

sejében, a másik annak a külsejében fekszik.

Értelmezés. Legyenek $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ az O pontból kiinduló félsugarak, melyek közül bármely két egymásra következő a_i és a_{i+1} nem tartozik egy egyeneshez. $(n+1, \text{ illetve } n+2 \text{ az } 1, \text{ illetve } 2 \text{ indexet jelenti.})$

Az a_i és a_{i+1} félsugarakon áthaladó síkban az $\angle(a_i, a_{i+1})$ szög s ennek belseje által alkotott idomot (a_i, a_{i+1}) lapnak nevezzük. Fellesszük, hogy az (a_i, a_{i+1}) és (a_j, a_{j+1}) lapoknak O -n kívül nincs közös pontjuk, ha $i \neq j \pm 1$. Az $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_1)$ lapok testszöget (vagy szögletet) alkotnak (42. ábra); a nevezett



42. ábra.

lapok a testszög lapjai, az $a_1, a_2, \dots, a_n$ félsugarak a testszög élei, és az O pont a testszög csúcsa. A testszög élszögein értjük az

$\angle(a_i, a_{i+1})$ szögeket; *lapszögein* az (a_i, a_{i+1}) és (a_{i+1}, a_{i+2}) lapok által bezárt lapszögeket ($i = 1, 2, \dots, n$). (Ennek a lapszögnek részletesebb értelmezése a következő: az a_i és a_{i+1} félsugarakon, valamint az a_{i+1} és a_{i+2} félsugarakon áthaladó síkoknak azok az a_{i+1} egyenes által határolt félsíkjai, melyek rendre az a_i illetve az a_{i+2} félsugarat tartalmazzák, lapszöget alkotnak; ezt nevezzük az (a_i, a_{i+1}) és (a_{i+1}, a_{i+2}) lapok által bezárt lapszögnek, s jelöljük (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) -vel.)

Megjegyzés. A testszögnek több lapja ugyanahhoz a síkhoz tartozhatnak; ha az (a_i, a_{i+1}) és az (a_{i+1}, a_{i+2}) lapok egy síkhoz tartoznak, akkor ezek az értelmezésben foglalt feltételeink szerint az a_{i+1} -en áthaladó egyenesnek különböző oldalán fekszenek (41. tétel). Ha a testszög összes lapjai egy síkhoz tartoznak, akkor ennek a síknak minden pontja a testszög valamelyik lapjának pontja.

Értelmezés. Egy *testszöget konvexnek* nevezünk, ha bármely lapján átfektetett síknak egyik oldalán fekszenek a testszög összes többi lapjai.

46. tétel. *Konvex testszög a teret két részre osztja. Ezek közül az egyiket a konvex testszög belsejének, másikat külsejének nevezzük. Bármely két a konvex testszög belsejében fekvő pontot összekötő szakasz a testszög belsejéhez tartozik.*

Bizonyítás. Jelöljük a testszög csúcsát O -val, éleit $a_1, a_2, \dots, a_n$ -nel olyanképen, hogy a testszög lapjai (a_1, a_2) , $(a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$, (a_n, a_1) . Az (a_i, a_{i+1}) lapon átfektetett sík pozitív oldalán értjük azt a sík által meghatározott térrészt, mely a testszög többi lapjait tartalmazza. Az értelmezésből nyilvánvaló, hogy ha az (a_i, a_{i+1}) lap síkjában fekvő pont a testszög bármely más lapján átfektetett síknak nem a negatív oldalán fekszik, akkor ez a pont az (a_i, a_{i+1}) laphoz tartozik.

A tér valamely pontja az adott konvex testszög belsejéhez, illetve külsejéhez tartozik, aszerint, hogy a testszög bármely lapján átfektetett síknak pozitív, vagy legalább egyik lapon átfektetett síknak a negatív oldalán fekszik. Ha P és P' két tetszőleges a testszög belsejéhez tartozó pont, a PP' szakasz is a testszög belsejéhez tartozik, mint ez a 44. tételből közvetlenül következik. — Ha A és B az a_i és az a_{i+1} élek pontjai, az AB vonalдарab minden pontja az (a_i, a_{i+1}) laphoz tartozik (36. tétel), de ezen kívül nincs az AB egyenesnek a testszöggel (azaz a testszög lapjaival) más közös pontja.

Ha A és B a konvex testszögnek két olyan pontja, melyek nem tartoznak a testszögnek ugyanahhoz a lapjához, akkor az AB szakasznak nincs a testszöggel, sem a testszög lapjain áthaladó síkokkal közös pontja. Ha ugyanis az AB szakasz C pontja a testszög valamelyik lapján átfektetett síkhoz tartoznék, akkor ez a sík elválasztaná egymástól a testszögnek azokat a lapjait, melyekhez az A és B pontok tartoznak, ellentétben a konvex testszög értelmezésével. Ebből következik tehát, hogy az AB szakasz pontjai a konvex testszög belsejéhez tartoznak. Az AB szakasz meghosszabbításain fekvő pontok a testszögnek A -t, illetve B -t tartalmazó lapjának (vagyis az illető lapon átfektetett síknak) negatív oldalán, tehát a testszög külsejében vannak.

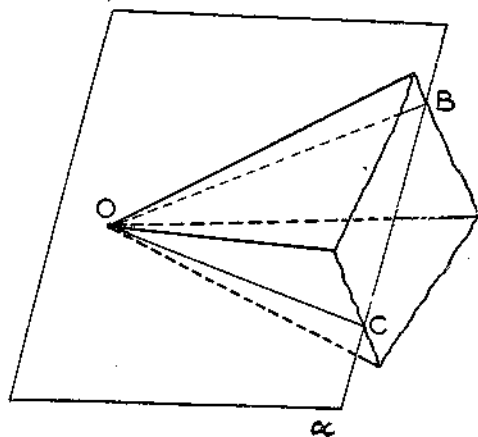
Ha P a testszög belsejében fekvő pont, és Q az OP egyenes olyan pontja, melynek elrendezése POQ , akkor Q és vele együtt az OQ félsugár minden pontja a testszög külsejéhez tartozik, mivel Q a testszög bármely lapján átfektetett síknak negatív oldalán fekszik. — Ha Q' tetszőleges másik a testszög külsejében fekvő pont, az értelmezés szerint Q' a testszög valamelyik lapjának a negatív oldalán fekszik; ugyanennek a síknak a negatív oldalán, tehát a testszög külsejében fekszik a QQ' szakasz minden pontja. Ebből következik, hogy bármely két a testszög külsejében fekvő pont összeköthető egymással a testszög külsejében haladó törtvonalal.

Végül ha P a testszög belsejében, és Q annak külsejében fekvő pont, akkor a PQ szakasznak van a testszög lapjain átfektetett síkok közül legalább egyikkel közös pontja; ezek közül a metszéspontok közül jelöljük A -val azt, mely P -hez legközelebb fekszik; az A pont vagy egybeesik az O ponttal, vagy a testszög valamely élének, vagy lapjának pontja, mivel a testszög bármely lapján átfektetett síknak a pozitív oldalán, vagy a síkban fekszik. — Ebből következik, hogy a P és Q pontokat összekötő bármely törtvonalnak legalább egy pontja a testszöghöz tartozik.

47. tétel. *Ha egy konvex testszög O csúcsán áthaladó α síknak van a testszög belsejében pontja, akkor a testszögnek az α síkkal való metszete (azaz a testszög és a sík közös pontjainak összessége) két az O pontból kiinduló, nem egy egyeneshez tartozó félsugár.*

Bizonyítás (43. ábra). Legyen A az α síknak az adott konvex testszög belsejében fekvő pontja, és legyen A' az OA egyenesnek olyan pontja, melynek elrendezése AOA' ; a 46. tétel

szerint A' a testszög külsejéhez tartozik. Az α síknak az AA' egyenes által meghatározott mindkét félsíkjában kössük össze törtvonalal az A és A' pontokat; a 46. tétel szerint mindkét törtvonalnak van legalább egy-egy a testszöghöz tartozó B , illetve C pontja; az $\vec{OB}$ és $\vec{OC}$ félsugarak szintén a testszöghöz és az α síkhoz tartoznak. A B és C pontok nem tartoznak a testszögnek



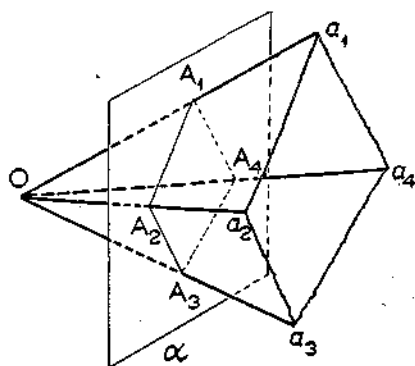
43. ábra.

ugyanahhoz a lapjához; különben az $\alpha = BOC$ sík minden pontja, tehát A is, vagy a testszöghöz, vagy annak külsejéhez tartoznának, A -ra vonatkozó feltételünkkel ellentétben. Mint a 46. tétel bebizonyítása során megjegyeztük, a BC szakasz pontjai a testszög belsejéhez tartoznak; ebből következik, hogy a $\sphericalangle BOC$ szög belseje a testszög belsejéhez, a $\sphericalangle BOC$ szög külseje

pedig a testszög külsejéhez tartozik. Eszerint a testszögnek az α síkkal való metszete az $\vec{OB}$ és $\vec{OC}$ félsugarakból áll, melyekhez az O pontot is hozzászámítjuk.

48. tétel. Ha egy konvex testszög minden élének van a testszög csúcsán át nem haladó α síkkal közös pontja, akkor a testszögnek az α síkkal való metszete konvex sokszög.

Bizonyítás (44. ábra). Jelöljük a testszög csúcsát O -val, éleit $a_1, a_2, \dots, a_n$ -nel, az a_i élnek az α síkkal közös pontját A_i -vel. A testszögnek a síkkal való metszete az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszög. Bármely két A_iA_{i+1} és A_jA_{j+1} vonaladarabnak nincs közös pontja, ha $i \neq j \pm 1$, különben a testszög (a_i, a_{i+1}) és (a_j, a_{j+1}) lapjainak is volna kö-



44. ábra.

zós pontja, ellentétben a testszög értelmezésével; eszerint $A_1 A_2 \dots A_n$ egyszerű sokszög. Feltévéstünk szerint az adott testszög konvex, s ezért minden i indexre az $OA_i A_{i+1}$ síknak egyik oldalán fekszenek az összes többi A_j pontok; ebből következik, hogy az α síkban az $A_i A_{i+1}$ egyenesnek egyik oldalán fekszenek a sokszögnek összes többi A_j csúcsai, vagyis az $A_1 A_2 \dots A_n$ sokszög konvex.

49. tétel. *Bármely testszög α teret két részre osztja.*

Bizonyítás. Az az eljárás, mellyel ezt a tételt a konvex testszögekre vonatkozó 46. tételből levezetjük, ugyanaz, mint amellyel a síknak tetszőleges egyszerű sokszög által való felosztását levezettük a konvex sokszögekre vonatkozó tételből (lásd a 14. és 22. tételket). A következőben csak vázoljuk a bizonyítást, a részleteket illetően utalunk a 22. tétel bebizonyítására, melynek jelöléseit is átvesszük.

Az adott T testszög összes lapjain átfektetünk síkokat; ezek együtt a teret olyan részekre osztják fel, melyek közül mindegyik egy-egy konvex testszög belseje; ez az állításunk teljes indukcióval adódik a 47. tételből. Jelöljük ezeket a konvex testszögeket $b_1, b_2, \dots, b_r$ -rel, belseiket $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ -rel. Az adott testszög bármely lapját s az ezen átfektetett síkot a testszög többi lapjain átfektetett síkok olyan lapokra osztják fel, melyek közül mindegyik egy-egy szög s annak belseje; jelöljük mindezeket a lapokat $c_1, c_2, \dots, c_v$ -sel. A b_i testszög lapjai bizonyos $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_v}$ lapok; ezt úgy fejezzük ki, hogy *a b_i testszög ezeknek a lapoknak az összege:*

$$b_i = c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_v}.$$

A $b_1, b_2, \dots$ konvex testszögek mod 2 összegét úgy képezzük, hogy ezek közül mindegyiket mint lapjainak összegét kifejezzük, s az adott testszögek lapjainak összegében a c_v -k együtthatóit mod 2 helyettesítjük 0-val, vagy 1-gyel.

Bebizonyítjuk most a T testszög O csúcsán átfektetett síkok számára vonatkozó teljes indukcióval, hogy bármely olyan testszög, melynek lapjai bizonyos c_v lapok, s így nevezetesen az adott T testszög is kifejezhető két és csak kétféleképpen mint b_i -k mod 2 egyszerűsített összege:

$$(1) \quad T = b_1 + b_2 + \dots + b_r,$$

$$(2) \quad T = b_{q+1} + b_{q+2} + \dots + b_r;$$

az (1) és (2) kifejezések jobboldalán a $b_1, b_2, \dots, b_r$ konvex testszögek közül, melyeket a T lapjain átfektetett síkok meghatároznak, mindegyik egyszer és csak egyszer fordul elő.

Képezzük az (1) jobboldalán álló b_i testszögek β_i belseinek összegét:

$$R_1 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n;$$

ha c_1 olyan lap, hogy a hozzátartozó b_i és b_j testszögek az (1) összeg tagjai, akkor c_1 belső pontjait, s ugyancsak ha a c_1 lapnak l éléhez tartozó összes $b_i, b_j, b_k, \dots$ konvex testszögek az (1) összeg tagjai, akkor l pontjait is az R_1 összeghez tartozónak tekintjük. — Hasonlóan képezzük a (2)-nek megfelelő

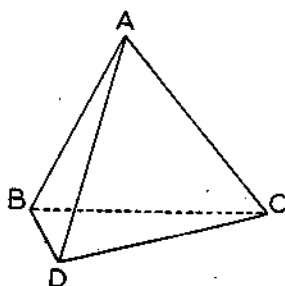
$$R_2 = \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \dots + \beta_r$$

összeget. — R_1 és R_2 két olyan térrész, hogy a térnek bármely nem a T testszöghöz tartozó pontja közülök egyikhez és csak egyikhez tartozik. Bármely két az R_1 -hez (vagy az R_2 -höz) tartozó pontot összeköthetünk olyan törtvonallal, melynek nincs a testszöggel közös pontja. Bármely törtvonálnak, mely R_1 valamely pontját R_2 pontjával köti össze, van a T testszöggel közös pontja.

10. §. Konvex poliéderek.

Értelmezés. Egy egyszerű sokszög s ennek belseje együtt lapot alkotnak; a sokszöget a lap határának, a sokszög oldalait és csúcsait a lap élének és csúcsainak nevezzük; a sokszög belsejében fekvő pontokat a lap belső pontjainak nevezzük. A lapot háromszögűnek, illetve n -szögűnek nevezzük, ha határa háromszög, illetve n -szög.

Értelmezés. Legyenek A, B, C, D olyan pontok, melyek nem tartoznak egy síkhoz (I. 7 axioma). Az ABC, ABD, ACD, BCD háromszög-lapok együtt tetraédert alkotnak; a nevezt lapok a tetraéder lapjai, ezeknek élei, vagyis az AB, AC, AD, BC, BD, CD szakaszok a tetraéder élei; az A, B, C, D pontok a tetraéder csúcsai (45. ábra).



45. ábra.

Értelmezés. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lapok egyszerű poliédert alkotnak, ezeket a lapokat, s éleiket és csúcsaikat a poliéder lapjainak, élének és csúcsainak nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

1. Két-két lapnak vagy nincs közös pontja; vagy van egy

és csak egy közös pontjuk, mely mindkettőnek csúcsa; vagy van egy és csak egy közös élük s ezenkívül nincs más közös pontjuk.

2. A poliéder minden éle pontosan két laphoz tartozik.

3. A poliéder bármely csúcsát tartalmazó lapok olyan ciklusban rendezhetők el, hogy bármely két egymásra következő lapnak van közös éle. (Ez egyben az illető csúcsból kiinduló éleknek egy ciklikus elrendezését is adja.)

4. Ha a poliéder lapjai közül egyet, vagy többet elhagyunk, a megmaradó lapokra nézve nem teljesülnek a fenti 1.—3. feltételek.

A 4. feltételből következik, hogy a poliéder összefüggő, vagyis a poliéder két tetszőleges pontját össze lehet kötni olyan törtvonalal, melynek pontjai a poliéderhez tartoznak; ilyen törtvonalról azt mondjuk, hogy a poliéderen fekszik. Ha ugyanis λ_1 és λ_2 a poliédernek két szomszédos lapja, azaz két olyan lapja, melyeknek van közös éle, akkor az egyik és másik lap egy-egy tetszőleges pontját közös élük valamely pontjával összekötő szakaszok együtt a poliéderen fekvő törtvonalat alkotnak, mely λ_1 és λ_2 adott pontjait összeköti. Ha a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ lapok közül bármely két egymásra következőnek van közös éle, ugyanígy megadhatunk a poliéderen fekvő törtvonalat, mely λ_1 és λ_k egy-egy tetszőleges pontját összeköti. — Tekintsük a poliédernek λ_1 lapjával szomszédos lapjait, majd az utóbbiakkal szomszédos lapjait, és így tovább; az ilyen módon meghatározott lapok összessége a fentiek szerint összefüggő, s elegendő tesz az 1.—3. feltételeknek. A 4. feltételből következik tehát, hogy ez az összesség a poliéder összes lapjait tartalmazza, s így a poliéder összefüggő.

Értelmezés. Háromszögelt poliéderen olyan poliédert értünk, melynek minden lapja háromszögű.

Bármely poliéderhez megadható olyan háromszögelt poliéder, melynek pontjai az eredeti poliéder pontjaival megegyeznek, s amelynek csúcsai az eredeti poliéder csúcsai; ehhez úgy jutunk, hogy az adott poliéder minden lapját átlókkal háromszögekre osztjuk fel (29. tétel).

Értelmezés. Konvex poliéderen olyan poliédert értünk, melynek bármely lapján átfektetett síknak egyik oldalán fekszenek a poliédernek az összes ehhez a laphoz nem tartozó csúcsai.

50. tétel. Konvex poliéder minden lapjának határa konvex sokszög.

Bizonyítás. Legyen λ_1 és λ_2 a poliéder két szomszédos lapja; az ezeknek közös élén átfektetett egyenest jelöljük a -val.

A konvex poliéder értelmezése szerint λ_2 síkjának egyik oldalán fekszenek a poliéder összes a λ_2 -höz nem tartozó csúcsai; λ_2 síkjának ezen az oldalán λ_1 síkjának az a egyenes által meghatározott egyik felsíkja fekszik. Így λ_1 -nek összes csúcsai — kivéve az a egyeneshez tartozókat — a -nak egyik oldalán fekszenek. Minthogy pedig a a λ_1 lap tetszőleges élén átfektetett egyenes lehet, következik ebből, hogy λ_1 határa konvex sokszög.

Megjegyzés. Egy konvex poliéder bármely lapján átfektetett síknak egyik oldalán fekszenek a poliéder összes többi lapjai. Az értelmezés szerint ugyanis a poliéder λ lapján átfektetett síknak egyik oldalán fekszenek a poliédernek az összes a λ -hoz nem tartozó csúcsai, s ezért a 44. tétel folytán az összes ehhez a laphoz nem tartozó élei; a 14. és 16. tétel alkalmazásával adódik továbbá, hogy λ síkjának ugyanezen az oldalán fekszenek a poliéder bármely más lapjának a λ -tól különböző összes pontjai. — Ugyanazzal a megfontolással adódik, hogy ha egy konvex poliéder összes csúcsai valamely α síknak egyik oldalán fekszenek, akkor a poliéder összes lapjai is az α síknak ugyanezen az oldalán fekszenek.

51. tétel. Egy egyenesnek egy konvex poliéderrel vagy egy vonaldarabja, vagy legfeljebb két pontja közös.

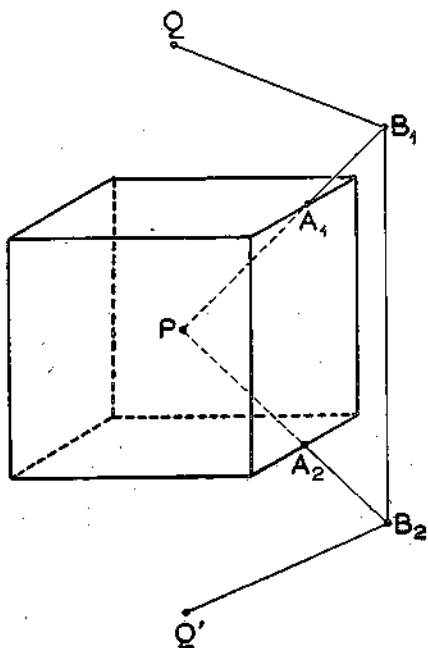
Bizonyítás. Ha az a egyenesnek két pontja a konvex poliédernek ugyanahhoz a λ_1 lapjához tartozik, akkor a -nak λ_1 -gyel van egy közös vonaldarabja, mely vagy λ_1 -nek éle, vagy pedig végpontjaitól eltekintve a λ_1 lap belsejében fekszik (14. és 16. tétel). Az a egyenesnek ezen a vonaldarabján kívül nincs a poliéderrel közös pontja, mivel az a egyenes λ_1 síkjában fekszik, s ebben a síkban nincs a poliédernek λ_1 -en kívül pontja. — Ha az a egyenesnek volna a poliéderrel három A, B, C közös pontja, melyek nem tartoznak ugyanahhoz a laphoz, jelöljük $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ -mal a poliédernek olyan lapjait, melyekhez rendre az A, B, C pontok tartoznak; előbbi eredményünk szerint ez a három lap egymástól különböző. Ha az A, B, C pontok elrendezése ABC , akkor, mivel az a egyenes feltevésünk folytán nem fekszik a λ_2 lap síkjában, az A és C pontok λ_2 síkjának különböző oldalán fekszenek, ellentétben az 50. tétel követő Megjegyzéssel.

52. tétel. Konvex poliéder a teret két részre osztja, melyeket a poliéder belsejének és külsejének nevezünk. Bármely két a poliéder belsejében, vagy nem ugyanazon a lapján fekvő pontot összekötő szakasz a poliéder belsejéhez tartozik. Bármely két a poliéder külse-

jében fekvő pontot összeköthetünk a poliéder külsejében haladó törtvonallal. Minden olyan törtvonálnak, mely a poliéder belsejében fekvő pontot a poliéder külsejében fekvő ponttal köt össze, van a poliéderrel közös pontja.

Bizonyítás. A térnek valamely P pontja értelmezés szerint a poliéder belsejéhez tartozik, ha a poliéder bármely lapján átfektetett síknak pozitív oldalán, vagyis azon az oldalán fekszik, mint a poliéder többi lapjai. Két a poliéder belsejében, vagy nem ugyanazon a lapján fekvő pontot összekötő szakasz minden pontja is a poliéder belsejéhez tartozik a 44. tétel folytán.

A tér Q pontja értelmezés szerint a poliéder külsejében fekszik, ha a poliéder valamelyik lapján átfektetett sík a Q pontot a poliéder többi lapjaitól elválasztja. Legyenek Q és Q' a poliéder külsejében fekvő pontok, és jelöljük λ -val és λ' -vel a poliédernek olyan lapjait,



46. ábra.

hogy Q , illetve Q' a λ , illetve a λ' lapon átfektetett síknak a negatív oldalán fekszik. Mivel a poliéder összefüggő, megadhatjuk a poliéder lapjainak olyan $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k = \lambda'$ sorozatát, hogy bármely két egymásra következő λ_{i-1} és λ_i lap határainak van legalább egy közös A_i pontja ($i = 1, 2, \dots, k$). (46. ábra.) Felveszünk a poliéder belsejében tetszőleges P pontot, s jelöljük B_i -vel a $\vec{PA_i}$ félsugárnak olyan pontját, melynek elrendezése PA_iB_i . A B_i pont a λ_{i-1} és a λ_i lapokon átfektetett síkoknak, s ezért a B_iB_{i+1} szakasz a λ_i lapon átfektetett síknak a negatív oldalán fekszik. Mint-hogy továbbá a QB_1 szakasz a λ , a B_kQ' a λ' síkjának a

negatív oldalán fekszik, a $QB_1B_2 \dots B_kQ'$ törtvonal az adott Q és Q' pontokat a poliéder külsejében összeköti.

Ha P a poliéder belsejében, Q annak külsejében fekvő pont, a PQ szakasznak a poliéder lapjain átfektetett síkokkal való metszés-

pontjai közül jelöljük A -val azt, mely P -hez legközelebb fekszik. Az A pont a poliéder valamely λ_1 lapján átfektetett síkhoz tartozik; ha nem tartozik még egy másik lap síkjához, akkor a poliéder bármely a λ_1 -től különböző lapján átfektetett síknak ugyanazon az oldalán fekszenek az A és P pontok; ebben az esetben tehát A a λ_1 lap bármely oldalvonalának ugyanazon az oldalán fekszik, mint λ_1 -nek többi csúcsai, vagyis A a λ_1 lap belsejéhez tartozik. Ha pedig A a poliéder két vagy több lapján átfektetett síkoknak közös pontja, hasonlóan adódik, hogy A a poliédernek valamely éléhez tartozik, vagy a poliédernek csúcsa. Mindegyik esetben A a PQ szakasznak a poliéderrel közös pontja. — Ha a P és Q pontokat törtvonallal kötjük össze, ennek van olyan szakasza, melynek egyik végpontja a poliéder belsejéhez tartozik, a másik végpontja pedig a poliéderen, vagy annak a külsejében fekszik; a PQ törtvonalnak az előbbieket szerint van tehát a poliéderrel közös pontja.

53. tétel. *Ha az α síknak mindkét oldalán van egy konvex poliédernek legalább egy-egy pontja, akkor a poliédernek az α síkkal való metszete konvex sokszög.*

Bizonyítás. Mivel a poliéder összefüggő, ennek két az α sík különböző oldalán fekvő pontját összeköthetjük a poliéderen fekvő törtvonallal; a 44. tétel szerint ennek a törtvonalnak, tehát a poliédernek is van az α síkkal közös pontja.

A konvex poliéder egyik lapja sem tartozhatik az α síkhoz, mivel az α sík mindkét oldalán van feltevésünk szerint a poliédernek legalább egy-egy pontja. Ha tehát az α sík valamely pontja a poliéder λ_1 lapjának belső pontja, akkor λ_1 síkjának az α síkkal való metszete egy egyenes; erre az egyenesre és a λ_1 határát alkotó konvex sokszögre alkalmazva a 14. és 16. tételt adódik, hogy a λ_1 lapnak α -val való metszete olyan vonaladarab, melynek végpontjai λ_1 határához tartoznak.

Ha a poliéder valamely élének van az α síkkal közös pontja, ez az él vagy az α síkban fekszik, vagy pedig a poliédernek azt a két lapját, melyekhez ez az él tartozik, λ_1 és λ_2 -vel jelölve, adódik, hogy λ_1 és λ_2 -nek egy-egy vonaldarabja tartozik az α síkhoz, s ezeknek egyik végpontja közös. (Lásd a 16. tételt követő Megjegyzést.)

Végül, ha a poliéder valamely O csúcsa tartozik az α síkhoz, akkor van a poliéderen pontosan két az O pontból kiinduló és az

α síkhoz tartozó vonalдарab. Legyenek ugyanis $OA_1, OA_2, \dots, OA_k$ a poliédernek az O ponthoz tartozó élei, olyan ciklikus elrendezésben, hogy minden i -re az OA_i és OA_{i+1} élek a poliédernek ugyanahhoz a lapjához tartoznak. Az $(\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \dots, \vec{OA}_k)$ félsugarak által meghatározott testszög, melyet a poliédernek az O ponthoz tartozó testszögének nevezünk, *konvex*, s bármely a poliéder belsejében fekvő pont nyilván ennek a testszögnek belsejéhez tartozik. Így nevezetesen a poliédernek az α sík különböző oldalán fekvő két pontját összekötő szakasz a testszög belsejéhez tartozik s ezért a 47. tétel szerint a poliéder O -hoz tartozó testszögének az α síkkal való metszete két az O pontból kiinduló félsugár; ezeknek a poliéderhez tartozó részei két vonalдарab, melyeknek O közös végpontja.

A fentiek szerint a poliédernek az α síkkal való metszete olyan vonalдарabokból tevődik össze, melyek közül mindegyiknek bármely végpontja pontosan két vonalдарabhoz tartozik; a metszet tehát egy vagy több egyszerű sokszögből áll. Ha legalább két sokszögből állana, ezek belsejének egy-egy pontját összekötő egyenesnek a 16. tétel folytán mindkét sokszöggel legalább két-két, s ezért a poliéderrel legalább négy nem ugyanahhoz a laphoz tartozó közös pontja lenne, ellentétben az 51. tétellel. Tehát a metszet egy egyszerű sokszögből áll, s ez *konvex* a 33. tétel szerint.

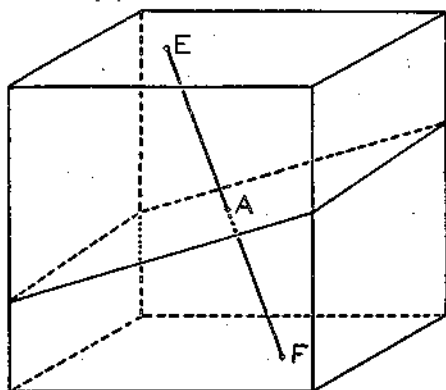
A *konvex* poliédernek az α síkkal való metszetét alkotó *konvex* sokszög belseje a poliéder belsejéhez tartozik (16. és 52. tétel). A sokszög külsejének bármely pontja a sokszög valamely oldalvonalának s így a poliéder valamely lapján átfektetett síknak a negatív oldalán, tehát a poliéder külsejében fekszik.

54. tétel. *Ha az a egyenesnek van olyan A pontja, mely egy konvex poliéder belsejéhez tartozik, akkor a -nak van a poliéderrel két közös pontja: E és F , s ezeknek elrendezése EAF .*

Bizonyítás. Legyenek P és Q a poliédernek olyan pontjai, hogy P nem tartozik az a egyeneshez, és Q nem tartozik a P -n és a -n áthaladó síkhoz. A PQ szakasz valamely R pontján és az a egyenesen átfektetett síknak különböző oldalán fekszenek a poliéder P és Q pontjai, s így az 53. tétel szerint a poliédernek ezzel a síkkal való metszete π *konvex* sokszög. Az a egyenesnek feltevés szerint van a poliéder belsejéhez tartozó A pontja; minthogy ez a pont a π *konvex* sokszög belsejéhez tartozik, a 16. tétel szerint van a -nak két olyan E és F pontja, melyek π -hez, s ezért az adott poliéderhez tartoz-

nak, s melyeknek elrendezése EAF . Az 51. tétel folytán az a egyenesnek nincs a poliéderrel E és F -en kívül más közös pontja.

55. tétel. *Ha az α síknak van olyan pontja, mely egy konvex poliéder belsejéhez tartozik, akkor a poliédernek az α síkkal való metszete konvex sokszög. Az α sík mindkét oldalán van a poliédernek legalább egy-egy csúcsa.*



47. ábra.

Bizonyítás (47. ábra). A síknak a poliéder belsejéhez tartozó A pontján átfektettünk olyan a egyenest, mely nem tartozik az α síkhoz. Az a egyenesnek az 54. tétel szerint van a poliéderrel két közös pontja E és F , s ezek elrendezése EAF . A poliéder E és F pontjai az α sík különböző oldalán fekszenek, az 53. tétel értelmében tehát a poliédernek az α síkkal való metszete konvex sokszög.

Ha a poliéder összes csúcsai az α sík egyik oldalán fekszenek, akkor az α síknak ugyanezen az oldalán fekszenek a poliéder összes lapjai (lásd az 50. tételt követő Megjegyzést), s ezért az 54. tétel szerint a poliéder belsejének összes pontjai. Ha tehát az α síknak van a poliéder belsejében pontja, akkor α mindkét oldalán fekszik a poliédernek legalább egy-egy csúcsa.

Értelmezés. Térbeli konvex tartományon értjük valamely konvex poliéder belsejét; a poliédert, melyet a tartomány egyértelműen meghatároz (lásd az 52. tétel bizonyítását), a tartomány határárnak nevezzük.

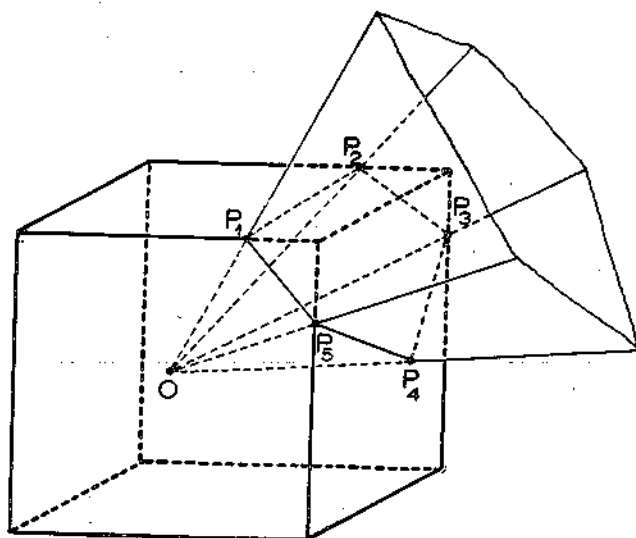
56. tétel. *Ha az α síknak van a Π konvex poliéder belsejében pontja, akkor α a poliéder belsejét két konvex tartományra osztja fel. Π belsejének bármely az α síkhoz nem tartozó pontja a két tartomány közül egyhez és csak egyhez tartozik.*

Bizonyítás. Az 55. tétel értelmében a Π poliédernek az α síkkal való metszete konvex sokszög; az általa határolt lapot jelöljük λ -val. Ha a poliéder valamely lapjának van az α sík mindkét oldalán legalább egy-egy pontja, akkor α ezt a lapot két konvex lapra osztja fel (lásd a 16. és 17. tételket). Tekintsük a poliédernek

azokat a lapjait, melyeket nem oszt fel az α sík, továbbá a többi lapoknak az α sík által meghatározott részeit, s jelöljük ezeket $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r; \lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_s$ -sel olyan módon, hogy $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r$ az α sík egyik oldalán, $\lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_s$ az α sík másik oldalán fekvő lapokat jelentsék. Mint az értelmezésekből közvetlenül kiadódik, $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r$ és λ együtt Π_1 konvex poliédert, s ugyancsak $\lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_s$ és λ együtt Π_2 konvex poliédert alkotnak. Π_1 és Π_2 belseje Π belsejéhez tartozik (lásd az 52. és 54. tételt), s viszont Π belsejének bármely nem az α síkhoz tartozó pontja Π_1 , vagy Π_2 belsejéhez tartozik.

Az 56. tételből teljes indukcióval adódik a következő

57. tétel. A Π konvex poliéder belsejét az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ síkok véges sok konvex tartományra osztják fel.



48. ábra.

58. tétel. A Π konvex poliéderen fekvő π egyszerű zárt törtvonal a poliédert két részre osztja fel. Bármely két pontot, melyek ugyanahhoz a részhez tartoznak, összeköthetünk olyan a poliéderen fekvő törtvonallal, melynek nincs π -vel közös pontja. Ha pedig egy a poliéderen fekvő törtvonalnak végpontjai a π által meghatározott különböző részekhez tartoznak, akkor ennek a törtvonalnak van π -vel közös pontja.

Bizonyítás (48. ábra). Felveszünk a Π poliéder belse-

jében tetszőleges O pontot; jelöljük a Π -n megadott egyszerű zárt törtvonalat $P_1P_2\dots P_r$ -rel. Mivel a Π poliéder konvex, az 51. és 54. tétel folytán az $(\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \dots, \vec{OP}_r)$ félsugarak egy testszöget határoznak meg, melynek a Π poliéderrel való metszete a $P_1P_2\dots P_r$ zárt törtvonal. Ez a testszög a teret két részre osztja (49. tétel); a Π poliédernek arra a két részére, melyek a nevezett testszög által meghatározott egyik, illetve másik térrészhez tartoznak, fennállanak a tételben kimondott tulajdonságok; ezt könnyen beláthatjuk, ha a tér pontjait O -ból a poliéderre vetítjük.

59. tétel. *Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ nem egy síkban fekvő pontok, van egy és csak egy olyan konvex poliéder, hogy az A_i pontok közül mindegyik a poliéderen, vagy annak belsejében fekszik, s a poliéder minden csúcsa valamely A_i pont. Ezt a konvex poliédert az adott pontok konvex burkolójának nevezzük.*

Bizonyítás. A tétel nyilvánvaló $n=4$ pont esetén; tegyük fel, hogy n -re is érvényes s bizonyítsuk be $n+1$ -re. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ és Q az adott $n+1$ pont; az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok konvex burkolóját jelöljük Π -vel. Ha Q a Π poliéderhez, vagy annak belsejéhez tartozik, akkor Π az adott $n+1$ pont konvex burkolója. Ha Q a Π külsőjében fekszik, van a poliédernek legalább egy olyan λ lapja, hogy a rajta átfektetett síknak negatív oldalán fekszik a Q pont. Jelöljük a $QA_1, QA_2, \dots, QA_n$ vonaldaraboknak a λ síkjához tartozó pontjait $B_1, B_2, \dots, B_n$ -nel, a B_i pontokat burkoló konvex sokszöget π -vel (21. tétel); a jelöléseket válasszuk olyan módon, hogy π csúcsai a π sokszögön való ciklikus elrendezésben $(B_1B_2\dots B_r)$ legyenek. A Π poliédernek a $\vec{QB}_i$ ($i=1, 2, \dots, r$) félsugáron fekvő csúcsai közül jelöljük A'_i -vel azt, melyre nézve a QA'_i szakasz meghosszabbításán nem fekszik egy A_i pont sem. A következőkben i jelenti az $1, 2, \dots, r$ indexek közül bármelyiket és $r+1$ -en 1 -et értjük. A $\vec{QB}_1, \vec{QB}_2, \dots, \vec{QB}_r$ félsugarak egy T konvex testszöget határoznak meg, melynek ezek a félsugarak az élei; a Π poliéder pontjai T -hez, vagy T belsejéhez, Π belsejének pontjai T belsejéhez tartoznak. A T testszög $(\vec{QB}_i, \vec{QB}_{i+1})$ lapján fekvő A_i pontokat és a Q pontot burkoló konvex sokszög s ennek belseje egy ϱ_i lapot alkotnak; ennek határa a QA'_i és QA'_{i+1} vonaldarabokból, s egy az A'_i és A'_{i+1} pontokat összekötő l_i törtvonalból áll, melynek minden oldala a Π poliédernek éle. A $\pi' = l_1 + l_2 + \dots + l_r$

egyszerű zárt törtvonal a Π poliédert két részre osztja fel (58. tétel); a két rész közül az, melyhez nem tartozik a λ lap, a T testszögön fekvő $q_1, q_2, \dots, q_r$ lapokkal együtt egy Π' poliédert alkot; következőképen látjuk be, hogy Π' konvex. Ha a Π poliéder λ' lapján átfektetett sík átmegy a Q ponton, akkor λ' a T testszög egyik lapjához, s így valamely q_i laphoz tartozik. Ha a Π poliéder λ' lapján átfektetett síknak negatív oldalán fekszik a Q pont, akkor a λ és a λ' lapok egy-egy C és C' belső pontján és a Q ponton átfektetett síknak a Π poliéderrel való metszete egy konvex sokszög (55. tétel); ennek a C és C' pontok által meghatározott egyik törtvonala a QCC' háromszögnek, s ezért a T testszögnek is a belsejéhez tartozik; eszerint a λ és a λ' lapok egy-egy pontját összeköthetjük a Π poliéderen olyan törtvonallal, melynek nincs a π zárt törtvonallal közös pontja. Ebből következik, hogy ha λ' a Π poliédernek olyan lapja, melyet a π' zárt törtvonal a Π poliéderen a λ laptól elválaszt, akkor λ' síkjának pozitív oldalán fekszik a Q pont. A fentiek szerint tehát a Π' poliéder konvex; ez az adott $n+1$ pont konvex burkolója. Ugyanúgy, mint a 21. tétel bizonyításában, láthatjuk be, hogy az adott $n+1$ pont Π' -t egyértelműen meghatározza.

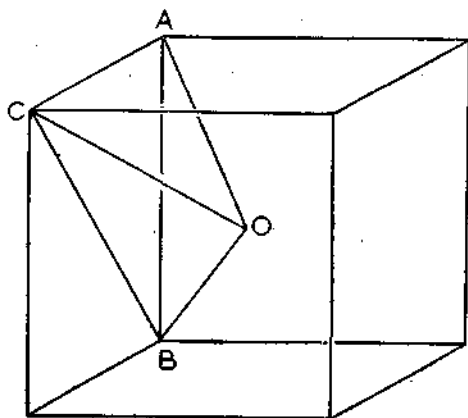
60. tétel. *Ha Q tetszőleges a Π konvex poliéder külsejében fekvő pont, van olyan a Q ponton áthaladó sík, melynek minden pontja a Π poliéder külsejében fekszik.*

Bizonyítás. Jelöljük Π' -vel a Q pontot és a Π poliéder csúcsait burkoló konvex poliédert (59. tétel); legyen λ a Π poliédernek olyan lapja, melynek negatív oldalán fekszik a Q pont. λ síkjának a Π' poliéderrel való metszete konvex sokszög (53. tétel); felvesszünk ebben a síkban olyan a egyenest, mely a Π' metszetét alkotó konvex sokszögnek a külsejében fekszik (20. tétel). A Q ponton és az a egyenesen átfektetett α síknak minden pontja a Π poliéder külsejében fekszik. Ugyanis az α síknak az a egyenes által meghatározott ama félsíkja, melyhez a Q pont tartozik, a Π poliéder λ lapján átfektetett síknak a negatív oldalán, s ezért Π külsejében fekszik. Ha α másik félsíkjában volna olyan P pont, mely Π -hez, vagy Π belsejéhez tartoznék, akkor a QP szakasz Π' -höz, vagy Π' belsejéhez tartoznék; viszont a QP szakasznak a -val közös pontja Π' külsejében fekszik; ez ellenmondás.

61. tétel. *Konvex poliéder belsejét feloszthatjuk tetraéderekre,*

azaz olyan konvex tartományokra, melyek közül mindegyiknek egy-egy tetraéder a határa.

Bizonyítás (49. ábra). Felveszünk a poliéder belsejében egy O pontot; a poliéder mindegyik lapját átlókkal háromszögekre



49. ábra.

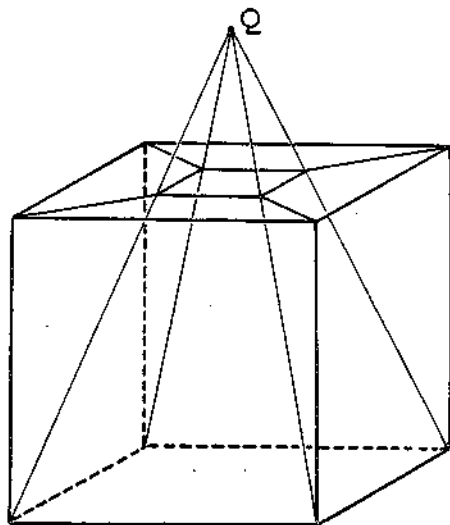
osztjuk fel (lásd 54. oldalt); legyen ABC ezek közül valamelyik. Az O, A, B, C pontok nem tartoznak egy síkhoz s így meghatároznak olyan $OABC$ tetraédert, melynek belseje az adott poliéder belsejének része. Mindezek a tetraéderek az adott konvex poliéder belsejének olyan felosztását adják, hogy a poliéder belsejének bármely pontja vagy vala-

melyik tetraéder határához, vagy pedig egy és csak egy tetraédernek a belsejéhez tartozik.

62. tétel. *Konvex poliédert alkotó lapok és csúcsok számának összege kettővel nagyobb az élek számánál (EULER-féle poliéder-tétel).*

Bizonyítás (50. ábra).

A poliéder valamely λ lapjának egyik belső pontján átfektetünk a λ síkjához nem tartozó egyenest s ezen felveszünk olyan Q pontot, mely λ síkjának negatív oldalán, de a poliéder bármely más lapján átfektetett síknak a pozitív oldalán fekszik. Ha A a poliédernek tetszőleges a λ laphoz nem tartozó pontja, a QA szakasznak a λ síkjával való A' metszéspontja, melyet az A pont vetületének nevezünk, a λ laphoz tartozik. A poliéder



50. ábra.

csúcsainak és éleinek vetületei a λ lapnak (konvex) tartományokra való felosztását adják; a poliéder λ -tól különböző lapjainak a vetületei λ felosztásának a lapjai, a poliéder éleinek és csúcsainak vetületei λ felosztásának élei és csúcsai. Ha a poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak számát rendre l , ϵ és c -vel jelöljük, akkor a λ felosztásának megfelelő számok $l-1$, ϵ és c ; a 30. tétel szerint ezek között fennáll az $(l-1) + c = \epsilon + 1$ vonatkozás, vagyis: $l + c = \epsilon + 2$.

Értelmezés. Szabályos hálózati konvex poliéderen olyat értünk, melynek egyrészt minden lapjához ugyanannyi csúcsa, másrészt minden csúcsához ugyanannyi lapja tartozik.

63. tétel. Szabályos hálózati konvex poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak számát l , ϵ , c -vel, továbbá az egy laphoz tartozó csúcsok számát n -nel, s az egy csúcshoz tartozó lapok számát m -mel jelölve, ezekre nézve csak a következő táblázatban feltüntetett összetartozó értékek lehetségesek:

l	ϵ	c	n	m
4	6	4	3	3
8	12	6	3	4
6	12	8	4	3
20	30	12	3	5
12	30	20	5	3

Bizonyítás. Mivel a poliéder minden csúcsából m él indul ki, s minden él két csúcshoz tartozik, tehát

$$\epsilon = \frac{m}{2} c;$$

minden lapnak n csúcsa van, s egy csúcshoz m lap tartozik, innen:

$$l = \frac{m}{n} c.$$

Az EULER-féle poliéder-tétel szerint tehát

$$l - \epsilon + c = c \left(\frac{m}{n} - \frac{m}{2} + 1 \right) = 2;$$

mivel c , tehát a zárójelben álló kifejezés is pozitív, innen egyszerű

átalakítással

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

Ebből következik, hogy $m \leq 5$ és $n \leq 5$, s így m és n lehetséges összetartozó értékei a következők:

$$m=3, n=3, 4, 5,$$

$$m=4, n=3,$$

$$m=5, n=3.$$

Ezekből $c, l, é$ értékeit a következő kifejezésekkel számítjuk ki:

$$c = \frac{2}{\frac{m}{n} - \frac{m}{2} + 1}, \quad l = \frac{m}{n} c, \quad é = \frac{m}{2} c,$$

s így megkapjuk a tételben foglalt táblázatot.

Értelmezés. Valamely poliédert *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha bármely a poliéderen fekvő egyszerű zárt törtvonal a poliédert két részre osztja fel. — Az 58. tétel értelmében *minden konvex poliéder egyszeresen összefüggő*.

Értelmezés. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lapok *határolt poliéderfelületet* alkotnak, ezeket a lapokat, s éleiket és csúcsaikat a felület lapjainak, éleinek és csúcsainak nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

1. Két-két lapnak vagy nincs közös pontja; vagy van egy és csak egy közös pontjuk, mely mindkettőnek csúcsa; vagy van egy és csak egy közös élük s ezenkívül nincs más közös pontjuk.
2. A felület minden éle vagy egy, vagy két laphoz tartozik.
3. A felület bármely csúcsát tartalmazó lapok lineárisan, vagy ciklikusan olyanképpen rendezhetők el, hogy bármely két egymásra következő lapnak van közös éle.

4. A felület összefüggő, vagyis a felület két tetszőleges pontjához megadható ezeket a pontokat a felületen összekötő törtvonal.

Azok az élek, melyek csak egy laphoz tartoznak, s ezeknek az éleknek a végpontjai alkotják a *felület határát*. A felület határa egyszerű zárt törtvonalakból áll, melyek közül kettő-kettőnek nincs közös pontja.

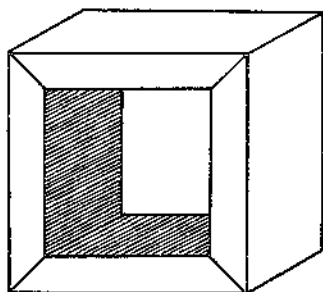
Megjegyzés. Az 53—54. oldalon értelmezett poliédereket *zárt*nak nevezzük, hogy megkülönböztessük a most értelmezett *határolt poliéderfelületektől*.

Értelmezés. Határolt poliéderfelület *keresztmetszetén* olyan a felületen fekvő egyszerű törtvonalat értünk, melynek végpontjai

a felület határának két különböző pontja, s más pontja nem tartozik a felület határához. Valamely határolt poliéderfelületet *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha bármely keresztmetszete két részre osztja fel; a két rész közül mindegyik egyszeresen összefüggő határolt poliéderfelület. Ilyen felületnek a határa egy egyszerű zárt törtvonalból áll.

Egyszeresen összefüggő zárt poliédert bármely a poliéderen fekvő egyszerű zárt törtvonal két egyszeresen összefüggő határolt poliéderfelületre oszt fel. Eszerint ha egy egyszeresen összefüggő zárt poliéder egy lapját elhagyjuk, a megmaradó lapok egyszeresen összefüggő határolt poliéderfelületet alkotnak.

A 30. tételre adott bizonyítás alkalmazásával adódik, hogy egyszeresen összefüggő határolt poliéderfelület lapjainak, éleinek



51. ábra.

és csúcsainak száma között az $l+c=e+1$ vonatkozás áll fenn. Ebből következik, hogy minden egyszeresen összefüggő zárt poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak száma között fennáll az $l+c=e+2$ vonatkozás.

Az 51. ábra nem egyszeresen összefüggő zárt poliédert ábrázol; a lapok, élek és csúcsok száma között az $l+c=e$ összefüggés áll fenn.

Fenti megjegyzéseink meghatározzák az EULER-féle poliédertétel érvényességének a körét.

11. §. A tér kettéosztása poliéderrel.

Következő tárgyalásunk célja annak bebizonyítása, hogy egy poliéder a teret két részre osztja fel. Az alkalmazandó bizonyítás módszere VEBLENTől származik s megegyezik a síkra vonatkozó 22. tétel bizonyításánál alkalmazott módszerrel. Evégből célszerű a (zárt) poliéder fogalmának kiterjesztése a következő értelmezés szerint.

Értelmezés. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lapok általános poliédert alkotnak, ezeket a lapokat s éleiket és csúcsaikat a poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

1. Két-két lapnak vagy nincs közös pontja; vagy van egy és csak egy közös pontjuk, mely mindkettőnek csúcsa; vagy van egy és csak egy közös élük s ezenkívül nincs más közös pontjuk.

2. A poliéder minden éle páros számú laphoz tartozik.

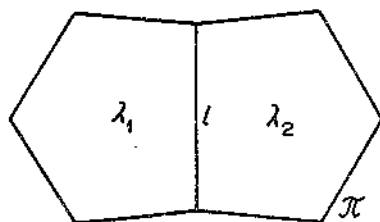
3. Ha a poliéder lapjai közül egyet, vagy többet elhagyunk, a megmaradó lapokra nézve nem teljesülnek a fenti 1., 2. feltételek.

A jelen paragrafusban poliéderen mindig általános poliédert értünk.

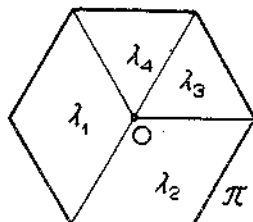
Megjegyzés. Ha általános poliéderről feltesszük, hogy konvex, vagyis hogy a poliéder bármely lapján átfektetett síknak egyik oldalán fekszenek a poliéder összes többi lapjai, akkor teljesülnek az egyszerű poliéder értelmezésében foglalt 1—4. feltételek (53—54. o.) s így a konvex poliédernek az 54. oldalon értelmezett fogalmához jutunk. (Erre a megjegyzésre további tárgyalásainkban nem fogunk hivatkozni, s ezért bebizonyítását az olvasóra bízunk.)

A poliéder több lapja, sőt több egymással szomszédos lapja ugyanahhoz a síkhoz tartozhatik. A 27. tételből közvetlenül, illetve teljes indukcióval adódik a következő két állítás:

A) Ha a poliédernek az l élhez tartozó lapjai az α síkban fekszenek, akkor a poliédernek pontosan két λ_1 és λ_2 lapja tartozik



52. ábra.



53. ábra

az l élhez; a λ_1 és λ_2 lapoknak az l -től különböző élei együtt olyan π egyszerű sokszöget alkotnak, melynek belsejében fekszik l , végpontjaitól eltekintve; π belsejének minden pontja a λ_1, λ_2 lapok közül valamelyikhez tartozik (52. ábra).

B) Ha a poliédernek az O csúchoz tartozó lapjai az α síkban fekszenek, akkor ezek a lapok olyan $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ ciklusban rendezhetők el, hogy bármely két szomszédos lapnak van egy az O -ból kiinduló közös éle, s két-két nem szomszédos lapnak O -n kívül nincs közös pontja. A $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ lapoknak az O -hoz nem tartozó élei együtt egy π egyszerű sokszöget alkotnak, melynek

belsejében fekszik az O pont s minden az O -ból kiinduló él, másik végpontjától eltekintve. π belsejének minden pontja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ lapok közül valamelyikhez tartozik (53. ábra).

A poliéder összes lapjai nem tartozhatnak egy síkhoz. Tegyük fel az ellenkezőt, s jelöljük π' -vel a poliéder csúcsait burkoló konvex sokszöget (21. tétel); a poliéder bármely éle vagy π' -höz, vagy π' belsejéhez tartozik, s ezért a poliéder éleiből alkotott bármely egyszerű sokszög belseje is π' belsejéhez tartozik: eszerint a poliédernek valamely a π' sokszögön fekvő csúcsa nem tartozhatik a poliéder éleiből alkotott bármely egyszerű sokszögnek a belsejéhez, ellentétben fenti B) megállapításunkkal.

Legyen Π' konvex poliéder, és legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ olyan síkok, melyek közül mindegyiknek van Π' belsejében pontja. Az 57. tétel szerint a Π' konvex poliéder belsejét ezek a síkok véges sok konvex tartományra osztják fel; jelöljük ezeket a tartományokat $B_1, B_2, \dots, B_r$ -rel, s a B_i határát alkotó konvex poliédert β_i -vel. — Az α_i síknak a Π' konvex poliéderrel való metszete konvex sokszög (55. tétel); az általa határolt lapot jelöljük x_i -vel ($i=1, 2, \dots, m$). A Π' konvex poliéder lapjait jelöljük $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_q$ -val, a rajtuk átfektetett síkokat $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_q$ -val. — A x_i lapokat ($i=1, 2, \dots, q$) az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ síkok olyan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ lapokra osztják fel, melyek közül mindegyiknek egy-egy konvex sokszög a határa (18. tétel); γ_k bármely belső pontja ($k=1, 2, \dots, s$) az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ síkok közül csak egyhez tartozik.

1. lemma. *Ha Π olyan poliéder, melynek minden pontja a $x_1, x_2, \dots, x_q$ lapok közül valamelyikhez tartozik, és ha a γ_k lapnak valamely belső pontja a Π poliéderen fekszik, akkor γ_k összes pontjai a Π poliéderen fekszenek.*

Bizonyítás. Legyen P a γ_k lapnak olyan belső pontja, mely a Π poliéderen fekszik; tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben a γ_k lapnak Q belső pontja nem tartozik a Π poliéderhez. Mivel a γ_k lap határa konvex sokszög, a 14. tétel szerint a PQ vonalдарab összes pontjai a γ_k laphoz tartoznak. A P pont a Π poliéder valamely lapjának pontja; arra a sokszögre, mely ennek a lapnak a határát alkotja, alkalmazzuk a 22. tételt, így adódik, hogy a PQ vonalдарabnak legalább egyik pontja a Π poliéder valamelyik élének pontja, vagy végpontja. A Π poliédernek a PQ vonalдарabon fekvő csúcsai és a poliéder éleinek a PQ vonalдарabbal való metszéspontjai közül jelöljük R -rel azt, mely Q -hoz

legközelebb fekszik. Mivel az R pont a γ_k lap belső pontja, a Π poliédernek az R pontot tartalmazó lapjai valamennyien a γ_k lap síkjában fekszenek, s így a fenti A) és B) állításokból következik, hogy R valamely a poliéder éléből alkotott π egyszerű sokszögnek a belsejében fekszik, és π belseje a Π poliéderhez tartozik. A 22. tétel szerint tehát az RQ szakasznak van közös pontja a π sokszöggel, s így a Π poliéder valamely élével, ellentétben az R pont megválasztásával.

Értelmezés. A β_i konvex poliéder minden lapja valamely γ_j lap; jelöljük $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_p}$ -vel a β_i lapjait; a β_i poliédert a $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_p}$ lapok összegének nevezzük: $\beta_i = \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \dots + \gamma_{i_p}$. A $\beta_1, \beta_2, \dots$ konvex poliéderek mod 2 összegét úgy képezzük, hogy ezek közül mindegyiket mint lapjainak összegét kifejezzük, s az adott poliéderek lapjainak összegében a γ_v -k együtthatóit mod 2 helyettesítjük 0-val, vagy 1-gyel. A megfelelő $B_1, B_2, \dots$ tartományok összegéhez számítjuk ezeknek a tartományoknak (belső) pontjait, továbbá határaiknak minden olyan pontját, amelyhez tartozó összes B_v tartományok az összeg tagjai. A $B_1, B_2, \dots$ tartományok összegének a határa az őket határoló $\beta_1, \beta_2, \dots$ konvex poliéderek mod 2 összege.

2. lemma. Minden olyan Π poliéder, mely bizonyos γ_k lapok összege, előállítható egy és csak egyféleképpen mint egymástól különböző β_i -k mod 2 összege. Az eredeti Π' konvex poliéder az összes β_i -k összege.

Bizonyítás. Ha a Π' konvex poliéder belsején átfektetett α_i síkok száma $m=1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $m-1$ -re is érvényes s bizonyítsuk be m -re. Legyen γ_v a $\Pi = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s$ poliédernek olyan lapja, mely a α_m laphoz tartozik. A β_i konvex poliéderek között van pontosan két olyan, melyekhez a γ_v lap tartozik, ezek közül az egyiket jelöljük β_1 -gyel s képezzük a $\Pi + \beta_1$ összeget. Az általános poliéder értelmezésében szereplő 1. és 2. feltételek teljesülnek a $\Pi + \beta_1$ összegre, s így ez az összeg vagy maga is egy poliéder, vagy több poliéder összege. Ezekre a poliéderekre alkalmazzuk ismét a fenti eljárást, vagyis adjunk hozzá $\Pi + \beta_1$ -hez egy olyan β_2 -t, melynek $\Pi + \beta_1$ -gyel a α_m laphoz tartozó közös γ_v lapja van. Véges sok lépés után eljutunk olyan $\Pi + \beta_1 + \dots + \beta_r$ összeghez, melynek nincsen a α_m laphoz tartozó γ_v lapja; ez az összeg vagy egy poliéder, vagy poliéderek összege. Ezek a poliéderek az indukciós feltevés szerint

kifejezhetők olyan összegekként, melyeknek tagjai a $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ lapok által a II' konvex poliéder belsejében meghatározott tartományok határai; ezek közül a tartományhatárok közül mindegyik egy vagy két β_i konvex poliédernek az összege (56. tétel). Eszerint a $II + \beta_1 + \dots + \beta_{p'}$ összeg előállítható $\beta_{p'+1} + \beta_{p'+2} + \dots + \beta_p$ alakban, vagyis

$$II + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{p'} = \beta_{p'+1} + \dots + \beta_p,$$

s ebből

$$(*) \quad II = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p,$$

hol feltehetjük, hogy a jobboldalon mod 2 egyszerűsített összeg áll, azaz olyan, melynek bármely két tagja különböző.

II -nek fenti $(*)$ előállítását egyértelmű; legyen ugyanis

$$(**) \quad II = \beta_{\lambda_1} + \beta_{\lambda_2} + \dots + \beta_{\lambda_q}$$

másik egyszerűsített előállítása; a $(*)$ és $(**)$ egyenletek összeadásából adódik

$$(+) \quad \beta_{v_1} + \beta_{v_2} + \dots + \beta_{v_h} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy az egyenlet bármely β_{v_i} tagjához tartozó γ_i lap az összegnek pontosan két β_{v_i} és β_{v_j} tagjához tartozik; $v_1, v_2, \dots, v_h$ jelentik az $1, 2, \dots, p, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ számok közül azokat, melyek ebben a sorozatban csak egyszer fordulnak elő. — Ha a x_i lapok száma $m=1$, akkor nyilván nem állhat fenn $(+)$ alakú egyenlet; tegyük fel, hogy $m-1$ számú lap esetén sem. Jelöljük B'_i -vel a $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ lapok által a II' konvex poliéder belsejében meghatározott konvex tartományokat, s β'_i -vel ezek határait. Tegyük fel, hogy a $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m$ lapok által meghatározott B_i tartományok β_i határaitra fennállana a $(+)$ egyenlet. Ha valamelyik β_{v_i} -nek nincsen a x_m laphoz tartozó γ_i lapja, akkor az illető B_{v_i} egyben egy B'_μ tartomány is. Ha pedig β_{v_i} -nek van a x_m -hez tartozó γ_i lapja, akkor van még egy β_{v_j} tag, melyhez γ_i tartozik; a B_{v_i} és B_{v_j} tartományok összege valamely B'_μ tartomány, s így $\beta_{v_i} + \beta_{v_j} = \beta'_\mu$. A $(+)$ egyenletben hasonló módon összeadva bármely két olyan β_{v_i} és β_{v_j} tagot, melyeknek van a x_m -hez tartozó közös γ_i lapjuk, kapunk

$$\beta'_{\mu_1} + \beta'_{\mu_2} + \dots + \beta'_{\mu_t} = 0$$

alakú egyenletet, hol a baloldalon álló tagok egymástól különbözők; ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy $m-1$ esetén nem áll fenn $(+)$ alakú vonatkozás. Ezzel bebizonyítottuk, hogy adott II poliédernek $(*)$ alakú előállítása egyértelmű.

64. tétel. Minden poliéder a teret két részre osztja, melyeket a poliéder belsejének és külsejének nevezünk. Bármely két a poliéder belsejében (vagy külsejében) fekvő pont összeköthető olyan törtvonallal, melynek nincs a poliéderrel közös pontja hanem egészen a poliéder belsejében (illetve külsejében) halad. Minden olyan törtvonalnak, mely a poliéder belsejében fekvő pontot annak külsejében fekvő ponttal összeköt, van a poliéderrel közös pontja.

Ezt a tételt a fenti 2. lemmából ugyanúgy vezetjük le, mint a síkra vonatkozó 22. tételt az azt előkészítő lemmából. — Ennek során az adott poliéder belsejét mint konvex tartományok összegét állítjuk elő. A konvex résztartományok közül mindegyiket mint tetraédereket összegét állíthatjuk elő (61. tétel); ebből adódik a következő

65. tétel. Minden poliéder belsejét előállíthatjuk tetraéderek összegeként.

III. Egybevágóság.

12. §. Szakaszok egyenlősége.

Értelmezés. Szakaszok között bizonyos vonatkozások állanak fenn, melyeket az „*egyenlő*” (vagy az „*egybevágó*”) szóval fejezünk ki. Erre vonatkoznak a következő axiómák.

III. 1. Minden AB szakasz önmagával egyenlő: $AB = AB$ és $AB = BA$. — Ha az AB szakasz az $A'B'$ szakasszal egyenlő, akkor az $A'B'$ szakasz az AB szakasszal egyenlő: $AB = A'B' \rightarrow A'B' = AB$. — Ha az AB szakasz egyenlő $A'B'$ -vel és $A'B''$ -vel, akkor $A'B'$ egyenlő $A'B''$ -vel: $AB = A'B', AB = A'B'' \rightarrow A'B' = A'B''$.

III. 2. Ha AB az a egyenes tetszőleges szakasza, és A' az a' egyenes valamely pontja, akkor az a' egyenesen az A' pont bármelyik oldalán van egy és csak egy olyan B' pont, melyre $AB = A'B'$.

III. 3. Ha az a egyenesen fekvő AB és BC szakaszoknak nincs közös pontjuk, s az a' egyenesen fekvő $A'B'$ és $B'C'$ szakaszoknak nincs közös pontjuk, akkor az $AB = A'B'$, és $BC = B'C'$ egyenlőségekből következik, hogy $AC = A'C'$.

A **III. 1** axióma azt fejezi ki, hogy szakaszok egyenlősége reflexív, szimmetrikus és tranzitív vonatkozás. A **III. 2** axiómának az a jelentése, hogy egy szakaszt valamely egyenesre bármely pontjától a pontnak bármelyik oldalán egyértelműen rámérhetünk.

Értelmezés. Az a egyenesen fekvő $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontoknak és az a' egyenesen fekvő $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ pontoknak elrendezését megegyezőnek mondjuk, ha bármely három i, j, k indexre, melyre fennáll az $A_i A_j A_k$ elrendezés, fennáll az $A'_i A'_j A'_k$ elrendezés is.

66. tétel. Ha az a egyenesen fekvő A, B, C pontoknak, és az a' egyenesen fekvő A', B', C' pontoknak elrendezése megegyező, akkor az $AB = A'B'$ és $BC = B'C'$ egyenlőségekből következik $AC = A'C'$.

Bizonyítás. Ha az A, B, C pontok elrendezése ABC , akkor tételünk a III. 3 axiómával megegyezik. Ha elrendezésük ACB , s ennek megfelelően $A'C'B'$, jelentse A'' az a' egyenesnek azt a pontját, melyre az $A''C'B'$ elrendezés és az $A''C' = AC$ egyenlőség áll fenn; az A'' pontot ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a III. 2 axióma értelmében. A III. 3 axióma folytán az $ACB, A''C'B'$ elrendezésekből, és az $AC = A''C', CB = C'B'$ egyenlőségekből következik, hogy $AB = A''B'$; feltételünk szerint $AB = A'B'$; a III. 1 axióma folytán tehát $A'B' = A''B'$. Az A' és A'' pontok az a' egyenesen B' -nek ugyanazon az oldalán fekszenek; a III. 2 axióma alapján az $A'B' = A''B'$ egyenlőségből következik, hogy A' azonos A'' -vel, s így $A'C' = AC$. — Végül, ha az A, B, C pontok elrendezése BAC , felcseréljük A és C -t s ezáltal ezt az esetet az előbbire vezetjük vissza.

67. tétel. Ha A, B, C az a egyenesen, és A', B', C' az a' egyenesen fekvő olyan pontok, melyekre fennállanak az $AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$ egyenlőségek, akkor az A, B, C pontok elrendezése megegyezik az A', B', C' pontok elrendezésével.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A, B, C pontok elrendezése ABC . Ha az A', B', C' pontok elrendezése $A'C'B'$ lenne, jelentse C'' az a' egyenesnek azt a pontját, melyre az $A'B'C''$ elrendezés és a $BC = B'C''$ egyenlőség áll fenn (III. 2). C' és C'' egymástól különböző pontok, mivel a B' pont különböző oldalán vannak. A III. 3 axióma folytán $AC = A'C''$; feltevésünk szerint ugyancsak $AC = A'C'$; mivel C' és C'' az a' egyenesen A' -nek ugyanazon az oldalán fekszenek, az $A'C' = A'C''$ egyenlőség, mely az előbbiekből következik, ellentmond a III. 2 axiómának. — A $C'A'B'$ elrendezést az előbbire C' és A' felcserélésével vezetjük vissza.

68. tétel. Ha A, B, C az a egyenes pontjai, és A', B' az a' egyenes pontjai, melyekre $AB = A'B'$, akkor van az a' egyenesen egy és csak egy olyan C' pont, melyre $AC = A'C'$ és $BC = B'C'$.

Bizonyítás. Ha az A, B, C pontok elrendezése ABC , jelentse C' az a' egyenesnek azt a pontját, melyre az $A'B'C'$ elrendezés és a $BC = B'C'$ egyenlőség áll fenn; a III. 3 axióma szerint $AC = A'C'$. — A CAB elrendezést az előbbire A és B felcserélésével vezetjük vissza. — Végül ha az A, B, C pontok elrendezése ACB , akkor legyen C' az $A'B'$ félsugárnak az a' pontja, melyre $AC = A'C'$; jelentse továbbá B'' az a' egyenesnek azt a pontját.

melyre az $A'C'B'$ elrendezés és a $CB = C'B'$ egyenlőség áll fenn. A III. 3 axioma folytán $AB = A'B'$ s feltevés szerint $AB = A'B'$, tehát $A'B' = A'B'$. Mivel B' és B'' az a' egyenesen A' -nek ugyanazon az oldalán vannak, a III. 2 axioma szerint B' és B'' azonosak; ezért $AC = A'C'$, $CB = C'B'$.

Ha C'' az a' egyenes másik olyan pontja lenne, melyre $AC = A'C''$ és $BC = B'C''$, akkor III. 1 szerint $A'C' = A'C''$, $B'C' = B'C''$, $A'B' = A'B'$, s ezért a 67. tétel értelmében az A' , B' , C' és az A' , B' , C'' pontok elrendezése megegyező; eszerint C' és C'' az A' pontnak ugyanazon az oldalán fekszenek, s így az $A'C' = A'C''$ egyenlőség következtében, III. 2 szerint, a C' és C'' pontok azonosak.

Értelmezés. Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ és $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ olyan pontok, hogy az i, j indexek bármely értékeinél fennáll az $A_i A_j = A'_i A'_j$ egyenlőség, akkor az $A_1 A_2 \dots A_n$ és az $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ pontrendszereket (vagy idomokat) egybevágóknak nevezzük, s ezt az $A_1 A_2 \dots A_n \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_n$ jellel fejezzük ki.

69. tétel. Ha az a egyenesen fekvő $A_1, A_2, \dots, A_n$ és az a' egyenesen fekvő $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ pontokra nézve fennáll az $A_1 A_2 \dots A_n \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_n$ egybevágóság, akkor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok elrendezése megegyezik az $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ pontok elrendezésével.

Bizonyítás. A 67. tétel értelmében bármely három i, j, k indexre nézve az A_i, A_j, A_k pontok elrendezése megegyezik az A'_i, A'_j, A'_k pontok elrendezésével, tekintettel az $A_i A_j A_k \equiv A'_i A'_j A'_k$ vonatkozásra. A 4. tétel szerint következik ebből, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ és az $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ pontok elrendezése megegyező.

70. tétel. Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ az a egyenesen, és $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ az a' egyenesen fekvő olyan pontok, hogy $A_1 A_2 \dots A_n \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_n$ ($n \geq 2$), akkor az a egyenes minden P pontjának megfelel az a' egyenesnek egy és csak egy olyan P' pontja, melyre $A_1 A_2 \dots A_n P \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_n P'$.

Bizonyítás. Az A_i pontok jelölését válasszuk olyan módon, hogy elrendezésük $A_1 A_2 \dots A_n$ legyen; a 69. tétel szerint az A'_i pontok elrendezése $A'_1 A'_2 \dots A'_n$. Tegyük fel, hogy a P pont az $A_r A_{r+1}$ szakaszon fekszik; a 68. tétel értelmében van az a' egyenesen egy és csak egy olyan P' pont, melyre $A_r A_{r+1} P \equiv A'_r A'_{r+1} P'$, s a 67. tétel szerint a P' pont az $A'_r A'_{r+1}$ szakasz pontja. Ha pedig P az $A_1 A_n$ szakaszon kívül fekszik, s elrendezése például $A_1 A_n P$, akkor a nevezett tételek szerint van az a' egyenesen egy és csak egy olyan P' pont, melyre az $A_1 A_n P \equiv A'_1 A'_n P'$ egybevágóság és ennek folytán az $A'_1 A'_n P'$

elrendezés áll fenn. A 4. tételből következik, hogy mindkét esetben, bármely i és j indexre, az A_i, A_j, P pontok elrendezése megegyezik az A'_i, A'_j, P' pontok elrendezésével, s így a 66. tétel szerint az $A_i A_j = A'_i A'_j$ és $A_i P = A'_i P'$ (illetve az $A_i A_n = A'_i A'_n$ és $A_n P = A'_n P'$) egyenlőségekből következik, hogy $A_i P = A'_i P'$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

A 70. tételből közvetlenül következik a

71. tétel. *Ha az a egyenesen fekvő A, B, C, D és az a' egyenesen fekvő A', B', C', D' pontokra fennállanak az $ABC \equiv A'B'C'$ és $ABD \equiv A'B'D'$ egybevágóságok, akkor $CD = C'D'$, s így $ABCD \equiv A'B'C'D'$.*

72. tétel. *Egy AB szakasz nem egyenlő bármely valódi részével. Vagyis ha C és D az AB szakasz pontjai, akkor AB nem egyenlő CD -vel. (A III. 2 axioma szerint pedig AB nem egyenlő AC -vel.)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A, B, C, D pontok elrendezése $ACDB$; legyen D' az AB egyenesnek az a pontja, melyre az ABD' elrendezés és a $BD' = CA$ egyenlőség áll fenn (III. 2). Az ABD', DCA elrendezésekből és az $AB = DC, BD' = CA$ egyenlőségekből III. 3 szerint következik, hogy $AD' = DA$; minthogy pedig, tekintettel a DBD' elrendezésre, a D és D' pontok egymástól különböznek, és az A pontnak ugyanazon az oldalán vannak (mivel elrendezésük ADD'), ezért az $AD = AD'$ egyenlőség ellentmond a III. 2 axiómának.

Értelmezés. Ha az a egyenesen fekvő A, B, C pontok elrendezése ABC , akkor azt mondjuk, hogy az AB szakasz kisebb mint az AC szakasz, és az AC szakasz nagyobb mint az AB szakasz. — Legyenek általánosabban AB és CD ugyanazon, vagy két különböző egyenesen fekvő szakaszok; ha van a CD szakasznak olyan E pontja, melyre nézve az AB szakasz a CE szakasszal egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy AB kisebb mint CD és CD nagyobb mint AB . Ezt a vonatkozást a következő jelekkel fejezzük ki: $AB > CD$ és $CD < AB$.

A fenti értelmezés igazolására szolgálnak a következő állítások. Ha $AB = A'B'$ és $CD = C'D'$, akkor AB nagyobb, vagy egyenlő, vagy kisebb mint a CD szakasz, aszerint, hogy $A'B'$ nagyobb, vagy egyenlő, vagy kisebb mint a $C'D'$ szakasz (67. és 68. tétel). — Bármely két AB és CD szakaszra fennáll az $AB < CD$, $AB = CD$, $AB > CD$ vonatkozások közül egy és csakis egy (III. 2 és II. 2 axioma folytán). Ha $AB < CD$ és $CD < EF$, akkor $AB < EF$ (az előbbi állítások és a 3. tétel folytán). — Ha A és B

a CD szakasz pontjai, akkor $AB < CD$; ugyanis, ha elrendezésük $CABD$, akkor az értelmezés szerint $AB < AD$ és $AD < CD$ s ebből $AB < CD$.

Értelmezés. Ha az a egyenesen fekvő A, B, C pontok elrendezése ABC , akkor az AC szakaszt az AB és BC szakaszok összegének nevezzük, jelben $AC = AB + BC$. Ha általánosabban AB és CD ugyanazon, vagy két különböző egyenesen fekvő szakaszok az AB és CD szakaszok összegét következőképpen értelmezzük: legyenek valamely a' egyenesen A', B', C' olyan pontok, melyeknek elrendezése $A'B'C'$, s amelyekre fennállanak az $AB = A'B'$ és $CD = B'C'$ egyenlőségek; az $A'C'$ szakaszt az AB és CD szakaszok összegének nevezzük: $A'C' = AB + CD$.

Az összeadás értelmezésének igazolására jegyezzük meg, hogy az összeg független attól, melyik a' egyenesen végeztük az összeadást, vagyis ha A'', B'', C'' valamely a'' egyenesnek olyan pontjai, melyeknek elrendezése $A''B''C''$, s amelyekre szintén $AB = A''B''$, $CD = B''C''$, akkor $A'C' = A''C''$. A III. 1 axioma szerint ugyanis $A'B' = A''B''$ és $B'C' = B''C''$, ezekből tekintettel az $A'B'C'$ és $A''B''C''$ elrendezésekre a III. 3 axioma szerint következik, hogy $A'C' = A''C''$.

73. tétel. A szakaszokra vonatkozóan értelmezett összeadás kommutatív és asszociatív művelet; vagyis $AB + CD = CD + AB$, és $(AB + CD) + EF = AB + (CD + EF)$.

Bizonyítás. Legyenek A', B', C' az a' egyenesen fekvő pontok $A'B'C'$ elrendezésben, melyekre $AB = A'B'$ és $CD = B'C'$; értelmezés szerint $AB + CD = A'C'$. A $CD = C'B'$ és $AB = B'A'$ egyenlőségekből $CD + AB = C'A' = A'C'$. — Legyenek A', B', C', D' az a' egyenesen fekvő pontok, melyeknek elrendezése $A'B'C'D'$, s melyekre $AB = A'B'$, $CD = B'C'$, $EF = C'D'$; az értelmezés szerint $AB + CD = A'C'$ és $CD + EF = B'D'$; így $(AB + CD) + EF = A'C' + C'D' = A'D'$, és $AB + (CD + EF) = A'B' + B'D' = A'D'$.

A fentiekből a 72. tétel alapján közvetlenül következik, hogy ha $AB < CD$ és $A'B' \leq C'D'$, akkor $AB + A'B' < CD + C'D'$.

Értelmezés. A CD szakaszt az AB szakasz n -szeresének nevezzük, jelben $CD = n \cdot AB$, ha van a CD szakaszon $n-1$ olyan $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ pont, melyeknek elrendezése $CC_1C_2 \dots C_{n-1}D$, s melyekre $AB = CC_1 = C_1C_2 = \dots = C_{n-1}D$.

Ha $AB < A'B'$, akkor az AB szakasz n -szerese is kisebb mint az $A'B'$ szakasz n -szerese.

Értelmezés. Az AB szakasz középpontján az AB egyenes olyan P pontját értjük, melyre nézve $AP = BP$.

Az értelmzésből következik a III. 2 axioma alapján, hogy bármely AB szakasz középpontja az AB szakaszon (nem pedig a szakasz meghosszabbításán) fekszik. — Az AB szakasznak nem lehet két egymástól különböző P és Q középpontja; tegyük fel például, hogy Q az AP szakaszon fekszik; a fenti értelmzések szerint $AQ < AP = PB < QB$, tehát $AQ < BQ$ s ez a vonatkozás kizárja azt, hogy $AQ = BQ$.

A III. 1–3 axiomák alapján nem bizonyítható be, hogy minden szakasznak van középpontja.

13. §. Az egyenes eltolásai és tükrözései.

A szakaszok egyenlőségére vonatkozó III. 1–3 axiomák alapján értelmezzük az egyenesnek önmagában való eltolásait és tükrözéseit.

Értelmezés. Az a egyenesnek az a' egyenesre való kölcsönösen egyértelmű leképezésén olyan előírást értünk, mely az a egyenes minden A pontjához hozzárendel egy és csak egy az a' egyenesen fekvő A' pontot, olyan módon, hogy az a' egyenes bármely A' pontja az a egyenes egy és csak egy A pontjának felel meg. Az A ponthoz rendelt A' pontot az A képeinek nevezzük. — Az adott leképezés inverzén, vagy megfordításán értjük az a' egyenesnek az a egyenesre való ama leképezését, melynél minden A' pontnak olyan A pontot feleltetünk meg, hogy annak az eredeti leképezésnél származó képe az A' pont. — Ha az a és az a' egyenesek azonosak, a leképezést az a egyenes önmagára való leképezésének nevezzük. Azonosságnak, vagy az a egyenes azonos leképezésének nevezzük azt a leképezést, mely az a egyenes minden pontját önmagának felelteti meg.

Értelmezés. Az a egyenesnek az a' egyenesre való leképezését kongruens leképezésnek nevezzük, ha az a egyenes bármely két A és B pontjának az a' egyenes olyan A' , B' pontjai felelnek meg, melyekre az AB és $A'B'$ szakaszok egyenlők.

74. tétel. Ha A és B az a egyenes két tetszőleges pontja és A' , B' az a' egyenesnek két olyan pontja, melyekre $AB = A'B'$, van a -nak az a' -re egy és csak egy olyan kongruens leképezése, melynél az A , B pontok képei rendre az A' , B' pontok.

Bizonyítás. A 68. tétel értelmében az a egyenes bármely P pontjának megfelel az a' egyenesnek egy és csak egy olyan P' pontja, melyre $ABP \equiv A'B'P'$. Ha P és Q az a egyenes két tetszőleges pontja, és P', Q' az a' egyenesnek azok a pontjai, melyekre $ABP \equiv A'B'P'$ és $ABQ \equiv A'B'Q'$, akkor a 71. tétel folytán $PQ = P'Q'$.

75. tétel. Az a egyenesnek az a' egyenesre való kongruens leképezése megtartja az egyenes pontjainak lineáris elrendezését; vagyis az a egyenesen fekvő tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok elrendezése megegyezik a nekik megfelelő $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ képpontoknak az a' egyenesen való elrendezésével.

Tekintettel az $A_i A_j = A'_i A'_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) egyenlőségekre, állításunk a 69. tétel közvetlen következménye.

Értelmezés. Jelöljük S -sel az a egyenesnek az a' egyenesre, és T -vel az a' -nek az a'' egyenesre való kölcsönösen egyértelmű leképezését. Az S és T leképezések ST szorzata az a egyenesnek az a'' egyenesre való leképezése, mely azáltal származik, hogy előbb az S s azután a T leképezést alkalmazzuk. Legyen A az a egyenes valamely pontja; ennek az S leképezésénél származó képét $A' = S(A)$ -val, s az A' pontnak a T leképezésénél származó képét $A'' = T(A')$ -vel jelöljük. Értelmezés szerint az A pontnak az ST leképezésénél származó képe az A'' pont, melyet $T(S(a)) = ST(A)$ -val jelölünk.

76. tétel. Ha S az a egyenesnek az a' egyenesre való kongruens leképezése, akkor S inverze, melyet S^{-1} -gyel jelölünk, az a' egyenesnek az a -ra való kongruens leképezése. — Ha S az a egyenesnek az a' egyenesre, és T az a' -nek az a'' egyenesre való kongruens leképezése, akkor ST az a -nak az a'' egyenesre való kongruens leképezése.

A tételben foglalt két állítás közvetlenül következik a kongruens leképezés értelmzéséből a III. 1 axioma alapján.

Értelmezés. Elemek valamely összessége csoportot alkot, ha bármely két S és T elemhez hozzá van rendelve az összességnek egy meghatározott ST eleme, melyet S és T szorzatának nevezünk, olyan módon, hogy a következő feltételek teljesülnek:

1. Van egy és csak egy olyan E elem (egységelem), hogy az összesség minden S elemére $ES = SE = S$.

2. Minden S elemnek megfelel egy és csak egy olyan S^{-1} elem, melyre $SS^{-1} = E$.

3. Bármely három S, T, U elemre nézve $(ST)U = S(TU)$.

A fenti feltételekből következik, hogy $S^{-1}S = E$; ugyanis az $SU = TU$ vonatkozásból jobbról U^{-1} -gyel való szorzással következik a 2. és 3. feltételek szerint $(SU)U^{-1} = S(UU^{-1}) = S = (TU)U^{-1} = T(UU^{-1}) = T$, tehát $S = T$. Mivel $(S^{-1}S)S^{-1} = S^{-1}(SS^{-1}) = S^{-1}E = ES^{-1}$, előbbi eredményünk értelmében $S^{-1}S = E$. Az S^{-1} elemet S inverzének nevezzük; következik, hogy az S^{-1} elem inverze az S elem. Ezzel igazoltuk azt is, hogy az $US = UT$ vonatkozásból következik: $S = T$.

A fenti értelmezés alapján a 76. tételből közvetlenül adódik a következő

77. tétel. Egy egyenesnek önmagára való kongruens leképezései csoportot alkotnak.

A csoport elemei az a egyenes önmagára való kongruens leképezései; az egységelem az a egyenes azonos leképezése; a leképezések inverzeit és szorzatait fenti értelmezéseink adják.

Értelmezés. Az a egyenes irányításán olyan előírást értünk, mely az a egyenes bármely két egymástól különböző A és B pontjához az $A \subset B$ és $B \subset A$ vonatkozások közül az egyiket és csak egyiket rendeli hozzá olyan módon, hogy bármely három A, B, C pontra az $A \subset B$ és $B \subset C$ vonatkozásokból az $A \subset C$ vonatkozás következik. (Az $A \subset B$ vonatkozást így olvassuk: A megelőzi B -t, B követi A -t.) Az irányításról azonkívül feltesszük, hogy a lineáris rendezéssel a következő összefüggésben van:

Ha A, B, C az a egyenes három tetszőleges pontja, melyeknek elrendezése ABC , akkor vagy $A \subset B, B \subset C$, vagy $C \subset B, B \subset A$.

Az a egyenes irányítását egyértelműen meghatározza két tetszőleges A és B pontjának $A \subset B$, vagy $B \subset A$ vonatkozása. Az egyenesnek azt a két irányítását, mely az $A \subset B$, illetve a $B \subset A$ vonatkozásnak megfelel, egymással ellenkező irányításoknak nevezzük.

Értelmezés. Egy szakasz irányítását végpontjainak valamely sorrendje meghatározza. Az AB irányított szakasz kezdőpontja az A és végpontja a B pont. BA és AB ellenkező irányítású szakaszok. — Legyen adva az AB egyenes egyik irányítása; az AB szakaszt erre az irányításra vonatkozóan pozitívnak, vagy negatívnak nevezzük, aszerint, hogy az a egyenesen megadott irányítás értelmében A megelőzi, vagy követi B -t. Ha AB pozitív szakasz, BA negatív.

Értelmezés. Az a egyenesen fekvő AB és CD irányított

szakaszokat *egyenlőknek* nevezzük, ha az AB és CD szakaszok egyenlők a nem irányított szakaszokra vonatkozó egyenlőség értelmében, s azonkívül az AB és CD szakaszok iránya megegyező, vagyis ha az a egyenes megadott irányítására vonatkozóan előjeleik megegyezők.

Értelmezés. Az a egyenesen fekvő irányított szakaszok összegét következőképen értelmezzük. Az AB és BC szakaszok összegén értjük az AC irányított szakaszt, bármilyen is az A, B, C pontok elrendezése. — Ha általánosabban AB és CD tetszőleges az a egyenesen fekvő szakaszok, legyen BE az a egyenesnek az az irányított szakasza, mely CD -vel egyenlő; értelmezés szerint az AB és CD szakaszok összege az AE szakasz. — Ha az A és E pontok egybeesnek, az AE szakaszt *nulla-szakasznak* nevezzük, s azt mondjuk, hogy az AB és CD szakaszok összege 0 . Például $AB + BA = 0$.

Irányított szakaszok összeadása asszociatív és kommutatív művelet. — Ha az a egyenes A, B, C, D és A', B', C', D' pontjaira fennállanak az $AB = A'B'$, és $CD = C'D'$ egyenlőségek, akkor $AB + CD = A'B' + C'D'$.

Értelmezés. Legyenek A, B az a egyenesen fekvő pontok. Az a egyenesnek AB irányított szakasszal való eltolását következőképen értelmezzük. Az a egyenes minden P pontjának megfeleltetjük a -nak azt a P' pontját, melyre a PP' irányított szakasz AB -vel egyenlő. Az *egyeses eltolása annak önmagára való kongruens leképezése*; ha ugyanis P és Q az egyenes két tetszőleges pontja, és P', Q' ezeknek képei, az értelmezés szerint $PP' = AB$ és $QQ' = AB$, innen $PP' = QQ'$; az összeadás kommutativitására való tekintettel adódik ebből, hogy $PQ = PP' + P'Q = P'Q + QQ' = P'Q'$; a $PQ = P'Q'$ egyenlőség épen azt fejezi ki, hogy az adott leképezés az egyenesnek önmagára való kongruens leképezése.

Az egyenesnek önmagában való eltolásai csoportot alkotnak. Az AB és a CD szakasszal való eltolások összetétele, vagy szorzata az $AB + CD$ szakasszal való eltolás. A csoport egységeleme a nulla-szakasszal való eltolás, vagyis az azonos leképezés. Az AB szakasszal való eltolás inverze a BA szakasszal való eltolás.

Az egyenes eltolásainak csoportja kommutatív csoport: ezen azt értjük, hogy bármely két elemének szorzata független a tényezők sorrendjétől. Állításunk igazolására azt kell belátnunk, hogy az AB és a CD szakaszokkal való eltolások szorzata megegyezik a CD

és az AB szakaszokkal való eltolások szorzatával; ez pedig következik az $AB + CD = CD + AB$ vonatkozásból, vagyis az irányított szakaszok összeadásának kommutativitásából.

Az egyenes önmagában való eltolásainak csoportja az egyenesen egyszeresen tranzitív: ezen azt értjük, hogy az egyenes bármely két A és B pontjához tartozik a csoportnak egy és csak egy olyan leképezése, mely A -t B -be viszi át; ez a leképezés ugyanis az egyenesnek AB szakasszal való eltolása.

Eredményeinket a következő tételben foglaljuk össze:

78. tétel. Az egyenes önmagában való eltolásai az egyenesnek kongruens leképezései. Ezeknek összessége csoportot alkot, mely kommutatív és az egyenesen egyszeresen tranzitív.

Értelmezés. Legyen A és B az a egyenesnek két tetszőleges pontja; az a egyenes tükrözését, mely az A és B pontokat felcseréli, következőképen értelmezzük. Az a egyenes minden P pontjához hozzárendeljük az a egyenesnek azt a P' pontját, melyre az AP és $P'B$ irányított szakaszok egyenlők. Az a egyenesnek ez a leképezése kölcsönösen egyértelmű; bármely PQ szakasznak vele egyenlő, de ellenkező előjelű $P'Q'$ szakasz felel meg; ugyanis az $AP = P'B$ és a $QA = BQ'$ egyenlőségekből összeadással adódik $QP = P'Q'$. Eszerint az egyenes tükrözése az egyenesnek önmagára való kongruens leképezése.

Az egyenes tükrözésének négyzete (azaz önmagával való szorzata) az azonosság; olyan leképezést, melynek négyzete az azonosság, involutoriusnak nevezünk.

Ha van az AB szakasznak középpontja, C , ez az A és B pontokat felcserélő tükrözésnél önmagának felel meg, mivel az AC és CB irányított szakaszok egyenlők. Ebben az esetben a leképezést a C pontra vonatkozó tükrözésnek nevezzük, és következőképen értelmezhetjük: az a egyenes bármely P pontjának azt a P' pontját feleltetjük meg mint képet, melyre $PC = CP'$.

Értelmezés. Ha az a egyenes önmagára való kongruens leképezésénél az AB szakasznak vele megegyező irányítású $A'B'$ szakasz felel meg, akkor bármely más CD szakasz és ennek $C'D'$ képe is megegyező irányúak, a 75. tétel értelmében. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a leképezés megtartja az egyenes irányítását. — Ha pedig az AB szakasz és ennek $A'B'$ képe ellenkező irányúak, azt mondjuk, hogy a leképezés megfordítja az egyenes irányítását.

79. tétel. Az egyenes bármely önmagára való kongruens

leképezése az egyenes eltolása, vagy tükrözése, aszerint, hogy megtartja, vagy megfordítja az egyenes irányítását.

Bizonyítás. Ha A és B az egyenes két tetszőleges pontja, és A' , B' képpontjaik, akkor feltételünk szerint az AB és $A'B'$ szakaszok egyenlők, legfeljebb előjelüktől eltekintve. Ha irányuk is megegyező, akkor az egymással egyenlő AB és $A'B'$ szakaszokhoz hozzáadva a BA' irányított szakaszt, az összeadás kommutativitására való tekintettel adódik, hogy az AA' és BB' irányított szakaszok egyenlők; ebben az esetben tehát a leképezés az egyenesnek önmagában AA' szakasszal való eltolása. — Ha pedig a leképezés megfordítja az egyenes irányítását, jelöljük A' -vel A -nak és A'' -vel A' -nek a leképezésnél származó képét; a feltevés szerint $AA' = A''A'$; ebből következik, hogy $A = A''$. A leképezés tehát az egyenesnek az A és A' pontokat felcserélő tükrözése.

Az egyenes két különböző tükrözésének szorzata az egyenes valamely eltolása, mivel megtartja az egyenes irányítását.

Mutassunk rá a következő negatív tényekre: Az egyenes tükrözései nem alkotnak csoportot. Az egyenes különböző tükrözései nem felcserélhető leképezések; két különböző tükrözés szorzata, bármelyik sorrendben szorozzuk őket, az egyenesnek egy-egy eltolását adja, de más-más eltolást aszerint, hogy milyen sorrendben szoroztuk őket.

A 79. tétele korolláriuma a következő

80. tétel. *Ha egy egyenes önmagára való kongruens leképezésénél annak valamely A pontja önmagának felel meg, akkor a leképezés vagy az azonosság, vagy az egyenesnek az A pontra vonatkozó tükrözése, aszerint, hogy az egyenesnek az A pont által meghatározott két fésugara önmagának, vagy egymásnak felel meg.*

14. §. Síkidomok egybevágósága.

Értelmezés. *Síkidomon* egy síkban fekvő véges sok pont összességét értjük. Az $A_1A_2 \dots A_n$ és az $A'_1A'_2 \dots A'_n$ síkidomokat, melyek ugyanabban a síkban, vagy két különböző síkban fektésznek, *egybevágóknak* nevezzük, ha az A_iA_j és az $A'_iA'_j$ (nem irányított) szakaszok egyenlők az i, j indexek minden értékére ($i, j = 1, 2, \dots, n$); a két idom egybevágóságát az $A_1A_2 \dots A_n \equiv A'_1A'_2 \dots A'_n$ jellel fejezzük ki.

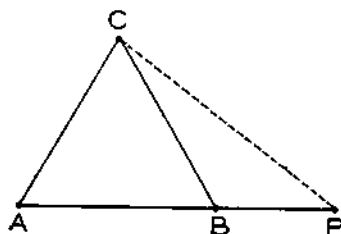
A síkidomokra vonatkozóan értelmezett egybevágóság reflexív, szimmetrikus és tranzitív vonatkozás a III. 1 axioma folytán.

Síkidomok egybevágóságára vonatkoznak a következő axiómák:

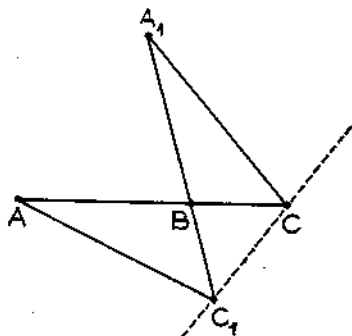
III. 4. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és A', B' egy α síkban fekvő pontok, melyekre $AB = A'B'$, akkor van az α síkban az $A'B'$ egyenes bármelyik oldalán egy és csak egy olyan C' pont, melyre ABC egybevágó $A'B'C'$ -vel.

III. 5. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok és P az AB egyenes pontja, továbbá A', B', C', P' , olyan pontok, melyekre $ABC \equiv A'B'C'$ és $ABP \equiv A'B'P'$, akkor $CP = C'P'$ (54. ábra).

Ezek az axiómák a merev síklap mozgására, vagy átvitelére vonatkozó alapvető tulajdonságokat foglalják magukban.



54. ábra.



55. ábra.

81. tétel. Ha A, B, C egy egyenesen fekvő pontok és A', B', C' olyan pontok, melyekre $ABC \equiv A'B'C'$, akkor A', B', C' is egy egyenesen fekszenek.

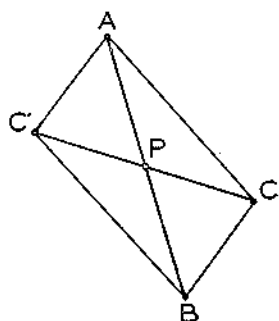
Bizonyítás (55. ábra). Tegyük fel, hogy az A, B, C pontok elrendezése ABC . Ha A', B', C' nem fekszenek egy egyenesen, az $AB = A'B'$ egyenlőség folytán van az AB egyenesen átfektetett valamely α síkban az AB egyenes egyik oldalán egy és csak egy olyan C_1 pont, melyre $ABC_1 \equiv A'B'C'$ (III. 4). A C_1B egyenesen van egy és csak egy olyan A_1 pont, melynek elrendezése A_1BC_1 , s melyre $A_1B = AB$ (III. 2). Az A_1BC_1 és ABC elrendezéséből és az $AB = A_1B$ és $BC = BC_1$ egyenlőségekből következik, hogy $AC = A_1C_1$ (III. 3); tehát $ABC \equiv A_1BC_1$; ebből és az $ABA_1 \equiv A_1BA$ egybevágóságból következik a III. 5 axióma alapján, hogy $A_1C = AC_1$. A C_1 pont meghatározása szerint $AC_1 = A'C'$, s feltevésünk értelmében $AC = A'C'$; a III. 1 axióma ismételt alkalmazásával adódik, hogy $AC_1 = AC = A_1C = A_1C_1$. Eszerint az ACC_1 és A_1CC_1 idomok egybevágók; az A és A_1 pontok az α síkban a CC_1 egye-

nek ugyanazon az oldalán fekszenek, mivel az AC és A_1C_1 szakaszoknak van közös pontja: B . A III. 4 axioma szerint az A és A_1 pontok egybeesnek, s így az I. 1 axioma értelmében az AC és A_1C_1 egyenesek is azonosak, feltevésünkkel ellentétben.

A 81. tételből következik, hogy egy háromszög valamely oldala nem lehet egyenlő a másik két oldal összegével.

82. tétel. *Minden szakasznak van középpontja.*

Bizonyítás. Legyen AB tetszőleges szakasz, és C nem az AB egyenesen fekvő pont. A III. 1 axioma értelmében az AB és BA szakaszok egyenlők, s így a III. 4 axioma szerint van az ABC síkban



56. ábra.

a BA egyenesnek a C pontot nem tartalmazó oldalán egy és csak egy olyan C' pont, melyre $ABC \equiv BAC'$ (56. ábra). Legyen P a CC' szakasznak az AB egyenessel való metszéspontja (12. tétel). A 68. tétel szerint van az AB egyenesen egy és csak egy olyan P' pont, melyre $ABP \equiv BAP'$; ebből és az $ABC \equiv BAC'$ vonatkozásból következik a III. 5 axioma szerint $CP = C'P'$; az $ABC \equiv BAC'$ és $ABP \equiv BAP'$ vonatkozásokból hasonlóan adódik $CP' = C'P$; tehát $CPC' \equiv C'P'C$. Mivel pedig

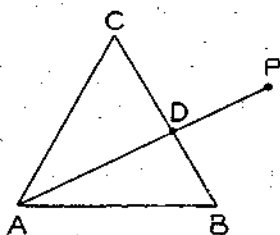
C, P, C' egy egyenesen fekszenek, tehát a C, P', C' pontok is egy egyenesen fekszenek (81. tétel), s így P' a CC' egyenesnek az AB egyenessel való P metszéspontjával egybeesik; a fenti $ABP \equiv BAP'$ vonatkozásból adódik tehát $AP = BP$, vagyis P az adott AB szakasz középpontja.

83. tétel. *Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és A', B', C' tetszőleges olyan pontok, melyekre $ABC \equiv A'B'C'$, akkor az ABC sík bármely P pontjának megfelel az $A'B'C'$ síknak egy és csak egy olyan P' pontja, melyre $ABCP \equiv A'B'C'P'$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy P a BC egyenesen fekvő pont; a 68. tétel szerint van a $B'C'$ egyenesen egy és csak egy olyan P' pont, melyre $BCP \equiv B'C'P'$; ebből és a $BCA \equiv B'C'A'$ vonatkozásból adódik: a III. 5 axioma alkalmazásával $AP = A'P'$, tehát $ABCP \equiv A'B'C'P'$. Viszont, ha P'' az $A'B'C'$ síknak olyan pontja, melyre $ABCP \equiv A'B'C'P''$, akkor — mivel B, C, P egy egyenesen fekszenek — a $BCP \equiv B'C'P''$ vonatkozásból a 81. tétel értelmében következik, hogy a B', C', P'' pontok is egy egyenesen fekszenek; a 68. tétel szerint a $B'C'P' \equiv B'C'P''$ vonat-

kozásból következik tehát, hogy $P' = P''$. Ezzel igazoltuk a fenti tételt arra az esetre, midőn P a BC egyenes pontja.

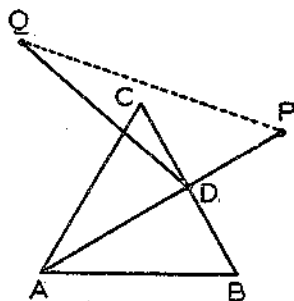
Legyen most P az ABC sík tetszőleges pontja; van az ABC háromszögnek legalább egy olyan csúcsa, — nevezzük azt A -nak — hogy az AP és BC egyenesek metszik egymást valamely D pontban (l. 14. és 15. tételt). (57. ábra). Jelöljük D' -vel a $B'C'$ egyenesnek azt a pontját, melyre $BCD \equiv B'C'D'$. A tételnek az előző bekezdésben elintézett speciális esete szerint tehát $ABCD \equiv A'B'C'D'$. Az $A'D'$ egyenesen van egy és csak egy olyan P' pont, melyre $ADP \equiv A'D'P'$ (68. tétel). Az $ADP \equiv A'D'P'$, $ADB \equiv A'D'B'$ és $ADC \equiv A'D'C'$ vonatkozásokból a III. 5 axioma alkalmazásával



57. ábra.

következik, hogy $BP = B'P'$ és $CP = C'P'$, tehát $ABCP \equiv A'B'C'P'$. — Ha P'' az $A'B'C'$ sík olyan pontja, melyre $ABCP \equiv A'B'C'P''$, akkor P'' a fent meghatározott P' ponttal egybeesik. Az $ABCP \equiv A'B'C'P' \equiv A'B'C'P''$ vonatkozásokból következik ugyanis $B'C'P' \equiv B'C'P''$; ebből és az egy egyenesen fekvő B', C', D' pontok $B'C'D' \equiv B'C'D'$ vonatkozásából következik a III. 5 axioma szerint, hogy $D'P' = D'P''$; tehát $A'D'P' \equiv A'D'P''$. Mivel A', D', P' egy egyenesen fekszenek, az utóbbi vonatkozásból következik a 81. tétel szerint, hogy A', D', P'' egy egyenesen fekszenek, és a 68. tétel szerint, hogy a P' és a P'' pontok egybeesnek.

84. tétel. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és P, Q az ABC sík tetszőleges pontjai, továbbá A', B', C', P', Q' egy síkban fekvő olyan pontok, melyekre $ABCP \equiv A'B'C'P'$ és $ABCQ \equiv A'B'C'Q'$, akkor $PQ = P'Q'$.



58. ábra.

Bizonyítás (58. ábra). Tegyük fel, hogy az AP egyenesnek van a BC egyenessel közös pontja: D ; a 83. tétel bizonyítása szerint van az $A'P'$ és $B'C'$ egyeneseknek közös pontja: D' , s erre fennáll az $ABCDP \equiv A'B'C'D'P'$ egybevágóság. Mivel B, C, D egy egyenesen fekvő pontok és $BCD \equiv B'C'D'$, továbbá $BCQ \equiv B'C'Q'$ következik a III. 5 axiomából, hogy $DQ = D'Q'$. Az A, D, P

pontok egy egyenesen fekszenek és $ADP \equiv A'D'P'$, továbbá $ADQ \equiv A'D'Q'$, így a III. 5 axioma folytán $PQ = P'Q'$.

85. tétel. Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ az α síkban nem egy egyenesen fekvő pontok ($n \geq 3$), és P az α sík tetszőleges pontja, továbbá $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ az α' síkban fekvő olyan pontok, melyekre $A_1A_2 \dots A_n \equiv A'_1A'_2 \dots A'_n$, akkor van az α' síkban egy és csak egy olyan P' pont, melyre $A_1A_2 \dots A_nP \equiv A'_1A'_2 \dots A'_nP'$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A_1, A_2, A_3 pontok nem fekszenek egy egyenesen; a 81. tétel szerint az A'_1, A'_2, A'_3 pontok sem fekszenek egy egyenesen. A 83. tétel szerint tehát van az α' síkban egy és csak egy olyan P' pont, melyre $A_1A_2A_3P \equiv A'_1A'_2A'_3P'$. Feltevés szerint minden i indexre $A_1A_2A_3A_i \equiv A'_1A'_2A'_3A'_i$; ebből és az $A_1A_2A_3P \equiv A'_1A'_2A'_3P'$ egybevágóságból következik a 84. tétel szerint: $A_iP = A'_iP'$, s így $A_1A_2 \dots A_nP \equiv A'_1A'_2 \dots A'_nP'$.

Értelmezés. Az α síknak az α' síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezésén olyan előírást értünk, mely az α sík minden P pontjának megfelelteti az α' síknak egy és csak egy P' pontját, úgy hogy az α' sík minden P' pontja az α sík egy és csak egy P pontjának felel meg. A P' pontot a P pont képének nevezzük. Ha az α sík az α' síkkal megegyezik, a leképezést az α sík önmagára való leképezésének nevezzük.

Értelmezés. Az α síknak az α' síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezését kongruens leképezésnek nevezzük, ha bármely két P és Q pontnak olyan P', Q' pontok felelnek meg, hogy a PQ és $P'Q'$ szakaszok egyenlők.

Jelöljük S -sel az α síknak az α' síkra, és S' -vel az α' síknak az α síkra való kölcsönösen egyértelmű leképezését. Az S és S' leképezések szorzata, melyet SS' -vel jelölünk, az α síknak az α'' síkra való leképezése, melyet következőképpen értelmezzünk: az α sík tetszőleges P pontjának az S leképezésénél megfelel az α' sík P' pontja, melyet mint a P pontnak S -nél származó képét $S(P)$ -vel jelölünk; a P' pont képe S' -nél az α'' síknak $P'' = S'(P')$ pontja; az SS' leképezésénél a P pontnak a $P'' = SS'(P) = S'(S(P))$ pontot feleltetjük meg. Az α síknak az α'' síkra való SS' leképezése ugyancsak kölcsönösen egyértelmű. — Az S leképezés inverzén értjük, és S^{-1} -gyel jelöljük, az α' síknak az α síkra való ama leképezését, melynél az α' sík tetszőleges P' pontjának az α síknak azt a P pontját feleltetjük meg, amelyre $S(P) = P'$; eszerint $P = S^{-1}(P')$.

86. tétel. Ha S az α síknak az α' síkra való kongruens leképezése, akkor S^{-1} az α' síknak az α síkra való kongruens leképezése. — Ha továbbá S' az α' síknak az α'' síkra való kongruens leképezése, akkor az SS' szorzat az α síknak az α'' síkra való kongruens leképezése.

87. tétel. Egy síknak önmagára való kongruens leképezései csoportot alkotnak.

A fenti két tétel az értelmezésekből közvetlenül következik (csoport értelmezését l. a 78—79. oldalon).

88. tétel. Az α síknak az α' síkra való kongruens leképezésénél minden az α síkban fekvő a egyenesnek egy az α' síkban fekvő a' egyenes, s az α síkban az a egyenes által meghatározott egyik félsíknak az α' síkban az a' egyenes által meghatározott egyik félsík felel meg.

Bizonyítás. Ha A, B, C az a egyenes három tetszőleges pontja, akkor ezeknek a megadott kongruens leképezésnél származó A', B', C' képei a 81. tétel szerint egy a' egyenesen fekszenek. Legyen P és Q az α síknak két olyan pontja, melyek az a egyenesnek különböző oldalán fekszenek, s legyen R a PQ szakasznak az a egyenessel való metszéspontja; képpontjaikat jelöljük P', Q', R' -vel. A 81. tétel szerint P', Q', R' egy egyenesen fekszenek, s a 75. tétel szerint elrendezésük $P'R'Q'$; tehát a $P'Q'$ egyenesen ennek az a' egyenessel közös R' pontja elválasztja egymástól a P', Q' pontokat, s így a P' és Q' pontok az α' síkban az a' egyenesnek különböző oldalán fekszenek.

A fenti értelmezés alapján a 85. tételből adódik a következő

89. tétel. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és A', B', C' olyan pontok, melyekre $ABC \equiv A'B'C'$, akkor van az ABC síknak az $A'B'C'$ síkra egy és csak egy olyan kongruens leképezése, mely az A, B, C pontoknak rendre az A', B', C' pontokat felelteti meg.

15. §. A sík tükrözései.

Értelmezés. Legyen a az α síkban fekvő egyenes, és P az α síkban nem az a egyenesen fekvő pont. Jelentsé A és B az a egyenes két tetszőleges pontját. A III. 4 axioma szerint van az α síkban az a egyenesnek a P pontot nem tartalmazó oldalán egy és csak egy olyan P' pont, melyre $ABP \equiv ABP'$. A P' pontot a P pont és az a egyenes meghatározza; ha ugyanis

A_1 és B_1 az a egyenes két tetszőleges más pontja, akkor $A_1B_1P \equiv A_1B_1P'$ (a III. 5. axioma kétszeri alkalmazásával). A P' pontot a P pontnak az a egyenesre vonatkozó tükörképének nevezzük; a P' pont tükörképe az a egyenesre vonatkozóan a P pont. Az a egyenes bármely A pontjának az a egyenesre vonatkozó tükörképén az A pontot értjük.

Értelmezés. Az α síknak egy benne fekvő a egyenesre vonatkozó tükrözésén értjük az α síknak önmagára való leképezését, mely a sík minden pontjának az a egyenesre vonatkozó tükörképét felelteti meg.

A síknak az a egyenesre vonatkozó tükrözése a síknak önmagára való kongruens leképezése, mint a III. 4. axiómából és a 89. tételből következik.

90. tétel. *Ha az α sík önmagára való kongruens leképezésénél a sík A és B pontja önmagának felel meg, akkor a leképezés vagy az azonos leképezés (mely a sík minden pontját önmagának felelteti meg), vagy a síknak az AB egyenesre vonatkozó tükrözése.*

Ez az állítás a fenti értelmezések alapján a III. 4. axiómából és a 89. tételből következik.

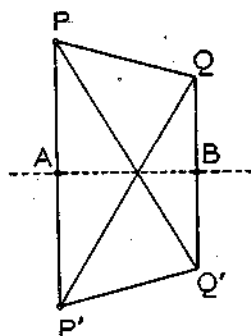
91. tétel. *Ha P és P' az α sík két tetszőleges pontja, van az α síkban egy és csak egy olyan a egyenes, melyre vonatkozóan P és P' egymásnak a tükörképei; ezt az egyenest a P és P' pontok középvonalának nevezzük. — Az a egyenes bármely B pontjának a PP' egyenesre vonatkozó tükörképe az a egyenesen fekszik.*

Bizonyítás. Jelöljük A -val a PP' szakasz középpontját (82. tétel). Ha a olyan egyenes, melyre vonatkozóan P és P' egymásnak a tükörképei, akkor az A pont az a egyenesen fekszik. Ugyanis a P és a P' pontok az a egyenes különböző oldalán fekszenek, s ezért a PP' szakasznak van az a egyenessel közös pontja, jelöljük ezt A' -vel. Minthogy az A' pont a síknak az a egyenesre vonatkozó tükrözésénél önmagának felel meg, s mivel ez a tükrözés egy kongruens leképezés, tehát fennáll az $A'P = A'P'$ egyenlőség, ami éppen azt jelenti, hogy A' a PP' szakasz A középpontjával egybeesik.

Legyen Q a síknak olyan pontja, mely nem fekszik a PP' egyenesen, és jelentse Q' a síknak azt a pontját, mely a PP' egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint a Q pont, s amelyre $PP'Q \equiv P'PQ'$ (III. 4) (59. ábra). Ha Q és Q' egybeesnek, akkor P és P' egymás tükörképei az AQ egyenesre vonatkozóan; ugyanis $PQ = P'Q$ és $PA = P'A$, tehát $AQP \equiv AQP'$. — Ha Q és Q'

különbözők, jelentse B a QQ' szakasz középpontját; a $QQ'B \equiv Q'QB$ és $QQ'P \equiv Q'QP'$ vonatkozásokból (mely utóbbi a $PP'Q \equiv P'PQ'$ következménye) adódik a III. 5 axioma szerint $BP = BP'$; ebből és az $AP = AP'$ egyenlőségből következik $ABP \equiv ABP'$; tehát P és P' egymás tükröképei az AB egyenesre vonatkozóan.

Ha C a síknak olyan pontja, hogy P és P' egymás tükröképei az AC egyenesre vonatkozóan, akkor az $ACP \equiv ACP'$ és a fenti $ABP \equiv ABP'$ vonatkozásból adódik $BCP \equiv BCP'$, tehát P és P' egymás tükröképei a BC egyenesre vonatkozóan; mint fent megjegyeztük, a BC egyenesen fekszik a PP' szakasz A középpontja; tehát C az AB egyenes pontja. Ezzel bebizonyítottuk



59. ábra.

azt, hogy az α síkban egy és csak egy olyan a egyenes van, melyre vonatkozóan P és P' egymás tükröképei.

Legyen B az a egyenes tetszőleges pontja, és B' a B pontnak a PP' egyenesre vonatkozó tükröképe; mivel A a PP' egyenesen fekszik, az értelmezés szerint $ABP \equiv AB'P$ és $ABP' \equiv AB'P'$; mivel pedig P és P' egymás tükröképei az AB egyenesre vonatkozóan, tehát $ABP \equiv ABP'$. Az egybevágóság tranzitív tulajdonságát tekintve (III. 1), adódik a fentiekből: $AB'P \equiv AB'P'$, vagyis P és P' egymás tükröképei az AB' egyenesre vonatkozóan. Előbbi eredményünk szerint tehát B' az AB egyenesen fekszik.

Értelmezés. Ha a és b egymást metsző egyenesek, s ha a rajtuk átfektetett síknak az a egyenesre vonatkozó tükrözésénél a b egyenes önmagába megy át, akkor a b egyenest az a egyenesre merőlegesnek nevezzük. — A 91. tétel szerint ekkor a is merőleges b -re, s ezért a két egyenest egymásra merőlegesnek nevezzük.

Értelmezés. Ha a és b egymásra merőleges egyenesek, minden az a egyenesen fekvő szakaszcól és félsugárról azt mondjuk, hogy merőleges b -re és a b -n fekvő bármely szakaszra vagy félsugárra.

92. tétel. Ha a az α síkban fekvő egyenes, és P az α sík valamely pontja, van az α síkban egy és csak egy a P ponton áthaladó és az a -ra merőleges egyenes.

Bizonyítás. Ha P nem az a egyenesen fekszik, jelentse P' a P pont tükröképét a -ra vonatkozóan; a 91. tétel szerint a

PP' egyenes merőleges a -ra. Ha a b egyenes átmegy a P ponton és merőleges az a egyenesre, akkor b átmegy a P pontnak az a egyenesre vonatkozó P' tükörképén is, s így b a PP' egyenessel azonos. — Ha P az a egyenes pontja, felvesszünk a -n két olyan Q és Q' pontot, melyek P különböző oldalán fekszenek, s melyekre $QP = Q'P$; a 91. tétel szerint a Q, Q' pontok középvonala merőleges a -ra és átmegy a P ponton; ez az egyedüli olyan egyenes, mely merőleges a -ra és átmegy a P ponton.

93. tétel. Az α síknak az α' síkra való kongruens leképezésénél az α síkban fekvő bármely két egymásra merőleges egyenesnek az α' síkban két egymásra merőleges egyenes felel meg.

Bizonyítás. Legyenek a és b az α síkban fekvő, egymásra merőleges egyenesek; legyen A és B az a egyenes két tetszőleges pontja, P a b -nek valamely az a -hoz nem tartozó pontja és Q a P pont tükörképe a -ra vonatkozóan; feltevésünk szerint Q a b egyenes pontja és $ABP \equiv ABQ$. Jelöljük ezeknek a pontoknak az adott kongruens leképezésénél származó képeit A', B', P', Q' -vel, az a, b egyenesek képeit a', b' -vel; a' az $A'B'$ egyenessel és b' a $P'Q'$ egyenessel azonos. Az $ABPQ \equiv A'B'P'Q'$, s a fenti $ABP \equiv ABQ$ egybevágóságból következik: $A'B'P' \equiv A'B'Q'$, tehát a b' egyenes P' és Q' pontjai egymás tükörképei az a' egyenesre vonatkozóan, s így az a' és b' egyenesek egymásra merőlegesek.

94. tétel. Ha a és b az α síkban fekvő egymásra merőleges egyenesek, továbbá a' és b' az α' síkban fekvő egymásra merőleges egyenesek, akkor van az α síknak az α' síkra olyan kongruens leképezése, mely a -t a' -be és b -t b' -be viszi át.

Bizonyítás. Jelöljük A -val az a és b egyenesek közös pontját, B -vel az a egyenesnek egy másik pontját, és C -vel az α síknak egy az a egyeneshez nem tartozó pontját. Legyen A' az a' és b' egyenesek közös pontja, B' az a' egyenesnek egy olyan pontja, melyre $AB = A'B'$ (III. 2), és C' az α' síknak olyan pontja, melyre $ABC \equiv A'B'C'$ (III. 4). A 89. tétel szerint van az α síknak az α' síkra egy és csak egy olyan kongruens leképezése, melynél az A, B, C pontoknak rendre az A', B', C' pontok felelnek meg. Ennél a leképezésnél az a egyenes képe az a' egyenes, s így a 93. tétel szerint az a -ra merőleges b egyenes képe egy az a' -re merőleges, és az A' ponton áthaladó egyenes; ez a 92. tétel szerint a b' egyenessel azonos.

16. §. Szögek egyenlősége.

Értelmezés. A $\sphericalangle(h, k)$ és a $\sphericalangle(h', k')$ szögeket egymással egyenlőnek nevezzük, ha létezik a $\sphericalangle(h, k)$ síkjának a $\sphericalangle(h', k')$ síkjára olyan kongruens leképezése, mely a h, k félsugarakat rendre a h', k' félsugarakba viszi át.

95. tétel. Minden $\sphericalangle(h, k)$ szög önmagával egyenlő: $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h, k)$. — Ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög egyenlő a $\sphericalangle(h', k')$ szöggel, akkor $\sphericalangle(h', k')$ egyenlő a $\sphericalangle(h, k)$ szöggel. — Ha $\sphericalangle(h, k)$ egyenlő a $\sphericalangle(h', k')$ és a $\sphericalangle(h'', k'')$ szöggel, akkor $\sphericalangle(h', k')$ egyenlő a $\sphericalangle(h'', k'')$ szöggel.

A tételben foglalt állítások közvetlenül következnek a fenti értelmzésből, tekintettel arra, hogy a sík azonos leképezése, továbbá minden kongruens leképezésnek az inverze, s két kongruens leképezés szorzata kongruens leképezések (86. tétel).

A 95. tételben foglalt első állítás fontos kiegészítése a következő

96. tétel. A $\sphericalangle(h, k)$ szög egyenlő a $\sphericalangle(k, h)$ szöggel.

Bizonyítás. Jelöljük a szög csúcsát C -vel, s legyenek A és B rendre a h és k félsugáron fekvő pontok, melyekre $CA = CB$. Az AB szakasz középpontját jelöljük D -vel (82. tétel); az ABC síknak a CD egyenesre vonatkozó tükrözésénél az A és B pontok egymásba mennek át, mivel $CDA \equiv CDB$, s ezért a szög h és k szárai is egymásba mennek át; mivel a sík tükrözése kongruens leképezés ebből következik, hogy $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(k, h)$.

Jelöljük a $\overrightarrow{CD}$ félsugarat l -l; mivel a CD egyenesre vonatkozó tükrözésnél az l félsugár önmagába, a h és k félsugarak egymásba mennek át, az értelmzés szerint $\sphericalangle(h, l) = \sphericalangle(k, l)$. Az l félsugarat a $\sphericalangle(h, k)$ szögfelezőjének nevezzük.

97. tétel. Ha h, k, k' az α síkban fekvő és a C pontból kiinduló olyan félsugarak, hogy $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h, k')$, akkor a k és k' félsugarak vagy egybeesnek, vagy a h félsugáron átfektetett egyenesnek különböző oldalán fekszenek és egymás tükörképei erre az egyenesre vonatkozóan.

Bizonyítás. Feltevésünk szerint létezik az α síknak önmagára olyan kongruens leképezése, melynél a h félsugár önmagába és a k félsugár k' -be megy át. Ennél a leképezésnél a C pont önmagának felel meg s így a 80. tétel szerint a h félsugár minden pontja önmagának felel meg. A 90. tételből következik, hogy ez a leképezés vagy az azonosság, vagy a síknak a h félsugáron átfektetett egyenesre vonatkozó tükrözése.

Ebből következik, hogy bármely $\sphericalangle(h, k)$ szögnek egy és csak egy szögfelezője van. Ha ugyanis l a $\sphericalangle(h, k)$ szög C csúcsából kiinduló és szög belsejében haladó olyan félsugár, hogy $\sphericalangle(h, l) = \sphericalangle(k, l)$, akkor a 97. tétel szerint a síknak az l -en átfektetett l_1 egyenesre vonatkozó tükrözésénél h és k egymásba mennek át. Legyen A és B a h és a k félsugárnak egy-egy olyan pontja, melyre $CA = CB$; az l_1 egyenesre vonatkozó tükrözésnél A és B egymásba mennek át, s így az AB szakasznak az l_1 egyenessel való D metszéspontjára fennáll az $AD = BD$ egyenlőség; eszerint D az AB szakasz középpontja és l a $\overleftrightarrow{CD}$ félsugárral azonos.

98. tétel. Legyen $\sphericalangle(h, k)$ valamely szög, és h' az α' síkban fekvő félsugár; van az α' síkban a h' félsugár bármelyik oldalán egy és csak egy olyan a h' kezdőpontjából kiinduló k' félsugár, hogy a $\sphericalangle(h, k)$ és a $\sphericalangle(h', k')$ szögek egymással egyenlők.

Bizonyítás. Jelöljük C -vel a $\sphericalangle(h, k)$ szög csúcsát, A -val és B -vel a h és k félsugár egy-egy pontját, C' -vel a h' félsugár kezdőpontját. A III. 2 axioma szerint van a h' félsugáron egy és csak egy olyan A' pont, melyre $CA = C'A'$; a III. 4 axioma szerint az α' síkban a $C'A'$ egyenes illető oldalán van egy és csak egy olyan B' pont, melyre $CAB \equiv C'A'B'$. A 89. tétel értelmében van az α síknak az α' síkra olyan kongruens leképezése, mely az A, B, C pontokat rendre az A', B', C' pontokba viszi át; ennél a leképezésnél a h, k félsugaraknak rendre a h', k' félsugarak felelnek meg, s ezért az értelmezés szerint $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k')$. — Ha k'' a h' kezdőpontjából kiinduló félsugár, mely az α' síkban h' -nek ugyanazon az oldalán fekszik, mint a k' félsugár, s amelyre $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k'')$, akkor a 95. tétel folytán $\sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(h', k'')$, tehát a 97. tétel szerint a k' és k'' félsugarak egybeesnek.

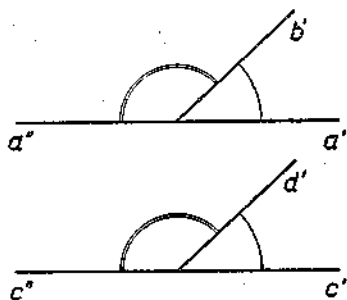
99. tétel. Ha két szög egyenlő, mellékszögeik is egyenlők.

Bizonyítás. Jelöljük az egyik szög szárait a', b' -vel, a másik szög szárait c', d' -vel, s legyenek a'' és c'' rendre az a' és a c' félsugárnak a kezdőpontján túl való meghosszabbítása (60. ábra). Tegyük fel, hogy $\sphericalangle(a', b') = \sphericalangle(c', d')$; meg kell mutatnunk, hogy $\sphericalangle(a'', b') = \sphericalangle(c'', d')$. Feltévéstünk szerint van az $\sphericalangle(a', b')$ síkjának a $\sphericalangle(c', d')$ síkjára olyan kongruens leképezése, melynél az a', b' félsugarak rendre c', d' -be mennek át; ennél a leképezésnél az a'' félsugár a c'' félsugárba megy át (88. tétel), s ezért az $\sphericalangle(a'', b')$ szög egyenlő a $\sphericalangle(c'', d')$ szöggel.

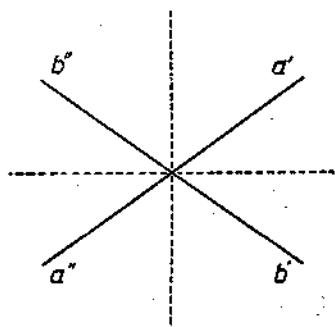
100. tétel. Csúcsszögek egymással egyenlők.

Bizonyítás. Legyenek a és b az O ponton áthaladó egyenesek; ezeknek az O pont által meghatározott félsugarait jelöljük a', a'' és b', b'' -vel. Meg kell mutatnunk, hogy az $\sphericalangle(a', b')$ szög egyenlő az $\sphericalangle(a'', b'')$ szöggel. Az értelmezés szerint ezek a szögek a $\sphericalangle(b', a'') = \sphericalangle(a'', b')$ szög mellékszögei, s ezért a 99. tétel szerint egymással egyenlők.

A $\sphericalangle(b', a'')$ szögfelezőjére, s ugyancsak a $\sphericalangle(b'', a')$ szögfelezőjére vonatkozó tükrözésnél az a', b' félsugarak átmennek b'' illetve a'' -be; ebből következik, mivel minden szögnek egy és csak egy szögfelezője van, hogy a $\sphericalangle(b', a'')$ és a $\sphericalangle(b'', a')$ szögfelezői egy egyenesnek az O pont által meghatározott két félsugara; ezt az egyenest a csúcsszög-pár szögfelezőjének nevezzük.



60. ábra.



61. ábra.

Az $\sphericalangle(a', b')$, $\sphericalangle(a'', b'')$ csúcsszög-pár szögfelezőjére vonatkozó tükrözésnél az $\sphericalangle(a'', b')$ és $\sphericalangle(b'', a')$ szögek egymásba s így szögfelezőik is egymásba mennek át (a 95. és 97. tétel folytán); ebből adódik, hogy az $\sphericalangle(a'', b')$, $\sphericalangle(b'', a')$ csúcsszög-pár szögfelezője merőleges az $\sphericalangle(a', b')$, $\sphericalangle(a'', b'')$ csúcsszög-pár szögfelezőjére (61. ábra). Ezt az eredményt mondjuk ki a következő tételben:

101. tétel. *Mellékszögek szögfelezői egymásra merőlegesek.*

Legyenek a és b az α síkban fekvő és az O ponton áthaladó egyenesek; az α síknak az a' síkra való kongruens leképezésénél származó képeiket jelöljük c -vel és d -vel, az O pont képét O' -vel. Az a és b egyeneseknek az O pont által meghatározott félsugarait a', a'', b', b'' -vel, c és d -nek az O' által meghatározott félsugarait c', c'', d', d'' -vel jelöljük, olyan módon, hogy az adott kongruens leképezésnél a' képe c' , és b' képe d' legyen. A 88. tétel szerint az α síkban az a egyenes által meghatározott és a b' félsugarat

tartalmazó félsíknak az α' síkban az a c egyenes által meghatározott félsík felel meg, mely a d' félsugarat tartalmazza, stb. Ebből következik, hogy az adott *kongruens leképezésnél az $\sphericalangle(a', b')$ szög belsejének a $\sphericalangle(c', d')$ szög belseje felel meg.* A 41. oldalon adott értelmezés szerint adódik ebből, hogy bármely négy az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugár ciklikus elrendezése megegyezik annak a négy félsugárnak a ciklikus elrendezésével, melyek az α síknak az α' síkra való kongruens leképezésénél nekik megfelelnek. A 40. tétel alapján következik ebből a megfelelő állítás $n (\geq 4)$ félsugárra vonatkozóan, melyet a következő tételben mondunk ki:

102. tétel. *Legyenek $h_1, h_2, \dots, h_n$ az α síkban fekvő és az O pontból kiinduló félsugarak, melyeknek ciklikus elrendezése $(h_1 h_2 \dots h_n)$, $(n \geq 4)$; az α síknak az α' síkra való kongruens leképezésénél származó képek legyenek $h'_1, h'_2, \dots, h'_n$; akkor ezeknek a félsugaraknak ciklikus elrendezése $(h'_1 h'_2 \dots h'_n)$.*

Erre a tételre röviden így fogunk hivatkozni: *a sík kongruens leképezése a sugársor ciklikus rendezését megtartja.*

Értelmezés. Ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög csúcsából kiinduló l félsugár a $\sphericalangle(h, k)$ belsejében fekszik, akkor azt mondjuk, hogy a $\sphericalangle(h, l)$ szög kisebb a $\sphericalangle(h, k)$ szögnél, és $\sphericalangle(h, k)$ nagyobb a $\sphericalangle(h, l)$ szögnél; jelölése: $\sphericalangle(h, l) < \sphericalangle(h, k)$, $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(h, l)$. — Ha általánosabban a $\sphericalangle(h', k')$ szög egyenlő olyan $\sphericalangle(h, l)$ szöggel, melynek l szára a $\sphericalangle(h, k)$ szög belsejében fekszik, akkor azt mondjuk, hogy $\sphericalangle(h', k')$ kisebb mint $\sphericalangle(h, k)$, és $\sphericalangle(h, k)$ nagyobb mint $\sphericalangle(h', k')$.

Ha $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k')$ és $\sphericalangle(l, m) = \sphericalangle(l', m')$, akkor $\sphericalangle(h', k')$ nagyobb, vagy egyenlő, vagy kisebb mint $\sphericalangle(l', m')$, aszerint, hogy $\sphericalangle(h, k)$ nagyobb, vagy egyenlő, vagy kisebb mint $\sphericalangle(l, m)$. Ha ugyanis $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(l, m)$, akkor a 95. tétel szerint $\sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(l', m')$. Ha pedig $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(l, m)$, akkor az értelmezés szerint van egy olyan az $\sphericalangle(l, m)$ szög csúcsából kiinduló és a szög belsejében fekvő n félsugár, melyre $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(l, n)$. Mivel $\sphericalangle(l, m) = \sphericalangle(l', m')$, van az $\sphericalangle(l, m)$ síkjának az $\sphericalangle(l', m')$ síkjára olyan kongruens leképezése, melynél az l, m félsugarak képe rendre l', m' ; ennél a leképezésnél az n félsugárnak egy az $\sphericalangle(l', m')$ szög belsejében fekvő n' félsugár felel meg; eszerint $\sphericalangle(l, n) = \sphericalangle(l', n')$ és $\sphericalangle(l', n') < \sphericalangle(l', m')$. A 95. tétel szerint a $\sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(h, k)$, $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(l, n)$, $\sphericalangle(l, n) = \sphericalangle(l', n')$ egyen-

lőségekből következik $\sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(l', n')$, s így az értelmezés szerint $\sphericalangle(h', k') < \sphericalangle(l', m')$.

Bármely két $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(l, m)$ szögre fennáll egyik és csak egyik a következő három vonatkozás közül: $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(l, m)$, $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(l, m)$, $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(l, m)$. A 98. tétel szerint ugyanis van a $\sphericalangle(h, k)$ síkjában a h félsugárnak azon az oldalán, melyen a k félsugár fekszik, egy és csak egy olyan a h kezdőpontjából kiinduló k' félsugár, melyre $\sphericalangle(h, k') = \sphericalangle(l, m)$. A 41. tétel szerint fennáll egyik és csak egyik a következő vonatkozások közül: $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h, k')$, $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h, k')$, $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(h, k')$. Mivel $\sphericalangle(h, k') = \sphericalangle(l, m)$, az előbb bebizonyított állítás szerint a $\sphericalangle(h, k)$ és az $\sphericalangle(l, m)$ szögek között ugyanaz a vonatkozás áll fenn, mint $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h, k')$ között.

Ha $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', k')$ és $\sphericalangle(h', k') < \sphericalangle(h'', k'')$, akkor $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h'', k'')$. Ez a fentebbi állítások következménye a 39. tétel alapján. Ebből következik továbbá:

Ha h' és k' a $\sphericalangle(h, k)$ szög csúcsából kiinduló és a szög belsejében fekvő félsugarak, akkor $\sphericalangle(h', k') < \sphericalangle(h, k)$.

Értelmezés. Ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög csúcsából kiinduló l félsugár a $\sphericalangle(h, k)$ szög belsejében fekszik, akkor a $\sphericalangle(h, k)$ szöget a $\sphericalangle(h, l)$ és az $\sphericalangle(l, k)$ szögek összegének nevezzük.

103. tétel. Ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög a $\sphericalangle(h, l)$ és $\sphericalangle(l, k)$ szögek összege s hasonlóan a $\sphericalangle(h', k')$ a $\sphericalangle(h', l')$ és $\sphericalangle(l', k')$ szögek összege, akkor a $\sphericalangle(h, l) = \sphericalangle(h', l')$ és $\sphericalangle(l, k) = \sphericalangle(l', k')$ egyenlőségekből következik, hogy $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k')$. (Ez a tétel a szakaszok egyenlőségére vonatkozó III. 3 axiómának felel meg.)

Bizonyítás. Jelöljük a $\sphericalangle(h, k)$ és a $\sphericalangle(h', k')$ szög síkját rendre α -val és α' -vel. A $\sphericalangle(h, l) = \sphericalangle(h', l')$ feltétel folytán van α -nak α' -re olyan kongruens leképezése, mely h és l -nek rendre a h' és az l' félsugarat felelteti meg. Ennél a leképezésnél a k félsugárnak olyan k'' félsugár felel meg, mely l' -nek ugyanazon az oldalán fekszik mint k' , s melyre $\sphericalangle(l, k) = \sphericalangle(l', k'')$; mivel ugyan-csak $\sphericalangle(l, k) = \sphericalangle(l', k')$, tehát a 95. tétel szerint $\sphericalangle(l', k') = \sphericalangle(l', k'')$, s így a 98. tétel szerint k'' egybeesik k' -vel, tehát $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k')$.

Értelmezés. A $\sphericalangle(h, k)$ szöget a $\sphericalangle(h_1, k_1)$ és a $\sphericalangle(h_2, k_2)$ szögek összegének nevezzük, ha van olyan a $\sphericalangle(h, k)$ szög csúcsából kiinduló és a szög belsejében fekvő l félsugár, melyre nézve $\sphericalangle(h, l) = \sphericalangle(h_1, k_1)$ és $\sphericalangle(l, k) = \sphericalangle(h_2, k_2)$; jelölése: $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h_1, k_1) + \sphericalangle(h_2, k_2)$.

A 103. tételből közvetlenül adódik a következő állítás:

Ha $\sphericalangle(h, k)$ a $\sphericalangle(h_1, k_1)$ és $\sphericalangle(h_2, k_2)$ szögek összege, és ha $\sphericalangle(h', k')$ a $\sphericalangle(h'_1, k'_1)$ és $\sphericalangle(h'_2, k'_2)$ szögek összege, akkor a $\sphericalangle(h_1, k_1) = \sphericalangle(h'_1, k'_1)$ és $\sphericalangle(h_2, k_2) = \sphericalangle(h'_2, k'_2)$ egyenlőségekből következik, hogy $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k')$.

Hasonlóan, mint szakaszok összeadására nézve, megmutathatjuk, hogy a szögekre vonatkozóan értelmezett összeadás kommutatív és asszociatív művelet. Továbbá: ha $\sphericalangle(h, k)$ a $\sphericalangle(h_1, k_1)$ és $\sphericalangle(h_2, k_2)$ szögek összege, és $\sphericalangle(h', k')$ a $\sphericalangle(h'_1, k'_1)$ és $\sphericalangle(h'_2, k'_2)$ szögek összege, akkor a $\sphericalangle(h_1, k_1) < \sphericalangle(h'_1, k'_1)$ és $\sphericalangle(h_2, k_2) \leq \sphericalangle(h'_2, k'_2)$ vonatkozásokból következik, hogy $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', k')$.

Értelmezés. Olyan szöget, melynek szárai egymásra merőlegesek, derékszögnek nevezzük.

A 89. oldalon adott értelmezésből következik, hogy minden derékszög a mellékszögével egyenlő, s megfordítva, minden olyan szög derékszög, mely a mellékszögével egyenlő.

A 93. és a 94. tételből következik, hogy minden olyan szög, mely derékszöggel egyenlő, derékszög, s hogy bármely két derékszög egymással egyenlő.

Értelmezés. A derékszögnél kisebb szögeket hegyesszögeknek, a derékszögnél nagyobb szögeket tompaszögeknek nevezzük.

A szögek nagysági vonatkozásának értelmezéséből a 39. tétel szerint következik, hogy ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög kisebb a $\sphericalangle(h', k')$ szögnél, akkor $\sphericalangle(h, k)$ mellékszöge nagyobb $\sphericalangle(h', k')$ mellékszögénél. Eszerint bármely hegyesszögnek a mellékszöge tompaszög, és megfordítva.

Értelmezés. Ha $\sphericalangle(h, k)$ derékszög, és l a szög csúcsából kiinduló és a szög belsejében fekvő félsugár, akkor a $\sphericalangle(h, l)$ és az $\sphericalangle(l, k)$ hegyesszögeket egymás pótszögének (vagy kiegészítő szögének) nevezzük.

Megjegyzés. Szögek egyenlőségének fent adott értelmezése megfelel annak az eljárásnak, mellyel a gyakorlatban szögek egyenlőségét a két szög síkjának mint merev lapnak egymásra helyezése által állapítjuk meg (szögmérő). A gyakorlatban a geometriai szerkesztésekben szögek egyenlőségét szakaszok egyenlősége alapján állapítjuk meg a következő módon: legyenek $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ tetszőleges szögek; a h és a k félsugárra a $\sphericalangle(h, k)$ szög C csúcsától egymással egyenlő CA és CB szakaszokat, továbbá a h' és a k' félsugárra a $\sphericalangle(h', k')$ szög C' csúcsától az előbbiekkal egyenlő

$C'A'$ és $C'B'$ szakaszokat mérünk fel; a két szöget egymással egyenlőnek mondjuk, ha az AB és az $A'B'$ szakaszok egymással egyenlők. A 89. tétel folytán szögek egyenlőségének ez az értelmezése aequivalens a 91. oldalon adott értelmezéssel. — A III. 4 és 5 axiómákra alapozott tárgyalásunkban síkidomok „egymásra helyezése“, ez az EUKLIDES által is alkalmazott eljárás, mint geometriai módszer jogosultságot nyert; ennek alkalmazásával a háromszögek egybevágóságára vonatkozó tételek szinte közvetlenül következnek az axiómákból a szögek egyenlőségére vonatkozó értelmezés alapján, mint a következő paragrafusban látni fogjuk.

17. §. Háromszögek egybevágósága.

Értelmezés. Az ABC háromszög A -nál fekvő szögén értjük és $\sphericalangle BAC$ jellel jelöljük az $\vec{AB}$ és $\vec{AC}$ félsugarak által bezárt szöget. — A háromszög AB és AC oldalairól azt mondjuk, hogy a $\sphericalangle BAC$ szög mellett, a BC oldalról pedig, hogy a $\sphericalangle BAC$ szöggel szemben fekszik.

Értelmezés. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögeket egybevágóknak nevezzük, ha fennállanak a következő egyenlőségek:

$$AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C';$$

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B', \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$

Az értelmezésekből a 89. tétel szerint következik hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek akkor és csak akkor egybevágók, ha van az ABC síknak az $A'B'C'$ síkra olyan kongruens leképezése, mely az A, B, C pontoknak rendre az A', B', C' pontokat felelteti meg.

104. tétel. (Háromszögek első egybevágósági tétele.) Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B', AC = A'C'$ és $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, akkor a két háromszög egybevágó.

Bizonyítás. Szögek egyenlőségének értelmezése szerint létezik az ABC síknak az $A'B'C'$ síkra olyan kongruens leképezése, melynél az $\vec{AB}$ és az $\vec{AC}$ félsugárnak rendre az $\vec{A'B'}$ és az $\vec{A'C'}$ félsugár felel meg. Ennél a leképezésnél a B pont képe az $\vec{A'B'}$ félsugárnak olyan B'' pontja, melyre $AB = A'B''$; feltételünk szerint $AB = A'B'$, s így a III. 1 és 2 axióma szerint B'' a B' ponttal azonos. Hasonlóan adódik, hogy a leképezésnél a C pont a C' pontba megy át. Ebből következik, hogy a két háromszög egybevágó.

105. tétel. *(Háromszögek második egybevágósági tétele.)*
 Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B'$,
 $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ és $\sphericalangle CBA = \sphericalangle C'B'A'$, akkor a két három-
 szög egybevágó.

Bizonyítás. Az $AB = A'B'$ feltételből következik a III. 4
 axioma szerint, hogy az $A'B'C'$ síkban az $A'B'$ egyenesnek azon
 az oldalán, melyen a C' pont fekszik, van egy és csak egy olyan
 C'' pont, melyre $ABC \equiv A'B'C''$. A 89. tétel szerint van az ABC
 síknak az $A'B'C'$ síkra olyan kongruens leképezése, melynél az
 A, B, C pontok rendre az A', B', C'' pontokba mennek át; eszerint
 $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C''A'B'$ s feltételeink szerint $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$; a
 95. tételből adódik tehát $\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle C''A'B'$. Mivel ezeknek a
 szögeknek $A\vec{C}'$ és $A\vec{C}''$ szárai a közös $A\vec{B}'$ szárnak ugyanazon
 az oldalán fekszenek, a 98. tétel szerint az $A\vec{C}'$ és az $A\vec{C}''$ félsu-
 garak egybeesnek. Ugyanígy adódik, hogy a $B\vec{C}'$ és a $B\vec{C}''$ félsu-
 garak egybeesnek, s ebből az 1. tétel szerint következik, hogy a
 C'' pont azonos a C' ponttal. Tehát az ABC háromszög egybe-
 vágó az $A'B'C'$ háromszöggel.

106. tétel. *(Háromszögek harmadik egybevágósági tétele.)*
 Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B'$, $BC = B'C'$,
 $CA = C'A'$, akkor a két háromszög egybevágó.

Mint fent megjegyeztük, ez a tétel a háromszögek egybevá-
 góságára vonatkozó értelmezésből közvetlenül következik a 89.
 tétel alapján.

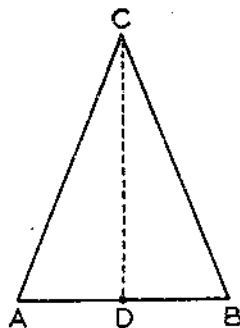
Értelmezés. Olyan háromszöget, melynek két oldala
 egyenlő, *egyenlőszárú háromszögnek* nevezünk; az egymással
 egyenlő két oldalt a *háromszög szárainak*, a harmadik oldalt a
háromszög alapjának nevezzük.

Egyenlőszárú háromszög létezését a következő szerkesztéssel
 mutatjuk meg. Valamely $\sphericalangle(h, k)$ szög szárait a szög C csúcsától
 egymással egyenlő CA és CB szakaszokat mérünk fel; ABC
 egyenlőszárú háromszög.

107. tétel. *Egyenlőszárú háromszögnek az alap mellett*
fekvő szögei egymással egyenlők. Az alap középpontját a szem-
 közt fekvő csúccsal összekötő egyenes felezi a csúcsnál fekvő szö-
 gel és merőleges az alapra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben
 $AC = BC$; fennáll tehát az ABC és BAC ponthármásokra

az $ABC \equiv BAC$ egybevágóság, s ebből a 106. tétel szerint következik $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$. — Jelöljük az AB alap középpontját D -vel; az $AD = BD$ és az $AC = BC$ egyenlőségekből adódik: $ACD \equiv BCD$; eszerint az A és B pontok tükörképek a CD egyenesre vonatkozóan; ebből az értelmezések szerint következik, hogy $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$, tehát a $\vec{CD}$ félsugár az $\sphericalangle ACB$ szögfelezője; továbbá, hogy AB merőleges a CD egyenesre (62. ábra).



62. ábra.

A 107. tételnek következő megfordítását kapjuk a 105. és a 104. tételből:

108. tétel. Az ABC háromszög egyenlőszárú, mégpedig $AC = BC$, ha az $\sphericalangle ABC$ és a $\sphericalangle BAC$ szögek egyenlők s ugyancsak, ha az AB oldal középpontját a C csúccsal összekötő egyenes merőleges az AB egyenesre.

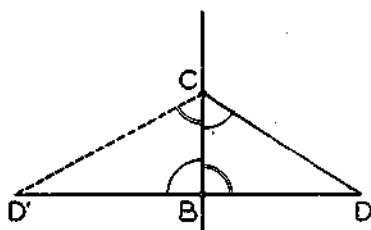
Értelmezés. Legyen a, b, c egy síkban fekvő három egyenes, melyek közül b és c metszi a -t rendre a B és a C pontban. Az a, b egyenesek által meghatározott négy szög közül (c -re nézve) belsőnek nevezzük azt a kettőt, melynek egyik szára a $\vec{BC}$ félsugár; a másik kettőt külsőnek nevezzük. Hasonlóan nevezük (b -re nézve) belsőnek és külsőnek az a és c által meghatározott szögeket. Ha a B -nél és a C -nél fekvő egy-egy szög az a egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, s közülük egyik belső, a másik külső szög, akkor ezeket megfelelő szögeknek nevezzük (63. ábra). Ha pedig az a egyenesnek különböző oldalán fekszenek s mindkettő belső, vagy mindkettő külső szög, akkor ezeket belső, illetve külső váltószögeknek nevezzük.

63. ábra.

109. tétel. Ha a, b, c egy síkban fekvő egyenesek, melyek közül az a egyenest a b és c egyenes rendre a B és a C pontban egyenlő megfelelő szögek alatt metszi, akkor a b és a c egyenesnek nincs közös pontja.



Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellenkezően a b és a c egyenesnek D közös pontja lenne. A b egyenesen

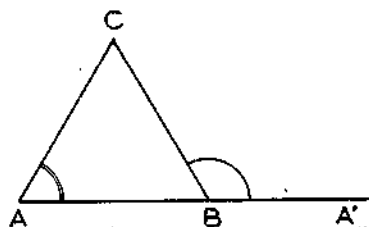


64. ábra.

legyen D' olyan pont, melynek elrendezése DBD' , s melyre $CD = BD'$ (64. ábra). A 104. tétel szerint a BCD és a CBD' háromszögek egybevágók, mivel $BC = CB$, $CD = BD'$ és feltevésünk szerint $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CBD'$ (l. 99. és 100. tételt). Ebből következik, hogy a $\sphericalangle CBD$ és a $\sphericalangle BCD'$ szögek egyenlők; a 99. tétel szerint

$\sphericalangle BCD'$ egyenlő a $\sphericalangle BCD$ mellékszögével; a 98. tételből következik, hogy a $\overrightarrow{CD'}$ félsugár s ezért a D' pont is a CD egyenesen fekszik. A D és a D' pontok egymástól különböznek, mivel az a egyenes különböző oldalán fekszenek; a b és a c egyenesnek eszerint két különböző közös pontja volna, D és D' , ellentétben az 1. tétellel.

Értelmezés. Az ABC háromszög AB oldalának meghosszabbításán felvesszünk egy olyan A' pontot, melynek elrendezése ABA' ; a $\sphericalangle CBA'$ szögeit a háromszög külső szögének nevezzük. A $\sphericalangle CAB$ és az $\sphericalangle ACB$ szögek a háromszögnek a $\sphericalangle CBA'$ külső szöggel szemben fekvő belső szögei (65. ábra).



65. ábra.

110. tétel. Egy háromszög külső szöge nagyobb bármelyik szemben fekvő belső szögénél.

Bizonyítás. A 109. tétel szerint az ABC háromszögnek B -nél fekvő külső szöge nem lehet egyenlő az A -nál fekvő belső szögével, mivel az AC és a BC egyenesek metszik egymást a C pontban. Ha a háromszögnek B -nél fekvő külső szöge kisebb volna mint az A -nál fekvő belső szöge, akkor volna egy olyan az A pontból kiinduló, és a $\sphericalangle CAB$ belsejében fekvő l félsugár, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és l félsugarak által bezárt szög egyenlő a $\sphericalangle CBA'$ külső szöggel. A 37. tétel szerint l metszi a BC szakaszt; ez ellentmond a 109. tételnek, mivel l és BC az AB egyenessel egyenlő megfelelő szögeket zárnak be.

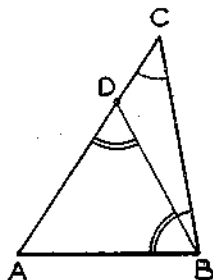
A 110. tétel alapján bebizonyítható a háromszögek második egybevágósági tételének (105. tétel) következő kiegészítése:

111. tétel. Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B'$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ és $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, akkor a két háromszög egybevágó.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben AC nem egyenlő $A'C'$ -vel; legyen C'' az $\vec{AC}$ félsugárnak az a pontja, melyre $AC'' = A'C'$. A $\vec{C''A}$ félsugárnak azon az oldalán, melyen a B pont fekszik, van egy és csak egy olyan a C'' pontból kiinduló k félsugár, melyre $\sphericalangle(k, \vec{C''A}) = \sphericalangle A'C'B'$ (98. tétel). A k félsugáron van egy olyan B'' pont, melyre $C''B'' = C'B'$ (III. 2). Az $A'C'B'$ és az $AC''B''$ háromszögekre alkalmazzuk a háromszögek első egybevágósági tételét (104. tétel); ebből adódik, hogy a $\sphericalangle C'A'B'$ és a $\sphericalangle C''AB''$ szögek egyenlők; mivel feltevés szerint $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, a 95. tételből következik, hogy $\sphericalangle C''AB'' = \sphericalangle CAB$. Ennek a két szögnek közös szára az $\vec{AC} = \vec{AC''}$ félsugár, s ennek ugyanazon az oldalán fekszenek az $\vec{AB}$ és az $\vec{AB''}$ szarak; a 98. tételből adódik, hogy az $\vec{AB}$ és az $\vec{AB''}$ szarak egybeesnek, vagyis hogy a B'' pont az $\vec{AB}$ félsugáron fekszik. Feltevés szerint $AB = A'B'$; az $AC''B''$ és $A'C'B'$ háromszögek egybevágóságából pedig következik $AB'' = A'B'$, tehát $AB = AB''$ s ezért a B'' pont azonos B -vel. — A BCC'' háromszögnek C -nél fekvő belső szöge és C'' -nél fekvő külső szöge szerkesztés szerint (illetve a 99. tétel folytán) egymással egyenlő; ez ellentmond a 110. tételnek. Következik tehát, hogy a C'' pont egybeesik C -vel, s így $AC = A'C'$. Ebből következik, hogy ABC és az $A'B'C'$ háromszögek egybevágók.

112. tétel. Ha az ABC háromszög AC oldala nagyobb az AB oldalnál, akkor $\sphericalangle ABC$ nagyobb az $\sphericalangle ACB$ szögnél, és megfordítva. (Tehát a háromszög nagyobb oldalával szemben fekvő szöge nagyobb.)

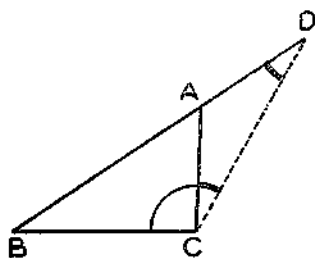
Bizonyítás. Legyen D az AC oldalnak az a pontja, melyre $AD = AB$ (66. ábra). BDA egyenlőszárú háromszög; a 107. tétel szerint ennek a BD alap mellett fekvő szögei egyenlők: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB$. Utóbbi a BDC háromszögnek D -nél fekvő



66. ábra.

külső szöge, ez a 110. tétel szerint nagyobb a C -nél fekvő $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA$ belső szögénél. Mivel a D pont az AC szakaszon, tehát az $\sphericalangle ABC$ szög belsejében fekszik, a $\overrightarrow{BD}$ félsugár is ennek a szögnek a belsejéhez tartozik, s így az értelmezés szerint $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ABD$. Ebből s a fenti $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB$ vonatkozásból adódik: $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ACB$. A tétel magában foglalja megfordítását.

113. tétel. *Bármely háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.*



67. ábra.

Bizonyítás. Az ABC háromszög AB oldalának meghosszabbításán felvesszünk olyan D pontot, melynek elrendezése BAD , s melyre $AD = AC$ (67. ábra). Mivel $BD = BA + AC$, meg kell mutatnunk, hogy $BD > BC$. A CDA egyenlőszárú háromszög $\sphericalangle ACD$ és $\sphericalangle ADC$ szögei egyenlők (107. tétel).

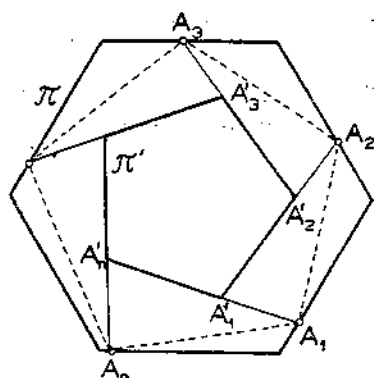
Az értelmezés szerint: $\sphericalangle BCD > \sphericalangle ACD$; mivel $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC$, tehát $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BDC$. A 112. tételt a BCD háromszögre alkalmazva adódik tehát, hogy $BD > BC$.

Értelmezés. Az $A_1A_2 \dots A_n$ törtvonal kerületén az $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ szakaszok összegével egyenlő szakaszi értünk.

Megjegyzés. A 113. tétel ismételt alkalmazásával következik, hogy az $A_1A_2 \dots A_n$ törtvonal kerülete nagyobb az A_1A_n szakasznál, vagy azzal egyenlő; utóbbi esetben az $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ pontok az A_1A_n szakaszon fekszenek s elrendezésük $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$. Ugyanis az A_1A_n szakasz kisebb mint az A_1A_2 és A_2A_n szakaszok összege, vagy azzal egyenlő; utóbbi esetben az A_2 pont az A_1A_n szakaszon fekszik. Az A_2A_n szakasz kisebb mint az A_2A_3 és A_3A_n szakaszok összege, vagy azzal egyenlő, és így tovább. Tehát $A_1A_n \leq A_1A_2 + A_2A_n \leq A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_n \leq \dots \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$.

114. tétel. *Ha π egy egyszerű sokszög és π' olyan konvex sokszög, melynek minden pontja π belsejéhez, vagy π -hez tartozik, akkor π' kerülete kisebb mint π kerülete, vagy azzal egyenlő; utóbbi esetben π és π' azonosak.*

Bizonyítás. Az előbbi megjegyzésből közvetlenül adódik, hogy egy egyszerű sokszög kerülete nagyobb mint konvex burkolójának a kerülete, vagy azzal egyenlő; feltehetjük tehát, hogy π is konvex. Legyen $\pi' = A'_1 A'_2 \dots A'_n$ olyan konvex sokszög, melynek csúcsai a π konvex sokszög bel-sejéhez, vagy π -hez tartoznak. Jelöljük A_{i+1} -gyel az $\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}$ félsugárnak a π sokszöggel való metszéspontját (68. ábra). A 113. tételből adódnak a következő vonatkozások:



68. ábra.

$$\begin{aligned} A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 &\leq A'_1 A_1 + A_1 A_2, \\ A'_2 A'_3 + A'_3 A'_4 &\leq A'_2 A_2 + A_2 A_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ A'_n A'_1 + A'_1 A'_2 &\leq A'_n A_n + A_n A_1; \end{aligned}$$

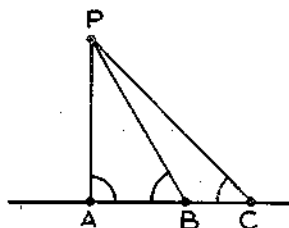
a k -adik sorban akkor és csak akkor áll az egyenlőség jele, ha A'_k az A_k ponttal egybeesik. A fenti vonatkozásokból összeadással kapjuk, ha mindkét oldalon elhagyjuk az $A'_i A_i$ tagokat:

$$A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 + \dots + A'_n A'_1 \leq A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1.$$

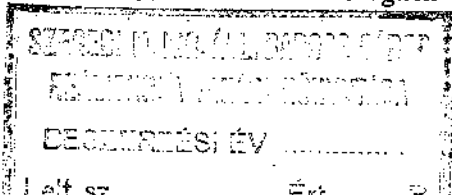
Eszерint a $\pi' = A'_1 A'_2 \dots A'_n$ konvex sokszög kerülete kisebb mint az $A_1 A_2 \dots A_n$ konvex sokszög kerülete, ha a két sokszög nem azonos. Az utóbbinak csúcsai a π sokszögön fekszenek, s ezért a 113. tétel folytán kerülete kisebb π kerületénél, ha ez a sokszög nem azonos π -vel. Ebből következik a fenti tétel állítása.

115. tétel. Ha A és B az a egyenes pontjai, és a PA egyenes merőleges a -ra, akkor a PB szakasz nagyobb mint a PA szakasz. Ha C az a egyenesnek olyan pontja, melynek elrendezése ABC , akkor a PC szakasz nagyobb mint a PB szakasz.

Bizonyítás (69. ábra). Legyen B' az a egyenesnek olyan pontja, melynek elrendezése $B'AB$. A PAB háromszögnek



69. ábra.



A-nál fekvő $\sphericalangle PAB'$ külső szöge nagyobb a szemben fekvő $\sphericalangle PBA$ belső szögnél (110. tétel). Mivel PA merőleges a -ra, $\sphericalangle PAB' = \sphericalangle PAB$. Ebből következik, hogy a PAB háromszögben a $\sphericalangle PAB$ szög nagyobb a $\sphericalangle PBA$ szögnél, s ezért a 112. tétel szerint $PB > PA$.

A tétel második állítását következőképpen bizonyítjuk be. Ha C az AB egyenesen fekszik, s elrendezése ABC , akkor $\sphericalangle PBC > \sphericalangle PCB$; ugyanis a 110. tétel szerint $\sphericalangle PBC > \sphericalangle PAC > \sphericalangle PCA = \sphericalangle PCB$. A 112. tétel szerint tehát $PC > PB$.

Megjegyzés. A 115. tételből közvetlenül adódik a következő:

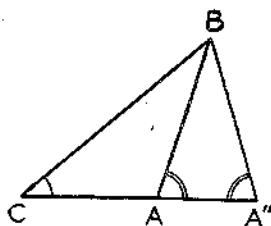
Ha D az ABC háromszög BC oldalának valamely pontja, akkor az AB és AC oldalak közül legalább az egyik nagyobb az AD szakasznál. — Ebből következik továbbá, hogy ha D és E két olyan pont, melyek az ABC háromszöghöz, vagy annak belsejéhez tartoznak, akkor a háromszög valamelyik oldala nagyobb a DE szakasznál.

Értelmezés. Az α síkban legyen a egy egyenes és P egy az a -hoz nem tartozó pont; jelöljük A -val a P ponton áthaladó és a -ra merőleges egyenesnek a -val közös pontját; az A pontot a P -ből az a -ra bocsátott merőleges talppontjának nevezzük. A P pontnak az a egyenestől való távolságán értjük a PA szakaszt.

116. tétel. (Háromszögek negyedik egybevágósági tétele.) Ha két háromszögben két-két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szögek egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó.

Bizonyítás. Legyenek ABC és $A'B'C'$ az adott háromszögek; tegyük fel, hogy

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'.$$



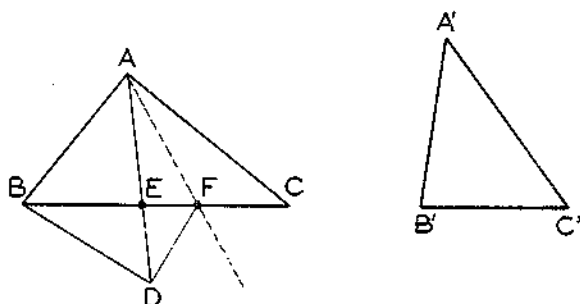
70. ábra.

Tegyük fel, hogy AC nem egyenlő $A'C'$ -vel, például, hogy $AC < A'C'$. Jelöljük A'' -vel a $\vec{CA}$ félsugárnak azt a pontját, melyre $CA'' = C'A'$ (70. ábra); feltevésünk szerint a C, A, A'' pontok elrendezése CAA'' . A 104. tétel szerint az $A'B'C'$ és az $A''BC$ háromszögek egybevágók, s ezért $A'B' = A''B$; feltételünk szerint ugyancsak $A'B' = AB$; ebből $A''B = AB$. A 107. tételt az $AA''B$ egyenlőszárú háromszögre alkalmazva adódik $\sphericalangle AA''B = \sphericalangle A''AB$; a 110. tétel szerint ebből következik $\sphericalangle CA''B > \sphericalangle A''CB$, tehát a 112. tétel szerint

$BC > A'B = AB$. Ebből következik, hogy, ha $AB > BC$, akkor $AC = A'C'$, s így $ABC \equiv A'B'C'$.

117. tétel. Tegyük fel, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B'$ és $AC = A'C'$. Ha $\sphericalangle BAC$ nagyobb mint $\sphericalangle B'A'C'$, akkor a BC oldal nagyobb mint a $B'C'$ oldal, és megfordítva.

Bizonyítás. Legyen D olyan pont, mely az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint a C pont, s melyre $ABD \equiv A'B'C'$ (III. 4). Mivel $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'A'C'$ és feltételünk szerint $\sphericalangle B'A'C' < \sphericalangle BAC$, tehát az $\vec{AD}$ félsugár a $\sphericalangle BAC$ szög belsejében fekszik (71. ábra); a 37. tétel szerint az $\vec{AD}$ félsugár metszi



71. ábra.

a BC oldalt valamely E pontban. A $\sphericalangle DAC$ szögfelezője metszi az EC szakaszt egy F pontban. Feltetésünk szerint $AD = A'C'$ és $AC = A'C'$, ebből $AC = AD$. Az AFD és az AFC háromszögekre alkalmazva a háromszögek első egybevágósági tételét (104. tétel), adódik, hogy $FD = FC$. Mivel F nem fekszik a BD szakaszon, tehát a 113. tétel értelmében $BD < BF + FD = BF + FC = BC$, ezért $BD < BC$, s a $BD = B'C'$ egyenlőségből: $B'C' < BC$.

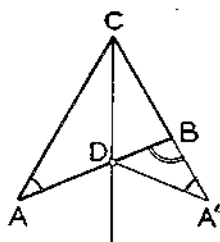
118. tétel. Ha az α síkban fekvő B és B' pontok egymás tükörképei az α egyenesre vonatkozóan, s ha C az α síknak olyan pontja, mely az α egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint a B pont, akkor $BC < B'C$.

Bizonyítás. Jelöljük a $B'C$ szakasznak az α egyenessel közös pontját D -vel; a $B'D = BD$ egyenlőségből következik, hogy $B'C = B'D + DC = BD + DC$. Mivel D nem fekszik a BC szakaszon, tehát a 113. tétel szerint $BC < BD + DC$; a fentiekből következik: $BC < B'C$.

Értelmezés. Az ABC háromszögnek a C csúcsához tartozó (belső) szögfelezőjén értjük az $\sphericalangle ACB$ szögfelezőjét.

119. tétel. Az ABC háromszögnek a C csúcsához tartozó szögfelezője metszi az AB oldalt valamely D pontban (37. tétel). Ha a háromszög AC oldala nagyobb a BC oldalnál, akkor az AD szakasz nagyobb a BD szakasznál.

Bizonyítás. Legyen A' a $\vec{CB}$ félsugárnak az a pontja, melyre $CA = CA'$; feltevésünk folytán a C, B, A' pontok elrendezése CBA' (72. ábra). A 104. tétel szerint az ADC és az $A'DC$ háromszögek egybevágók, tehát $AD = A'D$ és $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CA'D$. A 110. tétel szerint az ABC háromszögnek B -nél fekvő $\sphericalangle DBA'$ külső szöge nagyobb a szemben fekvő $\sphericalangle CAD$ belső szögnél; ebből az előbbieket szerint következik, hogy $\sphericalangle DBA' > \sphericalangle CA'D =$



72. ábra.

$= \sphericalangle BA'D$. A 112. tétel folytán tehát az $A'BD$ háromszög $A'D$ oldala nagyobb a BD oldalnál, s mivel $A'D = AD$, tehát $AD > BD$.

Értelmezés. Ha valamely háromszögnek egyik szöge derékszög, vagy tompaszög, akkor azt derékszögű, illetve tompaszögű háromszögnek nevezzük. A 110. tétel folytán derékszögű, vagy tompaszögű háromszögnek másik két szöge hegyesszög. — Ha egy háromszögnek mindhárom szöge hegyesszög, akkor azt hegyesszögű háromszögnek nevezzük.

Értelmezés. Egy derékszögű háromszög oldalai közül azt, mely a derékszöggel szemben fekszik, a háromszög átfogójának; a másik kettőt a háromszög befogóinak nevezzük.

120. tétel. Egy derékszögű háromszög átfogója nagyobb mint bármelyik befogója.

121. tétel. Ha az ABC és az $A'B'C'$ derékszögű háromszögek AB és $A'B'$ befogói egyenlők, és a BC befogó nagyobb a $B'C'$ befogónál, akkor az első háromszög átfogója nagyobb a másik háromszög átfogójánál: $AC > A'C'$.

A fenti két tétel közvetlenül következik a 112., ill. a 115. tételből.

A háromszögek egybevágóságára vonatkozó 104., 105., 111., 116. tételekből közvetlenül következik a derékszögű háromszögek egybevágóságára vonatkozó

122. tétel. Két derékszögű háromszög egybevágó, ha a következő feltételek közül valamelyik teljesül:

1. az egyik háromszög befogói egyenlők a másik háromszög befogóival ;

2. egy-egy befogójuk s a mellettük fekvő hegyesszögek egyenlők ;

3. egy-egy befogójuk s a szemben fekvő hegyesszögek egyenlők ;

4. átfogóik egyenlők s egy-egy befogójuk egyenlő ;

5. átfogóik egyenlők s egy-egy hegyesszögük egyenlő.

A 119. és a 120. tételből adódik a következő

123. tétel. Ha az ABC háromszögnek B -nél fekvő szöge derékszög, akkor a háromszögnek C csúcsához tartozó szögfelezője az AB befogót két olyan AD és BD szakaszra osztja fel, melyek közül a derékszögnél fekvő kisebb a másiknál: $BD < AD$.

18. §. Szögek egyenlőségére vonatkozó axiómák.

A síkidomok egybevágóságára vonatkozó tárgyalásunkban egyedüli alapfogalomként szakaszok egyenlőségét vezettük be, s ennek alapján értelmeztük a szögek egyenlőségét. A jelen paragrafusban HILBERT eredeti tárgyalásának megfelelően szakaszok egyenlőségén kívül szögek egyenlőségét is mint alapfogalmat fogjuk bevezetni s erre vonatkozóan a III. 1–3 lineáris axiómákon kívül felvesszük a III. a, b, c-vel jelölendő következő axiómákat.

Értelmezés. Szögek között bizonyos vonatkozások állanak fenn, melyeket az „egyenlő” (vagy „egybevágó”) szóval fejeztünk ki. Erre vonatkoznak a következő axiómák.

III. a. Minden $\sphericalangle(h, k)$ szög önmagával egyenlő: $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(k, h)$. — Ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög egyenlő a $\sphericalangle(h', k')$ szöggel, akkor a $\sphericalangle(h', k')$ szög egyenlő a $\sphericalangle(h, k)$ szöggel. — Ha a $\sphericalangle(h, k)$ szög egyenlő a $\sphericalangle(h', k')$ szöggel és a $\sphericalangle(h', k')$ szöggel, akkor a $\sphericalangle(h', k')$ szög egyenlő a $\sphericalangle(h'', k'')$ szöggel.

III. b. Ha $\sphericalangle(h, k)$ valamely szög, az α' síkban egy h' félsugárnak bármelyik oldalán van egy és csak egy olyan a h' kezdőpontjából kiinduló k' félsugár, melyre $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k')$.

A III. a axioma szögek egyenlőségének reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságát fejezi ki. A III. b axiómára így fogunk hivatkozni: egy szöget valamely félsugár bármelyik oldalán egy és csak egyféleképpen mérhetünk le.

III. c. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekre fennállanak a következő egyenlőségek:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C',$$

akkor

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

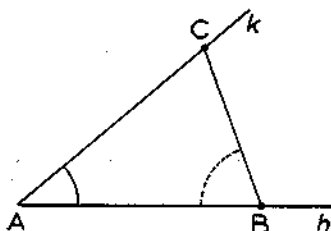
Ebből B és C , illetve B' és C' felcserélésével következik, hogy

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'.$$

Ha tehát egy háromszögnek két oldala s az ezek által bezárt szög rendre egyenlő egy másik háromszög két oldalával s az ezek által bezárt szöggel, akkor az egyik háromszög további két szöge is rendre egyenlő a másik háromszög illető szögeivel.

Ezt az axiómát úgy kell tekintenünk, hogy ez létesít kapcsolatot a szakaszokra és a szögekre vonatkozóan bevezetett egyenlőség fogalmak között. Ezt a szempontot emeli ki a III. c axióma következő megfogalmazása:

Legyenek $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ egyenlő szögek; ezeknek A és A' csúcsaitól mérjünk rá a h és h' szárakra egyenlő AB és $A'B'$ szakaszokat, és a k, k' szárakra egyenlő AC és $A'C'$ szakaszokat. Akkor a k és $\vec{CB}$ félsugarak által bezárt szög egyenlő a k' és $\vec{C'B'}$ félsugarak által bezárt szöggel (73. ábra).



73. ábra.

Megjegyzés. A III. a axiómának azt a részét, mely szögek egyenlőségének szimmetrikus és tranzitív voltára vonatkozik, levezethetnők a többi axiómából; ebben a levezetésben lényeges szerepe van a III. 1 axiómának, mely szakaszok egyenlőségének szimmetrikus és tranzitív tulajdonságát biztosítja, és a III. c axiómának, mely szakaszok egyenlőségének és szögek egyenlőségének

az összefüggésére vonatkozik. — De ha meg is tartjuk a III. a axiómát fent adott alakjában, sőt a III. a és b axiómákhoz hozzávennénk még egy a III. 3 axiómának megfelelő axiómát („egyenlő szögekhez egyenlőket adva az összegek is egyenlők”), akkor sem mellőzhetnők a III. c axiómát.

A fenti III. a, b, c axiómákat mint tételeket bebizonyítottuk a III. 1—5 axiómák alapján; a III. a axióma megegyezik a 95. és 96. tételekkel; III. b a 98. tétellel; III. c a 104. tétel része. A következő tárgyalásban viszont a III. 4 és 5 axiómákat fogjuk levezetni a III. 1, 2, 3, a, b, c axiómákból, s ezzel megmutatjuk a

nevezett két axiomasoport aequiválenciáját. Következő tárgyalásunk megegyezik a HILBERT-félével.

(Azokat a III. 1, 2, 3, a, b, c axiómák alapján bebizonyítandó tételeket, amelyeket előzőleg a III. 1–5 axiómák alapján már bebizonyítottunk, eredeti sorszámukkal és * jellel látjuk el.)

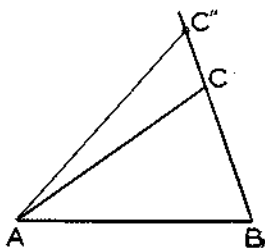
Értelmezés. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögeket egybevágóknak nevezzük, ha fennállanak oldalaikra és szögeikre nézve a következő egyenlőségek:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'$$

$$\text{és } \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B', \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$

104* tétel. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ és $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, akkor a két háromszög egybevágó.

Bizonyítás. A tételnek a szögek egyenlőségére vonatkozó állításai a III. c axiómában foglaltatnak. Annak igazolására, hogy $BC = B'C'$, jelöljük C'' -vel a $\vec{BC}$ félsugárnak azt a pontját, melyre $BC'' = B'C'$ (III. 2) (74. ábra). Az ABC'' és $A'B'C'$ háromszögek fennállanak a következő egyenlőségek: $AB = A'B'$, $BC'' = B'C'$, $\sphericalangle ABC'' = \sphericalangle A'B'C'$. A III. c axiómából következik tehát: $\sphericalangle BAC'' =$



74. ábra.

$= \sphericalangle B'A'C'$; eredeti feltevéseink szerint $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$; a III. a axiómából tehát következik, hogy $\sphericalangle BAC'' = \sphericalangle BAC$. Mivel a III. b axióma szerint a $\sphericalangle BAC$ szöget az $\vec{AB}$ félsugárnak azon az oldalán, melyen a $\vec{BC}$ félsugár fekszik, egy és csak egyféleképpen lehet lemérni, következik, hogy az $\vec{AC''}$ és $\vec{AC}$ félsugarak azonosak. Ennek a félsugárnak a BC egyenessel való C metszéspontja egybeesik tehát C'' -vel, s ezért $BC = B'C'$.

107* tétel. Ha az ABC háromszögben $AC = BC$, akkor $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$.

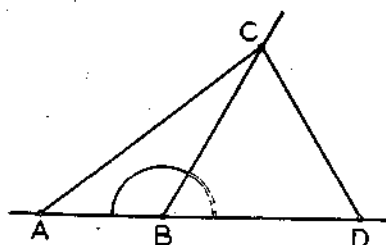
Bizonyítás. Az ABC és BAC háromszögek fennállanak az $AC = BC$, $BC = AC$ és $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCA$ egyenlőségek, s így a III. c axióma alapján adódik a $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ egyenlőség.

99* tétel. Ha két szög egyenlő egymással, mellékszögeik is egyenlők.

Bizonyítás. Legyenek $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ egyenlők; a h , illetve a h' félsugárnak a szög csúcsán túl való meghosszabbítását

jelöljük l -lel illetve l' -vel, s a szögek csúcsait rendre B -vel, illetve B' -vel. Vegyünk fel a h, k, l és a h', k', l' félsugarakon rendre olyan A, C, D és A', C', D' pontokat, hogy a következő egyenlőségek fennálljanak (75. ábra):

$$BA = B'A', \quad BC = B'C', \\ BD = B'D'.$$



75. ábra.

A 104* tételből következik, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybevágók, s így

$$AC = A'C' \text{ és } \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$

Mivel továbbá a III. 3 axioma folytán az AD szakasz egyenlő az $A'D'$ szakasszal, a 104* tételből következik, hogy a CAD és $C'A'D'$ háromszögek egybevágók, s ezért:

$$CD = C'D' \text{ és } \sphericalangle ADC = \sphericalangle A'D'C'.$$

A BCD és $B'C'D'$ háromszögekre nézve teljesülnek a III. c axioma feltételei, s ebből következik, hogy

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle C'B'D'.$$

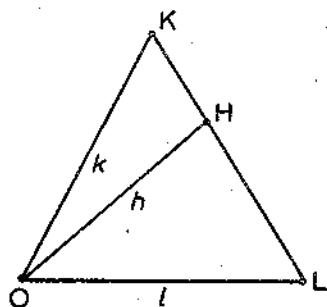
124. tétel. Legyenek h, k, l az O pontból kiinduló, és az α síkban fekvő, továbbá h', k', l' az O' pontból kiinduló és az α' síkban fekvő olyan félsugarak, hogy h, k és h', k' egyaránt vagy ugyanazon az oldalán, vagy különböző oldalán fekszenek az l , illetve az l' félsugárnak. Ha fennállnak a

$$\sphericalangle(h, l) = \sphericalangle(h', l') \text{ és } \sphericalangle(k, l) = \sphericalangle(k', l')$$

egyenlőségek, akkor

$$\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(h', k').$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy h és k az l félsugárnak ugyanazon az oldalán, s így feltételeink szerint ugyancsak h' és k' az l' félsugárnak ugyanazon az oldalán fekszenek (76. ábra). A másik esetet erre a 99* tétel alkalmazásával vezetjük vissza. A 41. tételből következik, hogy vagy a h félsugár fekszik a $\sphericalangle(k, l)$ belsejében, vagy a k félsugár fekszik a $\sphericalangle(h, l)$ belsejében; válasszuk a jelöl-



76. ábra.

léseket olyan módon, hogy h a $\sphericalangle(k, l)$ belsejében fekszen. — Felvesszünk a k, k', l, l' félsugarakon olyan K, K', L, L' pontokat, hogy $OK = O'K'$ és $OL = O'L'$ legyen. A 37. tétel szerint a h félsugárnak van a KL szakasszal közös pontja: H . Legyen H' a h' félsugárnak az a pontja, melyre $OH = O'H'$. Az OLH és $O'L'H'$ háromszögek egybevágósága a 104* tételből következik, s ugyanúgy az OLK és az $O'L'K'$ háromszögek egybevágósága, s így adódnak a következő egyenlőségek:

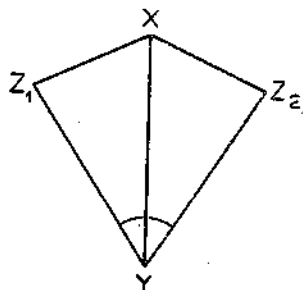
$$\begin{aligned}\sphericalangle OLH &= \sphericalangle O'L'H', & \sphericalangle OLK &= \sphericalangle O'L'K', \\ LH &= L'H', & LK &= L'K', \\ \sphericalangle OKL &= \sphericalangle O'K'L'.\end{aligned}$$

Mivel a III. b axioma szerint az $\sphericalangle OLK = \sphericalangle OLH$ szöget az α' síkban az $L\vec{O}$ félsugárnak azon az oldalán, melyen a H' és K' pontok fekszenek, egy és csak egyféleképpen lehet lemérni, az $\sphericalangle O'L'H' = \sphericalangle O'L'K'$ egyenlőségből (mely a fentiek következménye a III. a axioma szerint) adódik, hogy az $L\vec{H}'$ és az $L\vec{K}'$ félsugarak azonosak, vagyis hogy H' az $L\vec{K}'$ félsugáron fekszik. Az $LH = L'H'$ és $LK = L'K'$ egyenlőségekből következik, hogy az L, H, K pontok elrendezése megegyezik az L', H', K' pontok elrendezésével, s így a 66. tétel folytán $HK = H'K'$. Az $OK = O'K'$, $HK = H'K'$ és $\sphericalangle OKH = \sphericalangle O'K'H'$ egyenlőségekből a III. c axioma szerint adódik a tétel állításában foglalt $\sphericalangle KOH = \sphericalangle K'O'H'$ egyenlőség.

125. tétel. Ha X, Y, Z_1, Z_2 az α síkban fekvő olyan pontok, hogy Z_1 és Z_2 az XY egyenesnek különböző oldalán vannak, és fennállanak az $XZ_1 = XZ_2$ és $YZ_1 = YZ_2$ egyenlőségek, akkor az $\sphericalangle XYZ_1$ és $\sphericalangle XYZ_2$ szögek egyenlők.

Bizonyítás (77. ábra). Ha X és Y közül egyik sem fekszik a Z_1Z_2 egyenesen, akkor az XZ_1Z_2 és az YZ_1Z_2 háromszögekre alkalmazva a 107* tételt adódnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}\sphericalangle XZ_1Z_2 &= \sphericalangle XZ_2Z_1 \\ \text{és } \sphericalangle YZ_1Z_2 &= \sphericalangle YZ_2Z_1.\end{aligned}$$



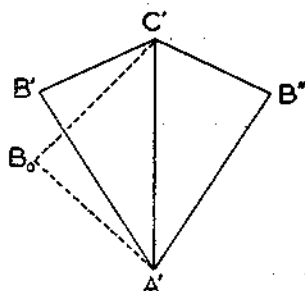
77. ábra.

Ebből a 124. tétel szerint következik $\sphericalangle XZ_1Y = \sphericalangle XZ_2Y$. — Ha az X, Y pontok közül valamelyik, például X , a Z_1Z_2 egyenesen fekszik, akkor ugyancsak a 107* tétel szerint $\sphericalangle XZ_1Y = \sphericalangle XZ_2Y$. — Ebből,

és a feltételezett $XZ_1 = XZ_2$, $YZ_1 = YZ_2$ egyenlőségekből következik a III. c axioma alapján, hogy az XZ_1Y és az XZ_2Y háromszögekben az $\sphericalangle XYZ_1$ és az $\sphericalangle XYZ_2$ szögek egymással egyenlők.

106* tétel. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, akkor a két háromszög egybevágó, tehát fennállnak a következő egyenlőségek is:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B', \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'.$$



78. ábra.

Bizonyítás. A III. b axioma szerint van az $A'C'$ egyenes mindegyik oldalán egy-egy olyan az A' pontból kiinduló h és k félsugár, melyekre

$$\sphericalangle(h, \vec{A'C'}) = \sphericalangle(k, \vec{A'C'}) = \sphericalangle BAC.$$

Legyen h a két félsugár közül az, mely az $A'C'$ egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint a B' pont. A III. 2 axioma szerint van h -n és k -n egy-egy olyan B_0 és B'' pont (78. ábra), melyekre

$$A'B_0 = A'B'' = AB.$$

A 104* tételt az ABC és az $A'B_0C'$, majd az $A'B''C'$ háromszögekre alkalmazva adódnak a következő egyenlőségek:

$$BC = B_0C' \text{ és } BC = B''C';$$

ezekből III. 1 szerint következik: $B_0C' = B''C'$. Ezekből és a feltételeinkben szereplő egyenlőségekből adódnak a következők:

$$\begin{aligned} \text{és} \quad A'B'' &= A'B_0, \quad C'B'' = C'B_0, \\ A'B'' &= A'B', \quad C'B'' = C'B'. \end{aligned}$$

A 125. tétel feltételei teljesülnek tehát, ha abban először X, Y, Z_1, Z_2 helyett C', A', B'', B_0 , másodsor C', A', B'', B' -t tesszük. Ebből következik, hogy a $\sphericalangle C'A'B''$ szög a $\sphericalangle C'A'B_0$ szöggel is, a $\sphericalangle C'A'B'$ szöggel is egyenlő; mivel pedig a III. b axioma szerint a $\sphericalangle C'A'B''$ szöggel egyenlő szöget az $\vec{A'C'}$ félsugárnak azon az oldalán, melyen a B' pont fekszik, egy és csak egyféleképpen mérhetünk le, következik ebből, hogy az $\vec{A'B_0}$ és $\vec{A'B'}$ félsugarak azonosak. Mivel pedig szerkesztés szerint a $\sphericalangle B_0A'C'$ egyenlő $\sphericalangle BAC$ -vel, következik a III. a axioma szerint, hogy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. — Az A, B, C illetve A', B', C' szerepének felcserélésével adódnak ebből az $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, és $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ egyenlőségek is.

Bebizonyítjuk most a következő tételt, mely a III. 4 axiómáit megegyezik:

Ha ABC valamely háromszög, és A', B' az α síkban fekvő pontok, melyekre $AB = A'B'$, akkor van az α síkban az $A'B'$ egyenes bármelyik oldalán egy és csak egy olyan C' pont, melyre nézve fennállanak az $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ egyenlőségek.

Bizonyítás. A III. b axióma szerint van az α síkban az $A'B'$ egyenes illető oldalán egy és csak egy olyan az A' pontból kiinduló k félsugar, hogy az $A'B'$ és k félsugarak által bezárt szög egyenlő a $\sphericalangle CAB$ szöggel. A III. 2 axióma folytán van a k félsugáron egy és csak egy olyan C' pont, melyre $AC = A'C'$. A 104* tétel szerint az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybevágók, s így $BC = B'C'$. — Legyen C'' másik olyan pont, melyre $AC = A'C''$ és $BC = B'C''$, s mely az $A'B'$ egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint C' ; a fenti egyenlőségekből a III. 1 axióma folytán következik: $A'C' = A'C''$, és $B'C' = B'C''$; mivel továbbá $A'B' = A'B'$, tehát a háromszögekre vonatkozó harmadik egybevágósági tétel szerint (106* tétel) az $A'B'C'$ és $A'B'C''$ háromszögek egybevágók, s ezért $\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle C''A'B'$; mivel feltevésünk szerint a C' és C'' pontok az $A'B'$ egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, az utóbbi egyenlőségből a III. b axióma szerint következik, hogy az $A'C'$ és $A'C''$ félsugarak azonosak. Mivel pedig $A'C' = A'C''$, tehát a C'' pont egybeesik a C' ponttal.

81* tétel. *Ha A, B, C egy egyenesen fekvő pontok, és A', B', C' olyan pontok, melyekre fennállanak az $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ egyenlőségek, akkor az A', B', C' pontok is egy egyenesen fekszenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A, B, C pontok elrendezése ABC . Ha az A', B', C' pontok nem fekszenek egy egyenesen, előbbi tételünk (III. 4 axióma) értelmében van az AB egyenesnek egyik oldalán egy és csak egy olyan C'' pont, melyre $A'C' = AC''$ és $B'C' = BC''$; a III. 1 axióma szerint tehát fennállanak a következő egyenlőségek:

$$AB = AB, \quad AC = AC'', \quad BC = BC''.$$

A 107* tételt sorban az ACC'' és BCC'' háromszögekre alkalmazva adódnak a következő egyenlőségek:

$$\sphericalangle ACC'' = \sphericalangle AC''C \quad \text{és} \quad \sphericalangle BCC'' = \sphericalangle BC''C.$$

Mivel pedig, az ABC elrendezés folytán, $\sphericalangle ACC'' = \sphericalangle BCC''$,

a III. a axióma szerint a fenti egyenlőségekből következik: $\sphericalangle CC''A = \sphericalangle CC''B$; ezért a III. b axióma szerint a $C''B$ és $C''A$ félsugarak azonosak, vagyis az A, B, C'' pontok egy egyenesen fekszenek, feltevésünkkel ellentétben.

Bebizonyítjuk végül a következő tételt, mely a III. 5 axiómával megegyezik:

Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és P az AB egyenes pontja, továbbá A', B', C', P' olyan pontok, melyekre fennállanak a következő egyenlőségek:

$AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C', AP = A'P', BP = B'P'$,
akkor fennáll a $CP = C'P'$ egyenlőség is.

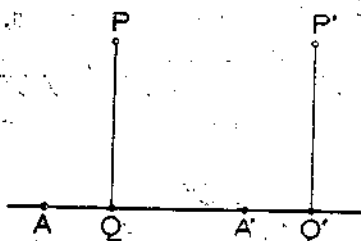
Bizonyítás. Az előző, 81* tétel folytán az A', B', P' pontok egy egyenesen fekszenek, de a C' pont nem fekszik ezen az egyenesen. Feltehetjük hogy az AB egyenesen B és P az A pontnak, s így a 67. tétel szerint az $A'B'$ egyenesen B' és P' az A' pontnak ugyanazon az oldalán vannak. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögekre alkalmazva a harmadik egybevágósági tételt (106* tétel), adódik, hogy a $\sphericalangle CAB$ és $\sphericalangle C'A'B'$ szögek egyenlők. Így a CAP és $C'A'P'$ háromszögekre nézve teljesülnek az első egybevágósági tétel (104* tétel) feltételei, s ebből következik, hogy $CP = C'P'$.

További tárgyalásainkban ismét a III. 1–5 axiómákat vesszük alapul.

19. §. A sík eltolásai és forgásai.

Értelmezés. A síknak önmagában való eltolását következőképpen értelmezzük. Legyenek A és A' a sík két tetszőleges pontja. Az AA' egyenesnek AA' (irányított) szakasszal való eltolását a 13. §.

értelmében meghatározzuk. Legyen P a sík tetszőleges, nem az AA' egyenesen fekvő pontja; a P pontból az AA' egyenesre merőlegest bocsátunk, ennek talppontját Q -val jelöljük; jelentse Q' az AA' egyenesnek azt a pontját, melyre nézve az AA' és QQ' irányított szakaszok egyenlők. A Q' pontban az AA' egyenesre merőleges félsugarat bocsátunk az AA' egyenesnek azon az oldalán, melyen a P pont fekszik, s erre rámérjük a $Q'P' = QP$ szakaszt (79. ábra).



79. ábra.

Az ilyen módon egyértelműen meghatározott P' pontot rendeljük hozzá a P ponthoz, mint képpontot. A síknak a fenti előírással meghatározott leképezését a síknak AA' szakasszal való eltolásának nevezzük.

A fent értelmezett AQP és $A'Q'P'$ derékszögű háromszögek egybevágók a 122. tétel szerint; ebből következik, hogy $AP = A'P'$, továbbá, hogy az $\vec{AP}$ és az $\vec{A'P'}$ félsugarak az AA' egyenessel egyenlő megfelelő szögeket zárnak be. Ha R a sík tetszőleges más pontja, és R' az AA' szakasszal való eltolásnál származó képe, akkor az $\vec{AR}$ és az $\vec{A'R'}$ félsugarak is egyenlő megfelelő szögeket zárnak be az AA' egyenessel; a 124. tétel értelmében tehát $\sphericalangle PAR = \sphericalangle P'A'R'$. Ebből és az $AP = A'P'$, $AR = A'R'$ egyenlőségekből következik a 104. tétel szerint $PR = P'R'$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

A síknak AA' szakasszal való eltolása a síknak önmagára való kongruens leképezése.

Ha B jelenti az AA' egyenes tetszőleges pontját, s B' ennek az AA' szakasszal való eltolásnál származó képét, akkor nyilván a síknak AA' és BB' szakasszal való eltolásai azonosak. De ha C nem az AA' egyeneshez tartozó pont, és C' ennek az AA' szakasszal való eltolásnál származó képe, akkor a síknak az AA' és a CC' szakasszal való eltolásai általában különbözők (hacsak nem tesszük fel a párhuzamosság axiomáját; l. IV. fejezet). Az AA' egyenest az AA' szakasszal való eltolás alapvonalának nevezzük.

Ha A , A' és A'' egy a egyenes három pontja, akkor a sík AA' és $A'A''$ szakaszokkal való eltolásainak szorzata a síknak AA'' szakasszal való eltolása. Más szóval: a síknak azok az eltolásai, melyeknek alapvonala az a egyenes, csoportot alkotnak; ez a csoport az egyenes eltolásaira vonatkozó 78. tétel folytán kommutatív.

Ha B egy olyan pont, mely nem tartozik az a egyeneshez, akkor a B pontnak az a alapvonalra vonatkozó bármely eltolásnál olyan B' képpont felel meg, hogy B -nek és B' -nek az a alapvonaltól való távolságai egyenlők. Viszont, ha B és B' két olyan pont, melyek az a egyenesnek ugyanazon az oldalán s a -tól egyenlő távolságban vannak, van egy és csak egy olyan az a alapvonalra vonatkozó eltolás, melynél B a B' -be megy át; bocsássunk ugyanis B -ből és B' -ből merőlegeseket az a egyenesre; ezek talppontjait jelöljük A és A' -vel; a síknak AA' szakasszal való eltolásánál B képe a B' pont.

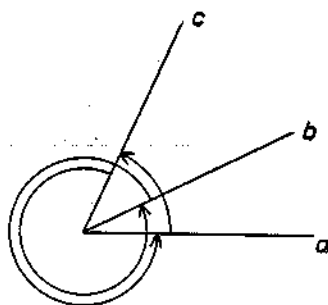
Értelmezés. Az a egyenes *aequidistans* vonalán értjük azoknak a pontoknak az összességét, melyek egy az a -n átfektetett α síkban az a egyenes egyik oldalán fekszenek, s melyeknek az a -tól való távolságai egymással egyenlők. Az α síknak minden pontján az a egyenesnek egy és csak egy *aequidistans* vonala megy át. Az a egyenest az illető *aequidistans* vonal *alpvonalának* nevezzük.

Fenti eredményeinket összefoglaljuk a következő tételben:

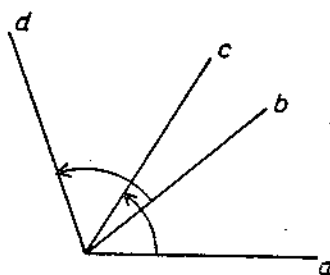
126. tétel. A síknak azok az eltolásai, melyeknek alpvonala egy a egyenes, kommutatív csoportot alkotnak. Bármely pontnak, mely nem fekszik az a alpvonalon, a csoport leképezéseinél származó képei együtt az a egyenesnek egy *aequidistans* vonalát alkotják.

A következőkben a síknak O pontja körül való forgásait fogjuk tárgyalni, s ebből a célból az O ponthoz tartozó sugársor ciklikus rendezése (8. §.) alapján értelmezni fogjuk a sugársor *ciklikus irányítását*, vagy az O pont körül való *forgási irányt*, hasonlóan, mint az egyenesen való lineáris rendezés alapján értelmeztük az egyenes irányítását (13. §.).

Értelmezés. Az O ponthoz és az α síkhoz tartozó sugársor *ciklikus irányításán* olyan előírást értünk, mely az O pontból kiin-



80. ábra.



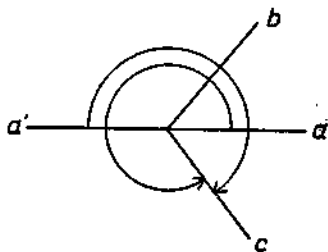
81. ábra.

duló és az α síkban fekvő bármely három a, b, c félsugarhoz ezeknek valamely permutációját rendeli hozzá; az abc permutáció által meghatározott irányítást (abc) -vel jelöljük. Értelmezés szerint *meg-egyezőnek* tekintjük az (abc) , (bca) , (cab) ciklikus irányításokat, melyeket az elsőből az elemek ciklikus felcserélésével nyerünk; egymással *ellenkezőnek* tekintjük az (abc) és (cba) irányításokat (80. ábra). — A ciklikus irányításnak a ciklikus rendezéssel való kapcsolatára vonatkozóan a következőt tesszük fel:

Ha a, b, c, d az O pontból kiinduló, az α síkban fekvő félsugarak, melyeknek ciklikus elrendezése $(ab\bar{c}d)$, akkor az (abc) és (bcd) ciklikus irányítások egymással megegyezők (81. ábra).

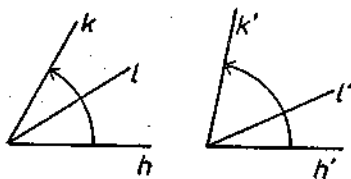
Az előbbi értelmezés alapján következik a ciklikus rendezésre vonatkozó 40. tételből, hogy ha a, b, c, a', b', c' hat tetszőleges az O pontból kiinduló, az α síkban fekvő félsugarak, akkor az a, b, c félsugarak bármelyik ciklikus irányításának megfelel az a', b', c' félsugarak egy meghatározott ciklikus irányítása. Jelöljük ugyanis az adott hat félsugarat $p_1, \dots, p_6$ -tal, olyan módon, hogy ciklikus elrendezésük $(p_1 \dots p_6)$ legyen. Jelentsék i, j, k az a, b, c -nek megfelelő indexeket nagyság szerinti sorrendben: $i < j < k$, s hasonlóan $i' < j' < k'$ az a', b', c' -höz tartozó indexeket. Az értelmezésből következik, hogy egymással megegyezők a $(p_i p_j p_k)$ és a $(p_{i'} p_{j'} p_{k'})$ ciklikus irányítások, s ezek közül az egyik meghatározza a másikat.

Az értelmezésekből következik, hogy ha a és a' egy egyenesnek az O pont által meghatározott két különböző félsugara, és b, c az O ponthoz tartozó sugársor további két eleme, melyek az a, a' egyenes különböző oldalán fekszenek, akkor (abc) és $(a'bc)$ egymással ellenkező ciklikus irányítások (82. ábra).



82. ábra.

Értelmezés. Ha $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ két olyan szög, melyeknek csúcsa az O pont, és l illetve l' az O pontból kiinduló



83. ábra.

s rendre a $\sphericalangle(h, k)$, illetve $\sphericalangle(h', k')$ belsejében haladó félsugarak, akkor a $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ szögeket megegyező vagy ellenkező előjellűnek nevezzük aszerint, hogy a $(h l k)$ és $(h' l' k')$ ciklikus irányítások megegyezők, vagy ellenkezők (83. ábra); ez az értelmezés független az l és l'

félsugarak megválasztásától. A $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(k, h)$ szögek az adott értelmezés szerint ellenkező előjellűek.

Értelmezés. Egyenes-szögön olyan szöget értünk, melynek két szára egy egyenesnek két különböző félsugara. Nulla-szögön olyan szöget értünk, melynek két szára egybeesik, vagyis egy és ugyanaz a félsugár. Értelmezés szerint bármely két egyenes-szöget

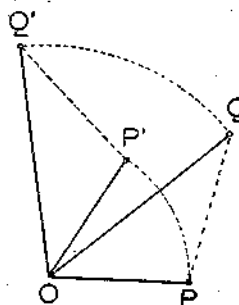
(és bármely két nulla-szöget) egymással egyenlőnek és megegyező előjellűnek tekintünk. (A szög fogalmának ez a kiterjesztése egyszerűsíti következő tárgyalásainkat.)

A fenti értelmezések szerint a 98. tétel értelmében minden $\sphericalangle(h, k)$ szöghöz s ennek a szögnek O csúcsából kiinduló h' félsugárhoz tartozik egy és csak egy olyan az O pontból kiinduló k' félsugár, hogy a $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ szögek egymással egyenlők és megegyező előjellűek.

Ennek alapján következőképen értelmezzünk forgásokat az O pontból kiinduló és az α síkban fekvő félsugarak összességére.

Értelmezés. Legyenek h és h' az O pontból kiinduló és az α síkban fekvő félsugarak. Az O ponthoz tartozó sugársor tetszőleges k félsugarához hozzárendeljük azt a k' félsugarat, melyre nézve a $\sphericalangle(h, h')$ és $\sphericalangle(k, k')$ szögek egyenlők, és megegyező előjellűek. A 124. tételből következik, hogy a $\sphericalangle(h, k)$ és $\sphericalangle(h', k')$ szögek egyenlők, és megegyező előjellűek. A sugársorra ilyen módon értelmezett leképezést $\sphericalangle(h, h')$ szöggel való forgásnak nevezzük. Ha $\sphericalangle(h, h')$ egyenes-szög, akkor a leképezést félforgásnak nevezzük. — Az O pont körül való forgások — a félforgást és a nullaszöggel való forgást, vagyis az azonosságot is beleértve — kommutatív csoportot alkotnak.

Az O pont körül való forgásokat fent mint az O ponthoz tartozó sugársor önmagára való leképezéseit értelmeztük. Közvetlenül kiterjeszthető ez az értelmezés olyanképen, hogy az O pont körül való forgások a sík pontjaira vonatkozó leképezések legyenek.



84. ábra.

Rendeljük hozzá a k félsugáron fekvő tetszőleges P ponthoz azt a P' pontot, mely k -nak az adott forgásnál származó k' képén fekszik, s amelynek az O ponttól való távolsága egyenlő az OP távolsággal; az O pont képe maga az O pont. — Ha P és Q két tetszőleges pont, P' és Q' valamely az O pont körül való forgásnál származó képeik, akkor fennállanak az $OP = OP'$, $OQ = OQ'$ és $\sphericalangle POQ = \sphericalangle P'OQ'$ egyenlőségek, s ezekből a háromszögek első egybevágósági

tétele (104. tétel) szerint következik, hogy a PQ és $P'Q'$ szakaszok egyenlők (84. ábra). Eszerint a síknak az O pont körül való forgásai a síknak önmagára való kongruens leképezései. — Jegyezzük

meg, hogy az O pont körül való félforgás minden az O ponton áthaladó egyenesen megegyezik ennek az egyenesnek az O pontra vonatkozó tükrözésével.

Értelmezés. A síknak azok a pontjai, melyeknek egy O ponttól való távolságai egymással egyenlők, *kört* alkotnak; O a *kör középpontja*. A síknak minden az O -tól különböző pontján átmegy egy és csak egy olyan kör, melynek középpontja O .

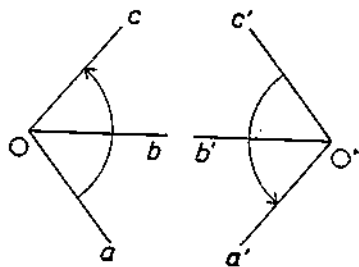
Fenti tárgyalásunk eredményét a következő tételben foglaljuk össze:

127. tétel. A síknak egy O pontja körül való forgásai kommutatív csoportot alkotnak. Bármely az O -tól különböző pontnak a csoport leképezéseinek származó képei együtt egy kört alkotnak, melynek O a középpontja.

20. §. A sík irányítása.

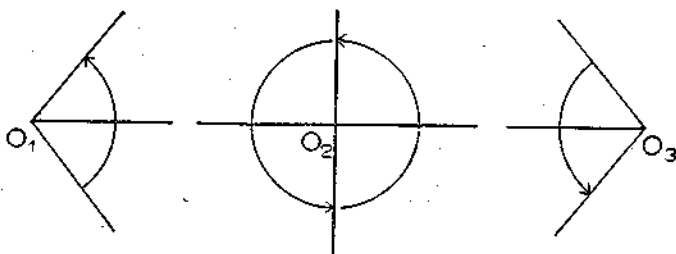
Az előző paragrafus értelmezései szerint a sík valamely O pontjából kiinduló három félsugar bármely ciklikus sorrendje meghatározza az O ponthoz tartozó sugársor egyik ciklikus irányítását, vagyis az O pont körül való egyik forgási irányt. A sugársor két ciklikus irányításának megfelel az O pont körül két forgási irány, melyeket egymással ellenkezőnek, s közülök egyiket *pozitívnak*, a másikat *negatívnak* nevezzük.

Értelmezés. Két különböző O és O' ponthoz rendelt forgási irányok megegyező vagy ellenkező voltára vonatkozik a következő értelmezés. Jelöljük b -vel az $\vec{OO'}$ és b' -vel az $\vec{O'O}$ félfélsugarat; legyenek továbbá a, c és a', c' az O , illetve az O' pontból kiinduló olyan félsugarak hogy a és a' az OO' egyenesnek egyik, a és c' félsugarak a másik oldalán feküsznek. Az O ponthoz tartozó (abc) és az O' ponthoz tartozó $(c'b'a')$ forgási irányokat *megegyező irányoknak* nevezzük (85. ábra). A 40. tételből következik, hogy ez az értelmezés független az a, c, a', c' félsugarak speciális megválasztásától. Az O' pont körül való két forgási irány közül azt nevezzük pozitívnak, mely az O pont körül megadott pozitív forgási iránnyal megegyező az előbbi értelmezés szerint.



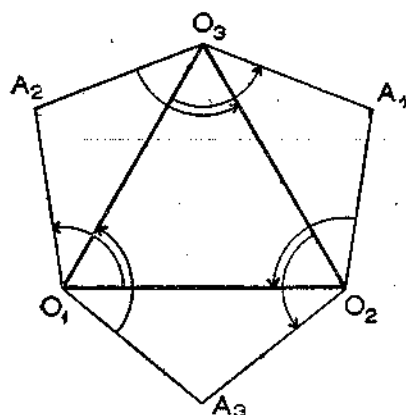
Ha O_1, O_2, O_3 a síknak három tetszőleges pontja, s ha az O_1 -hez és O_2 -höz, valamint az O_2 -höz és O_3 -hoz rendelt pozitív forgási irányok megegyezők, akkor az O_1 -hez és O_3 -hoz tartozó pozitív forgási irányok is megegyezők.

Ha az O_1, O_2, O_3 pontok egy egyenesen fekszenek, állításunk közvetlenül következik a megegyező irányok fenti értelmezéséből (86. ábra). — Ha O_1, O_2, O_3 nem egy egyenesen fekvő pontok, jelentsé A_i a síknak olyan pontját, mely az $O_i O_j$ egyenesnek másik



86. ábra.

oldalán fekszik, mint az O_i pont $[(i, j, k)$ jelenti sorban az $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ és $(3, 1, 2)$ permutációkat] (87. ábra). Az $\vec{O_1 O_2}$, $\vec{O_1 O_3}$, $\vec{O_1 A_2}$ félsugaraknak $(\vec{O_1 O_2}, \vec{O_1 O_3}, \vec{O_1 A_2})$ ciklikus irányítását jelöljük



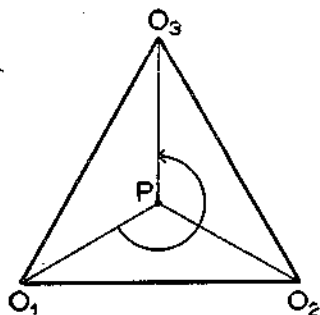
87. ábra.

$[O_1(O_2 O_3 A_2)]$ jellel. Legyen az O_1 -hez rendelt forgási irány például $[O_1(O_2 O_3 A_2)]$; ez az egy pont körül való forgási irányok megegyezésére adott értelmezés szerint megegyező az $[O_1(A_2 O_2 O_3)]$ irányítással. Utóbbi a fenti értelmezés szerint az O_2 ponthoz rendelt $[O_2(O_3 O_1 A_1)]$ irányítással, és így az $[O_2(A_1 O_3 O_1)]$ irányítással is megegyező. Az utóbbi az értelmezés szerint megegyező az O_3 ponthoz rendelt $[O_3(O_1 O_2 A_1)]$, és az ezzel megegyező $[O_3(A_2 O_1 O_2)]$

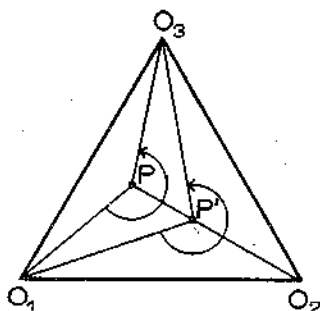
irányítással. Ez az utóbbi irányítás az értelmezés szerint valóban megegyező az O_1 ponthoz eredetileg rendelt $[O_1(O_2 O_3 A_2)]$ irányítással. Ezzel bebizonyítottuk fenti állításunkat, melyet a következő tételben mondunk ki:

128. tétel. A sík minden pontjához megadható egy forgási irány olyan módon, hogy bármely két ponthoz rendelt forgási irányok megegyezők; a síknak ezt a tulajdonságát úgy fejezzük ki, hogy: a sík irányítható. A sík irányítását valamely pontjához rendelt egyik forgási irány egyértelműen meghatározza; az illető ponthoz tartozó két forgási iránynak a sík két irányítása felel meg, melyeket egymással ellenkezőnek, közülök egyiket a sík pozitív, a másikat a sík negatív irányításának nevezzük.

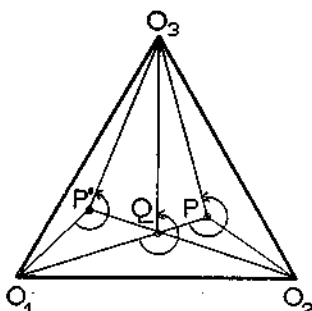
A sík irányítását egy háromszög csúcsainak ciklikus sorrendje meghatározza a következő értelemben. Legyen P az $O_1O_2O_3$ háromszög belsejében fekvő pont. A csúcsok ($O_1O_2O_3$) ciklikus sorrendjében megfeleltetjük a P pontra vonatkozó $[P(O_1O_2O_3)]$ forgási irányt (88. ábra). A sík minden pontjához hozzárendeljük azt a forgási irányt, mely a P pont körül megadott $[P(O_1O_2O_3)]$ forgási iránnyal megegyező. A 128. tétel értelmében bármely két ponthoz rendelt forgási irányok megegyezők. Azt kell még megmutatnunk, hogy a síknak ilyen módon értelmezett irányítása független a P pont megválasztásától, vagyis, ha P' az $O_1O_2O_3$ háromszög belsejének tetszőleges más pontja, akkor a $[P(O_1O_2O_3)]$ és a



88. ábra.



89. ábra.



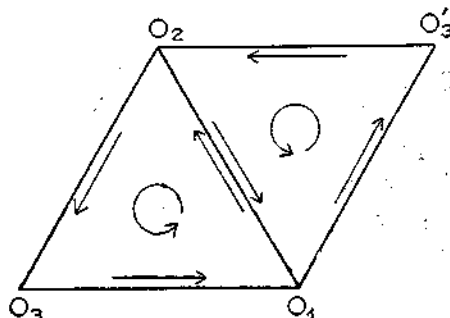
90. ábra.

$[P'(O_1O_2O_3)]$ forgási irányok megegyezők. Nyilvánvaló ez abban az esetben, midőn a PP' egyenes áthalad a háromszög valamely csúcsán (89. ábra). Ellenkező esetben pedig jelentse Q az O_1P és O_2P' félsugarak metszéspontját (90. ábra); a $[P(O_1O_2O_3)]$ és

$[Q(O_1O_2O_3)]$, valamint a $[P'(O_1O_2O_3)]$ és $[Q(O_1O_2O_3)]$ irányok megegyezéséből következik a 128. tétel szerint, hogy a $[P(O_1O_2O_3)]$ és a $[P'(O_1O_2O_3)]$ irányok is megegyezők. Ezzel fenti állításunkat bebizonyítottuk.

Az értelmezésekből következik, hogy ha $O_1O_2O_3$ és $O_1O_2O'_3$ két olyan háromszög, melyeknek O_3 , O'_3 csúcsai a közös O_1O_2 oldalon átfektetett egyenesnek különböző oldalán fekszenek, akkor a háromszögek csúcsainak $(O_1O_2O_3)$ és $(O_2O_1O'_3)$ ciklikus sorrendje a síknak ugyanazt az irányítást határozza meg (91. ábra).

Értelmezés. Tekintsük a síknak egy önmagára való kongruens leképezését. Legyen O a sík valamely pontja, és O' ennek a leképezésnél származó képe.



91. ábra.

Az O pontból kiinduló három különböző a , b , c félsugárnak a leképezésnél három különböző az O' pontból kiinduló a' , b' , c' félsugár felel meg (88. tétel). Azt mondjuk, hogy a leképezés megtartja vagy megfordítja a sík irányítását, aszerint, hogy az O

pontra vonatkozó (abc) és az O' pontra vonatkozó $(a'b'c')$ forgási irányok megegyezők, vagy ellenkezők.

Az értelmezés igazolására jegyezzük meg, hogy a 102. tétel szerint a sík kongruens leképezése megtartja a sugársor ciklikus rendezését s ezért a leképezés fent értelmezett tulajdonsága független a O pontból kiinduló a , b , c félsugarak választásától. Legyen Q a síknak O -tól különböző pontja, és Q' ennek az adott leképezésnél származó képe. Felveszünk a síkon két olyan A és B pontot, melyek az OQ egyenes különböző oldalán fekszenek; ezeknek az adott leképezésnél származó A' , B' képei az $O'Q'$ egyenes különböző oldalán fekszenek a 88. tétel szerint. Tegyük fel, hogy az $[O(AQB)]$ és az $[O'(A'Q'B')]$ forgási irányok megegyezők; az értelmezés szerint ugyancsak megegyezők az $[O(AQB)]$ és a $[Q(BOA)]$, valamint az $[O'(A'Q'B')]$ és a $[Q'(B'O'A')]$ irányok; ebből a 128. tétel értelmében következik, hogy a $[Q(BOA)]$ és a $[Q'(B'O'A')]$ forgási irányok is megegyezők. Eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

129. tétel. A síknak önmagára való kongruens leképezése bármely pont körül való egyik forgási iránynak a képpont körül való egyik forgási irányt felelteti meg, Ha ez a két irány valamely pontra vonatkozóan megegyező, akkor ugyanez érvényes minden más pontra vonatkozóan is; ebben az esetben azt mondjuk, hogy a leképezés megtartja, ellenkező esetben azt, hogy megfordítja a sík irányítását.

Megjegyzés. A fenti megfontolásból adódik az az eredmény is, hogy az α síknak az α' síkra való kongruens leképezése az α sík megadott irányításának az α' sík egyik meghatározott irányítását felelteti meg.

Legyenek S és T a síknak önmagára való kongruens leképezései; ha ezek mindketten megtartják, vagy mindketten megfordítják a sík irányítását, akkor az ST leképezés megtartja a sík irányítását. Ha S és T közül egyik megtartja, a másik megfordítja a sík irányítását, akkor az ST leképezés megfordítja a sík irányítását. Ebből következik, hogy a síknak önmagára való, az irányítást megtartó kongruens leképezései csoportot alkotnak.

A síknak önmagában való eltolásai és forgásai megtartják, a sík tükrözései megfordítják a sík irányítását. A síknak az a alaponra vonatkozó eltolása az a egyenest megmaradó irányítással önmagába, s az a egyenes által meghatározott két félsík közül mindegyiket önmagába viszi át. Ebből következik, hogy a sík eltolása a sík irányítását megtartja. — A forgások értelmezése szerint az O pont körül való bármely forgásnál az O ponthoz tartozó sugársor ciklikus irányítása, s ezért a sík irányítása is változatlan marad. — A síknak az a tengelyre vonatkozó tükrözésénél az a egyenes megmaradó irányítással önmagába megy át (mivel minden egyes pontja önmagának felel meg), s az a tengely által meghatározott két félsík egymásba megy át; ebből következik, hogy a tükrözés a sík irányítását megfordítja.

21. §. A sík mozgásai.

Értelmezés. A síknak önmagára való olyan kongruens leképezését, mely a sík irányítását megtartja, a sík mozgásának nevezzük.

130. tétel. A sík mozgásai csoportot alkotnak.

Ugyanis a sík önmagára való, az irányítást megtartó két leképezésének a szorzata szintén megtartja a sík irányítását, mint fent megjegyeztük.

Értelmezés. Valamely leképezés *fixpontján* olyan pontot értünk, mely a leképezésnél önmagának felel meg.

Például a síknak az O pont körül való forgásánál O fixpont: a síknak az a tengelyre vonatkozó tükrözésénél az a tengely minden pontja fixpont; a sík eltolásának nincsen fixpontja.

Értelmezés. Két leképezést az A pontban megegyezőnek nevezünk, ha az A pontnak az egyik és a másik leképezésnél származó képei egybeesnek.

A fenti értelmek alapján a 89. tételből adódik a következő:

Ha a sík valamely önmagára való kongruens leképezésének három nem egy egyenesen fekvő fixpontja van, akkor a leképezés az azonosság.

Ha a síknak két kongruens leképezése egymással megegyező három olyan pontban, melyek nem fekszenek egy egyenesen, akkor a két leképezés egymással azonos, vagyis a sík minden pontjában is megegyező.

A 90. tételt következőképen fogalmazhatjuk meg:

Ha a sík önmagára való kongruens leképezésének fixpontjai A és B , akkor a leképezés vagy az azonosság, vagy az AB egyenesre vonatkozó tükrözés, aszerint, hogy a leképezés megtartja, vagy megfordítja a sík irányítását.

Ebből közvetlenül következik:

131. tétel. *Ha a síknak két önmagára való kongruens leképezése egymással megegyező két pontban, s mindkettő megtartja, vagy mindkettő megfordítja a sík irányítását, akkor a két leképezés egymással azonos.*

A fentiek alapján bebizonyítjuk a következő tételeket.

132. tétel. *Ha a sík önmagára való kongruens leképezésének fixpontja az O pont, akkor a leképezés a síknak az O pont körül való forgása, vagy valamely az O ponton áthaladó egyenesre vonatkozó tükrözése, aszerint, hogy a leképezés megtartja, vagy megfordítja a sík irányítását.*

Bizonyítás. Ha P a síknak egy az O -tól különböző pontja, és P' ennek az adott leképezésnél származó képe, akkor az $OP=OP'$ egyenlőség folytán van a síknak az O pont körül olyan forgása, mely P -t P' -be viszi át; ugyancsak van a síknak olyan tükrözése, melynél P a P' -be megy át, s ennek a tükrözésnek a tengelye áthalad az O ponton. Az adott leképezés az O és a P pontban megegyező az O pont körül $\sphericalangle POP'$ szöggel való forgással és a

P, P' pontok középvonalára vonatkozó tükrözéssel. A 131. tétel szerint tehát az adott leképezés ezek közül az egyikkel azonos.

133. tétel. *A síknak bármely olyan önmagára való kongruens leképezése, mely involutorius (vagyis amelynek a négyzete az azonosság), a síknak félforgása, vagy tükrözése, aszerint, hogy megtartja, vagy megfordítja a sík irányítását.*

Bizonyítás. A leképezésnek van legalább egy fixpontja; legyen ugyanis P a sík egy pontja, P' ennek a képe, s tegyük fel, hogy P és P' különbözők. Mivel a leképezés involutorius, a P' pont képe a P pont, s ezért a PP' szakasz a $P'P$ szakaszba, s ennek O középpontja önmagába megy át. A 132. tételből következik tehát, hogy az adott leképezés az O pont körül való forgás, mégpedig félforgás, vagy egy az O ponton áthaladó egyenesre (a PP' pontpár középvonalára) vonatkozó tükrözés.

134. tétel. *A síknak minden önmagára való kongruens leképezése előállítható vagy mint a sík egy forgásának és egy eltolásának, vagy mint a sík egy tükrözésének és egy eltolásának a szorzata.*

Bizonyítás. Legyen A a sík tetszőleges pontja és A' ennek a képe. Az adott leképezésnek és a sík $A'A$ szakasszal való eltolásának szorzata a síknak önmagára való kongruens leképezése, melynél A fixpont. A 132. tétel szerint ez az utóbbi leképezés vagy egy forgás, vagy egy tükrözés; ezt a síknak az AA' szakasszal való eltolásával szorozva visszakapjuk az eredetileg adott leképezést.

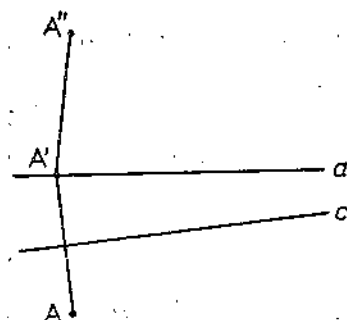
135. tétel. *A sík bármely mozgását előállíthatjuk két forgás szorzataként.*

Bizonyítás. A sík azonos leképezése a sík bármely pontja körül való félforgásának a négyzete. Ha az adott mozgás nem az azonosság, legyen A a síknak olyan pontja, mely képpontjától, A' -től, különböző. A sík adott mozgásának és az AA' szakasz C középpontja körül való félforgásnak a szorzata olyan mozgás, melynél A önmagába megy át; a 132. tétel szerint ez egy forgás az A pont körül. Ezt az A pont körül való forgást a C pont körül való félforgással szorozva visszakapjuk az eredeti mozgást.

136. tétel. *A sík bármely mozgását előállíthatjuk két tükrözés szorzataként.*

Bizonyítás. A sík azonos leképezése a sík bármely egyenesére vonatkozó tükrözésének a négyzete. Ha az adott mozgás nem az azonosság, legyen A' a sík tetszőleges pontja, mely az adott mozgásnál származó A'' képétől különböző; jelöljük A -val az

A' inverz képét (vagyis azt a pontot, melynek az adott leképezésnél az A' pont felel meg). Az A, A' pontok középvonalát jelöljük c -vel. Tegyük fel, hogy az A és A'' pontok különbözök, s jelöljük az



92. ábra.

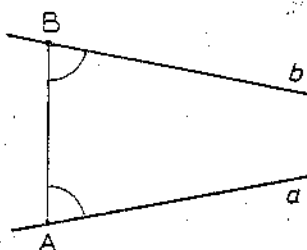
$\angle AA'A''$ szögfelezőjét a -val (92. ábra). A c -re vonatkozó tükrözésnél az A és A' pontok, az a -ra vonatkozó tükrözésnél pedig az A és A'' pontok egymással felcserélődnek, tehát a két tükrözésnek a nevezett sorrendben való szorzatánál az A pont A' -be, A' pedig A'' -be megy át; ez a szorzat a síknak olyan mozgása, mely az A és A' pontokban az adott mozgással megegyezik; ebből a 131. tétel szerint

következik, hogy a két mozgás egymással azonos, s így az adott mozgás a c -re és az a -ra vonatkozó tükrözések szorzata. — A fenti megfontolásból nyilvánvaló, hogy a két tükrözés közül az egyiket úgy választhatjuk meg, hogy annak a tengelye a tetszőlegesen felvett A' ponton haladjon át. — Fent kizártuk azt az esetet, hogy A és A'' egybeesnek; ebben az esetben a mozgás az AA' szakasz O középpontja körül való félforgás (a 133. tétel bizonyítása szerint), s előállítható két tetszőleges az O ponton áthaladó és egymásra merőleges egyenesre vonatkozó tükrözések szorzataként.

22. §. Síkbeli egyenes-seregek.

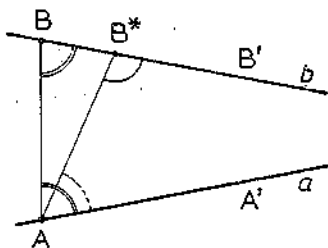
Értelmezés. Az a síkban fekvő a és b egyenesek A és B pontjait homolog (vagy megfelelő) pontoknak nevezzük, ha az a és b egyenesek az AB egyenessel annak ugyanazon az oldalán egyenlő belső szögeket zárnak be (93. ábra).

Ha az a és b egyeneseknek van egy O közös pontja, akkor az a egyenes tetszőleges A pontjának a b egyenesnek két az A -val homolog pontja, B_1 és B_2 , felel meg, melyekre nézve fennáll az $OA = OB_1 = OB_2$ egyenlőség; az O, B_1, B_2 pontoknak a b egyenesen való elrendezése B_1OB_2 (l. 107. és 108. tételt).



93. ábra.

Ha az a és b egyeneseknek nincs közös pontja, akkor az a egyenes tetszőleges A pontjának a b egyenesen legfeljebb egy olyan B pont felel meg, mely A -val homolog. — Tegyük fel ugyanis, hogy A és B az a és b egyenesek homolog pontjai, s legyen B^* a b egyenesnek tetszőleges a B -től különböző pontja. Jelöljük A' és B' -vel a és b egy-egy olyan pontját, melyek az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek mint B^* , továbbá B' elrendezése legyen BB^*B' (94. ábra). Az ABB^* háromszögnek B^* -nál fekvő $\sphericalangle B^*BA$ külső szöge a 110. tétel szerint nagyobb a $\sphericalangle B'BA$ szögnél. Másrészt az $\sphericalangle A'AB$ szög nagyobb az $\sphericalangle A'AB^*$ szögnél; ugyanis, mert az a és b egyeneseknek



94. ábra.

nincs közös pontja, a B^* és B pontok az $a = AA'$ egyenesnek, s feltevésünk folytán a B^* és A' pontok az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak; eszerint a B^* pont, tehát az $\vec{AB^*}$ félsugár is az $\sphericalangle A'AB$ szög belsejében fekszik. Feltevés szerint az $\sphericalangle A'AB$ és $\sphericalangle B'BA$ szögek egyenlők, s így a fenti vonatkozásokból következik, hogy az $\sphericalangle A'AB^*$ szög kisebb a $\sphericalangle B^*BA$ szögnél; ezért az A és B^* pontok nem homolog pontok az a és b egyeneseken.

Ha a sík valamely tükrözése az a és b egyeneseket felcseréli, akkor ezeknek az egyeneseknek homolog pontjai egymásnak felelnek meg. Ha A és B az a és b egyenesek homolog pontjai, akkor a síknak az A és B pontokat felcserélő tükrözése az a és b egyeneseket egymásba viszi át.

Ezek az állítások az értelmezésekből közvetlenül következnek.

Ha A és B az a és b egyenesek homolog pontjai, továbbá A' és B' ezeknek az AB egyenes ugyanazon az oldalán fekvő olyan pontjai, melyekre $AA' = BB'$, akkor A' és B' is homolog pontjai a -nak és b -nek. Ugyanis az A, B pontok középvonalára vonatkozó tükrözésnél A' és B' egymásnak felelnek meg.

Értelmezés. Az α síkban fekvő a és b egyenesek középvonalán olyan az α síkban fekvő c egyenest értünk, amelyre vonatkozó tükrözés az a és b egyeneseket felcseréli.

Két egymást metsző egyenes középvonalai a két egyenes által bezárt szögek felezői.

geket zárnak be, s így A' és B' az a és b egyenesek homolog pontjai. Az $A'B'$ szakaszt merőlegesen felező c egyenes annak a tükrözésnek a tengelye, mely az a és b egyeneseket egymásba viszi át; más szóval c az a és b egyenesek középvonala.

Mint előbb bebizonyítottuk, két egymást nem metsző a és b egyenesen a homolog pontok megfeleltetése egyértelmű; mivel a síknak olyan tükrözése, mely az a és b egyenest egymással felcseréli, ezeknek homolog pontjait felelteti meg egymásnak, a 131. tételből következik, hogy az egymást nem metsző a és b egyeneseknek legfeljebb egy középvonala van.

Értelmezés. *Egyenes-seregen* az α síkban fekvő egyenesek olyan összességét értjük, melyre a következő feltételek teljesülnek:

1. a síknak minden pontján átmegy a seregnek legalább egy egyenese;

2. a sereg egyenesein a *homolog pontok vonatkozása tranzitív*; vagyis ha a, b, c a sereg három tetszőleges egyenese, és A, B az a, b egyeneseknek, továbbá A, C az a, c egyeneseknek homolog pontjai, akkor B és C a b és c egyeneseknek homolog pontjai.

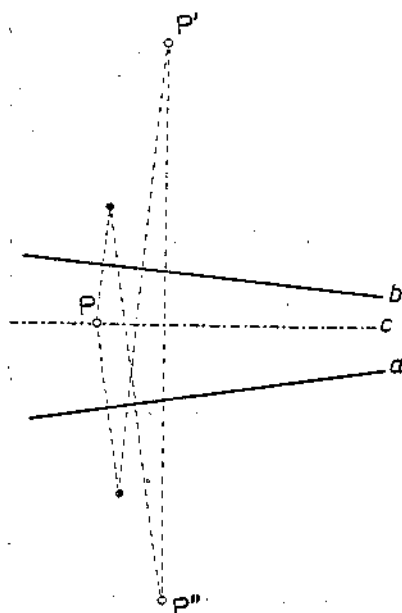
Ha a sereg két egyenesének van közös pontja: O , akkor a sereg az O ponton áthaladó és az α síkban fekvő egyenesek összessége. Ha ugyanis a, b, c az O ponton áthaladó egyenesek s ezeken A, B az a, b -nek, továbbá A, C az a, c -nek homolog pontjai, akkor $OA = OB$ és $OA = OC$, tehát $OB = OC$ s ezért B és C a b és c egyeneseknek homolog pontjai. — Viszont ha a és b két az O ponton átmenő egyenes, továbbá c olyan egyenes, hogy a, b, c -n a homolog pontok vonatkozása tranzitív, akkor O -nak mint az a és mint a b egyenes pontjának a c egyenesnek ugyanaz az O' pontja felel meg, mint vele homolog; ha O' különböző volna O -tól, akkor az $\vec{OO'}$ félsugárral ennek ugyanazon az oldalán a és b egyenlő szögeket zárnának be, ellentétben a 98. tétellel.

Ebből következik, hogy ha egy egyenes-sereg két egyenesének nincs közös pontja, akkor a sík minden pontján a seregnek egy és csak egy egyenese halad át.

Következő tárgyalásunk célja annak bebizonyítása, hogy a sík két tetszőleges egyenese meghatároz egy egyenes-sereget, amelyhez a két adott egyenes tartozik. Ilyen egyenes-sereg meghatározására szolgál a HJELMSLEV-től származó következő eljárás.

Legyenek a és b az α síkban fekvő, egymást nem metsző egyenesek. Jelentse S_a a síknak az a egyenesre vonatkozó tükrö-

zését; hasonlóan S_b , stb. Az S_a és S_b tükrözések $S_a S_b$ szorzata a síknak az a leképezése, melyet úgy kapunk, hogy előbb az S_a , s ezt követően az S_b tükrözést alkalmazzuk.



96. ábra.

Jelöljük P -vel a síknak valamely pontját, P' -vel és P'' -vel ennek az $S_a S_b$, illetve az $S_b S_a$ leképezésnél származó képeit (96. ábra):

$$P' = S_a S_b(P), \quad P'' = S_b S_a(P).$$

Mint könnyen belátható, a P, P', P'' pontok egymástól különbözők. Ha először $P = P'$, vagyis $P = S_a S_b(P)$, akkor $S_a(P) = S_b(P)$, s így a P és $S_a(P)$ pontokat felcserélnék az S_a és S_b tükrözések; ha $S_a(P)$ különböző P -től, akkor a 91. tétel folytán következik ebből, hogy az a és b egyenesek azonosak egymással, feltevésünkkel ellentétben; ha pedig $S_a(P)$ egybeesik P -vel, akkor ez az a és b egyenesek közös pontja lenne, szintén ellentétben feltevésünkkel.

— Ha másodszor $P' = P''$, vagyis $S_a S_b(P) = S_b S_a(P)$, akkor $S_a S_b(P') = P$; eszerint az $S_a S_b$ leképezés a P és P' pontokat egymásba, s ezért a PP' szakasz O középpontját önmagába viszi át, vagyis $S_a S_b(O) = O$; előbbi megjegyzésünk szerint ez ellentétben van feltevéseinkkel.

Jelöljük c -vel a P' és P'' pontok középvonalát. A c egyenes átmegy a P ponton; ugyanis az $S_b S_a$ kongruens leképezésnél a P és P' pontok képei rendre a P'' és a P pont:

$$S_b S_a(P) = P'', \quad S_b S_a(P') = P;$$

ebből következik, hogy

$$PP' = PP'',$$

s ezért a P', P'' pontok középvonala átmegy a P ponton (l. például a 118. tételt).

Legyen Q a c egyenes tetszőleges, a P -től különböző pontja,

s jelöljük ennek az $S_a S_b$ és $S_b S_a$ leképezéseknél származó képeit rendre Q' -vel és Q'' -vel:

$$Q' = S_a S_b(Q), \quad Q'' = S_b S_a(Q);$$

mint fent, adódik a következő egyenlőség:

$$QQ' = QQ''.$$

A fenti vonatkozásokból levezethetjük a következőket:

$$P = S_b S_a(P') = S_b S_b S_a(P'') = S_b S_a S_b S_a(P)$$

$$Q'' = S_b S_a(Q) = S_b S_b S_a(Q) = S_b S_a S_b S_a(Q'),$$

tehát az $S_b S_a S_b S_a$ kongruens leképezésnél a P és Q' pontok rendre a P és Q'' pontokba mennek át s ezért

$$PQ' = PQ''.$$

Az előbbi egyenlőségekből következik, hogy $PQ'Q'' \equiv PQ'Q''$ vagyis, hogy a $c = PQ$ egyenes a Q' és Q'' pontok középvonala.

Ha a P pontot az a (vagy a b) egyenesen vesszük fel, a fenti szerkesztés az a (illetve a b) egyenest adja.

A fenti szerkesztéssel hozzárendeltünk az a, b egyenesekhez, és a sík tetszőleges P pontjához egy és csak egy a P ponton áthaladó c egyenest, olyan módon, hogy a c egyenes tetszőleges Q pontjához hozzárendelt egyenes c -vel azonos. A c egyenesről azt mondjuk, hogy az (a, b) sereghez tartozik.

Megjegyzés. Ha az a és b egyeneseknek nincs közös pontja, és ha c jelenti az (a, b) sereg valamely egyenesét, akkor az a, b, c egyenesek közül valamelyik a síkban elválasztja egymástól a másik kettőt. Nyilvánvaló ez abban az esetben, ha a felvett P pontot, melyen át a c egyenest szerkesztettük, az a, b egyenesek közül valamelyik a másiktól elválasztja. Ellenkező esetben pedig a $P' = S_a S_b(P)$ és a $P'' = S_b S_a(P)$ pontokat a P ponttól rendre a b és az a egyenesek elválasztják, mint a 12. tétel alapján könnyen belátható. A $P'P''$ szakasznak van az a, b, c egyenesekkel rendre egy-egy A, B, C közös pontja, s ezeknek elrendezése $P'BCAP''$. A $PC = c$ egyenesnek különböző oldalán fekszenek a c -t nem metsző a és b egyenesek (l. a 96. ábrát).

Ha a c egyenes az (a, b) sereghez tartozik, akkor az $S_a S_b S_a$ leképezés négyzete az azonosság; jelben:

$$(S_a S_b S_a)^2 = 1.$$

Ugyanis, ha P és Q a c egyenes két tetszőleges pontja:

$$P'' = S_c(P) = S_a S_b S_c(P), \quad Q'' = S_c(Q) = S_a S_b S_c(Q)$$

és $P'' = S_b S_a(P) = S_c S_b S_a(P), \quad Q'' = S_b S_a(Q) = S_c S_b S_a(Q).$

tehát az $S_a S_b S_c$ és $S_b S_a S_c$ leképezések, melyek mindketten megfordítják a sík irányítását, megegyezők a P és Q pontokban s ezért a 131. tétel szerint a két leképezés egymással azonos:

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a;$$

ebből, tekintettel az $S_a^2 = S_b^2 = S_c^2 = 1$ vonatkozásokra, következik:

$$(S_a S_b S_c)^2 = 1.$$

Ha viszont c olyan egyenes, melyre fennáll az $(S_a S_b S_c)^2 = 1$ vonatkozás, akkor c az (a, b) sereghez tartozik. Legyen ugyanis P a c egyenes valamely pontja, s jelöljük ennek az $S_a S_b$ és $S_b S_a$ leképezéseknél származó képeit rendre P' és P'' -vel, akkor

$$P'' = S_b S_a(P) = S_c S_b S_a(P) = S_a S_b S_c(P) = S_c(P'),$$

vagyis P' és P'' egymás tükörképei c -re vonatkozóan.

Az $(S_a S_b S_c)^2 = 1$ vonatkozás szimmetrikus a, b, c -re; például:

$$(S_b S_c S_a)^2 = S_a (S_a S_b S_c)^2 S_a = S_a^2 = 1.$$

Ebből következik, hogy ha c az (a, b) sereghez tartozik, akkor b az (a, c) sereghez a pedig a (b, c) sereghez tartozik.

Az $S_a S_b S_c$ involutorius leképezés megfordítja a sík irányítását, ez a 133. tétel szerint a síknak valamely d egyenesre vonatkozó tükrözése, vagyis:

$$S_a S_b S_c = S_d;$$

a d egyenes ugyanacsak az (a, b) sereghez tartozik; ugyanis

$$S_d S_a S_b = S_d S_a S_b S_c S_c = S_d S_d S_c = S_c, \text{ s így } (S_d S_a S_b)^2 = 1.$$

Ha a c és d egyenesek közül mindegyik az (a, b) sereghez tartozik, akkor d a (b, c) sereghez tartozik. (Feltesszük, hogy a, b, c, d egymástól különbözők.) Állításunk igazolására felvesszünk a d egyenesen valamely P pontot, s ebből képezzük a következőket:

$$P' = S_a S_b(P), \quad P'' = S_b S_a(P)$$

$$Q' = S_b S_c(P), \quad Q'' = S_c S_b(P).$$

Mint láttuk, fennáll a $PP' = PP''$ és hasonlóan a $PQ' = PQ''$ egyenlőség. A fenti vonatkozásokból adódnak a következők:

$$P' = S_a S_b(P) = S_c S_b S_a S_b(Q')$$

$$Q'' = S_c S_b(P) = S_a S_b S_c S_b(P'');$$

mivel c az (a, b) sereghez tartozik, tehát $S_a S_b S_c = S_c S_b S_a$, s így

$$Q'' = S_a S_b S_c S_b (P'').$$

A síknak $S_a S_b S_c S_b$ mozgásánál a Q' és P'' pontok képei rendre a P' és Q'' pontok, s így

$$Q' P'' = Q'' P'.$$

Hasonlóan :

$$P'' = S_b S_a (P) = S_c S_b S_a S_c (Q') = S_c S_a (Q')$$

$$Q'' = S_c S_b (P) = S_b S_a S_c S_b (P') = S_b S_a S_b S_c (P') = S_c S_a (P'),$$

s ebből

$$P'' Q'' = P' Q'.$$

Az előbbi szakasz-egyenlőségekből következik a

$$PP' P'' Q' \equiv PP'' P' Q'$$

egybevágóság. — Ha P, P', P'' nem fekszenek egy egyenesen, akkor mivel P a d egyenesen fekszik, P' és P'' pedig egymás tükörképei a d egyenesre vonatkozóan, a fenti egybevágóságból a 89. tétel alapján következik, hogy a Q' és Q'' pontok ugyancsak egymás tükörképei a d egyenesre vonatkozóan, tehát d a (b, c) sereghez tartozik. Ebben az esetben tehát az (a, b) sereget két tetszőleges c és d egyenese egyértelműen meghatározza, vagyis az (a, b) sereg azonos a (c, d) sereggel.

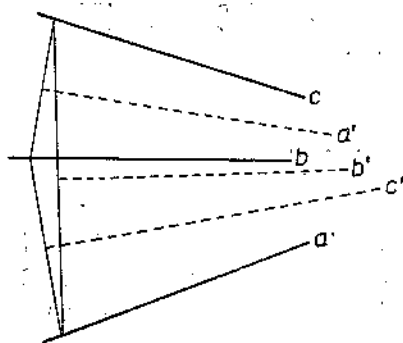
Ha P, P', P'' egy e egyenesen fekszenek, akkor e merőleges d -re. Azt állítjuk, hogy e merőleges a -ra és b -re is; jelöljük ugyanis e -nek S_a -nál származó képét e' -vel; mivel e az $S_a S_b$ leképezésnél önmagába megy át, tehát, ha e' különböző e -től, akkor az e és e' egyenesek felcserélődnek egymással az S_a és az S_b tükrözések közül mindegyiknél; a 137. tétel szerint ez csak úgy volna lehetséges, ha e és e' metszik egymást, és a, b az e, e' által bezárt szögek felezői; ez ellentmond annak a feltételünknek, hogy a -nak és b -nek nincs közös pontja. Következik tehát, hogy $e = e'$, vagyis hogy e merőleges a -ra és b -re.

Ha az a és b egyeneseknek közös merőlegese e , akkor az (a, b) sereg az e -re merőleges egyenesek összessége, mint az (a, b) sereg szerkesztésére megadott előírásból nyilvánvaló. Ebben az esetben is érvényes tehát fenti állításunk, hogy ha c és d az (a, b) sereg két tetszőleges egyenese, akkor d a (b, c) sereghez tartozik; ebből következik, hogy az (a, b) sereget két tetszőleges egyenese egyértelműen meghatározza.

A fenti tárgyalások eredményét a következőben foglaljuk össze:

A sík két tetszőleges egymást nem metsző a és b egyeneséhez hozzárendeltünk a fentiek szerint egy egyenes-sereget, úgyhogy a sík minden pontján a seregnek egy és csak egy egyenes megy át. Ezt a sereget bármely két hozzátartozó egyenes egyértelműen meghatározza.

Tekintettel a 129. oldalon adott értelmezésre, igazolnunk kell



97. ábra.

még azt, hogy a fenti módon meghatározott egyenes-seregen a homolog pontok vonatkozása tranzitív. Jegyezzük meg, hogy a sereg két a és b egyenesével együtt ezeknek c' középvonala is a sereghez tartozik, mint az (a, b) sereg szerkesztéséből nyilvánvaló. Ha tehát a, b, c a sereg három tetszőleges egyenes, és a', b', c' jelenti rendre a $(b, c), (c, a), (a, b)$ egyenespár középvonalát (97. ábra), akkor fennáll az

$$(S_a, S_{a'}, S_{b'})^2 = 1$$

vonatkozás; ebből a fentiek szerint következik, hogy $S_a, S_{a'}, S_{b'}$ a sereg valamely egyenesére vonatkozó tükrözés; mivel ennél az a egyenes önmagába megy át, tehát

$$S_a, S_{a'}, S_{b'} = S_a.$$

Mint a 127. oldalon megjegyeztük, az a, b egyenesek középvonalára vonatkozó tükrözés a és b homolog pontjait felelteti meg egymásnak. Az $S_a, S_{a'}, S_{b'} = S_a$ vonatkozásból következik, hogy a sereg egyenesin a homolog pontok megfeleltetése tranzitív.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

138. tétel. A sík két tetszőleges egymástól különböző egyenes meghatároz egy egyenes-sereget. Ezt a sereget két tetszőleges egymástól különböző egyenes meghatározza. Ha a sereg két egyenesének van egy O közös pontja, akkor a sereg az O ponton áthaladó egyenesek összessége. Ha a sereg két egyenesének van közös merőlegese: e , akkor a sereg az e egyenesre merőleges egyenesek összessége. — Az a, b, c egyenesek akkor és csak akkor tartoznak

egy egyenes-sereghez, ha a síknak rájuk vonatkozó tükrözései között fennáll az $(S_a S_b S_c)^2 = 1$ vonatkozás. Az $(S_a S_b S_c)^2 = 1$ vonatkozás a 132. tétel szerint fennáll, ha a sík irányítását megfordító $S_a S_b S_c$ leképezésnek van fixpontja.

Megjegyzés. A fenti meggondolásból adódik, hogy ha A, B, C az a, b, c egyeneseknek páronként homolog pontjai (vagyis ha A, B az a, b -nek, B, C a b, c -nek és A, C az a, c -nek homolog pontjai), akkor az a, b, c egyenesek egy sereghez tartoznak.

Értelmezés. Egy egyenes-sereg epiciklusán értjük valamely A ponttal a sereg egyenesein homolog pontok összességét. A sík minden pontján áthalad az egyenes-seregnek egy és csak egy epiciklusa. Ha a sereg két egyenesének nincs közös pontja, a sereget és az epiciklust *nyílt*nak nevezzük. (Ezt az elnevezést indokolja a 131. oldalon levő Megjegyzés.)

Ha a sereg két egyenesének van közös pontja: O , akkor az epiciklusok azok a körök, melyeknek középpontja O . Ha a sereg két egyenesének van közös merőlegese: e , akkor az epiciklusok az e egyenes és ennek aequidistans vonalai. (Lásd a homolog pontok általános tulajdonságaira vonatkozó megjegyzéseinket a 126–127. oldalon.)

A kör pontjainak ciklikus rendezését következőképen értelmezzük: legyen A, B, C, D az O középponttal bíró körnek négy tetszőleges pontja; ha az $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ félsugarak ciklikus elrendezése $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD})$, akkor erre a négy pontra az $(ABCD)$ ciklikus elrendezést írjuk elő. A kör ciklikus irányítását három tetszőleges pontjának adott ciklikus sorrendje meghatározza. Az O pont körül való forgások bármely az O középponttal bíró kör pontjainak ciklikus irányítását megtartják (l. 102. tételt).

Nyílt epiciklus pontjainak lineáris rendezését a következőképen értelmezzük. Legyen A, B, C az epiciklus három tetszőleges pontja, s jelöljük a, b, c -vel az adott egyenes-seregnek ezeken a pontokon áthaladó egyeneseit. Ha a b egyenes a síkban elválasztja egymástól az a és c egyeneseket (l. a 131. oldalon levő Megjegyzést), akkor az epiciklus pontjaira az ABC lineáris rendezést írjuk elő; ez az elrendezés a 12. tétel folytán eleget tesz a II. 1, 2, a, b axiómáknak. Az epiciklus irányítását két pontjának sorrendje meghatározza.

139. tétel. A sík bármely kongruens leképezése egy egyenes-sereghez tartozó egyeneseket szintén egy sereghez tartozó egyenesekbe, s az egyiknek epiciklusait a másiknak epiciklusaiiba viszi át.

Bizonyítás. Ha a és b két egyenes, és A, B ezeknek homolog pontjai, akkor az a, b egyeneseknek az adott kongruens leképezésnél származó a', b' képein az A, B képpontjai A' és B' , szintén homolog pontok. Ha tehát a, b, c egy sereghez tartozó három tetszőleges egyenes, és A, B, C ezeknek páronként homolog, azaz egy epiciklushoz tartozó pontjai, akkor az a, b, c egyeneseknek az adott leképezésnél származó a', b', c' képein az A, B, C pontok képei, A', B', C' , szintén páronként homologok, s így az a', b', c' egyenesek egy sereghez tartoznak, az A', B', C' pontok pedig ennek a seregnek egy epiciklusán fekszenek.

Ebből az eredményünkből következik, hogy ha a síknak önmagára való kongruens leképezésénél egy sereg két különböző egyenese ugyanennek a seregnek két egyenesébe megy át, akkor a sereg az adott leképezésnél önmagába megy át.

A síknak egy egyenes-sereg bármely egyenesére vonatkozó tükrözése a sereget önmagába s annak mindegyik epiciklusát önmagába viszi át. Ha ugyanis a b egyenes az S_a tükrözésnél a b' egyenesbe megy át, akkor a sík irányítását megfordító $S_a S_b S_a$ leképezésnél a b' egyenes minden pontja fixpont; eszerint

$$S_a S_b S_a = S_{b'}, \quad S_b S_a S_{b'} = S_a, \quad (S_a S_b S_{b'})^2 = 1;$$

az utóbbiból következik, hogy b' az (a, b) sereghez tartozik.

Ha a sík önmagára való kongruens leképezésénél valamely sereg a egyenese ennek a seregnek a' egyenesébe, továbbá a-nak A, B pontjai rendre a'-nek velük homolog A', B' pontjaiba mennek át, akkor a sereg az adott leképezésnél önmagába megy át s annak minden epiciklusa önmagának felel meg.

Ha ugyanis a és a' -nek van egy O közös pontja, akkor az A, B, O és az A', B', O pontok elrendezése megegyezik (75. tétel); jelöljük c -vel az a, a' egyenesek által bezárt szögeknek azt a szögfelezőjét, melyre vonatkozóan A és A' , s ugyancsak B és B' egymás tükröképei. Ha pedig a és a' -nek nincs közös pontja, jelöljük c -vel az a, a' egyenesek középvonalát. Mivel az S_a és az $S_a S_b$ leképezéseknél a sereg önmagába megy át, s ezek a leképezések az A és B pontokban megegyeznek az adott leképezéssel, a 131. tételből következik, hogy az adott leképezés azonos vagy S_c -vel, vagy $S_a S_c$ -vel, aszerint, hogy megfordítja, vagy megtartja a sík irányítását. Mint fent megjegyeztük, az S_a és az S_b tükrözéseknél, s így ezek $S_a S_b$ szorzatánál is a sereg önmagába s annak minden epiciklusa önmagába megy át.

Ebből a meggondolásból kiadódott a következő eredmény is:

Ha a és a' valamely nyílt sereg két egyenese, akkor van a síknak egy és csak egy olyan mozgása, mely a sereget önmagába, az a egyenest a' -be viszi át, és a sereg epiciklusait változatlanul hagyja. Ez a mozgás előállítható mint a sereg két egyenesére vonatkozó tükrözések szorzata.

Értelmezés. Egy nyílt sereg önmagában való eltolásán a síknak olyan mozgását értjük, mely a sereget önmagába s annak minden epiciklusát önmagába viszi át.

A sereg önmagában való eltolásánál a sereg bármely epiciklusának lineáris irányítása változatlan marad (l. 88. tételt).

140. tétel. *Egy nyílt egyenes-sereg önmagában való eltolásai kommutatív csoportot alkotnak. A csoport lineáris, azaz elemeire megadható a II, 1, 2, a, b axiómáknak eleget tevő lineáris rendezés olyan módon, hogy a csoport bármely elemével való szorzásnál a csoport elemeinek lineáris elrendezése és irányítása változatlan marad.*

Bizonyítás. Előbbi eredményeink értelmében az adott sereg bármely önmagában való eltolását előállíthatjuk a sereg két egyenesére vonatkozó tükrözések szorzataként. Emlékeztetünk arra, hogy ha a, b, c a sereg három tetszőleges egyenese, akkor

$$S_a S_b S_c = S_c S_b S_a = S_c$$

a sereg valamely e egyenesére vonatkozó tükrözés. Ha tehát $T = S_a S_b$ és $T' = S_c S_a$ a seregnek két önmagában való eltolása, akkor $TT' = S_a S_b S_c S_a = S_c S_a$ szintén a seregnek önmagában való eltolása, továbbá

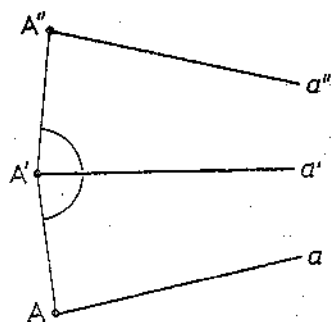
$$TT' = S_a S_b S_c S_a = S_c S_b S_a S_a = S_c S_a S_b S_b = T' T.$$

A csoport elemeinek lineáris rendezését a következő előírással adjuk meg. Legyen ε az adott sereg valamely epiciklusa, ezen felveszünk tetszőleges E pontot s megfigyeljük neki az azonosságot. Az ε epiciklus bármely A pontjához tartozik a seregnek egy és csak egy olyan önmagában való T_A eltolása, mely E -t A -ba viszi át. Ha A, B, C az ε epiciklus három tetszőleges pontja, melyeknek elrendezése A, B, C , és T_A, T_B, T_C a megfelelő eltolások, akkor ezekre a T_A, T_B, T_C lineáris elrendezést írjuk elő. A csoport bármely eltolásánál az epiciklus pontjainak lineáris rendezése változatlan marad; ebből következik, hogy ha T a csoport tetszőleges eleme, a T_A, T_B, T_C elemek elrendezése megegyezik a $T_A T, T_B T, T_C T$ elemek elrendezésével.

Hasonló eljárással megadhatunk az O pont körül való forgáscsoport elemeire olyan ciklikus rendezést, mely a csoport bármely elemével való szorzásnál változatlan marad. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az O pont körül való forgások ciklikus csoportot alkotnak.

141. tétel. A sík minden fixpont nélküli mozgáshoz megadható egy és csak egy olyan nyílt egyenes-sereg, hogy az adott mozgás ennek a seregnek önmagában való eltolása.

Bizonyítás. Legyen A a sík tetszőleges pontja, A' az A -nak és A'' az A' -nek az adott mozgásnál származó képe. Mivel a mozgásnak nincs fixpontja, az A és A' pontok különböznek, s a 133. tétel következtében ugyancsak különböznek az A és A'' pontok. Az $\angle AA'A''$



98. ábra.

szögfelezőjét jelöljük a' -vel s ennek az adott mozgásnál és inverzénél származó képeit a'' és a val (98. ábra). Az A, A', A'' pontok az a, a', a'' egyenesek páronként homolog pontjai, s ezért a 138. tételt követő Megjegyzés szerint az a, a', a'' egyenesek egy sereghez, az A, A', A'' pontok ennek egy epiciklusához tartoznak. Az adott mozgásnál az (a, a') sereg az (a', a'') seregbe, tehát önmagába, s ennek az A ponton áthaladó epiciklusa szintén önmagába

megy át; eszerint az adott mozgás az (a, a') seregnek önmagában való eltolása. — Ha (b, b') másik olyan sereg volna, melynek önmagában való eltolása az adott mozgás, jelöljük b -vel a seregnek az A ponton áthaladó egyenesét és b' -vel a b képét. Feltézés szerint A és A' a b és b' egyenesek homolog pontjai, s így a b és b' egyenesek c középvonala azonos az A és A' pontok középvonalaival, tehát c az (a, a') és a (b, b') sereg közös egyenese. Mivel az adott mozgásnál mindkét sereg önmagába megy át, c képe: c' is közös egyenese a két seregnek, s mivel c és c' különböznek, tekintve hogy a' -nek különböző oldalán fekszenek, a 138. tételből következik, hogy a két sereg egymással azonos.

Megjegyzés. Ha feltesszük a párhuzamosság axiomáját (I. IV. fejezet), akkor abból következik, hogy bármely egyenes-sereg vagy egy O ponton áthaladó, vagy egy e egyenesre merőleges egyenesek összessége.

23. §. Háromszögek nevezetes pontjai és vonalai.

Értelmezés. Az ABC háromszög középmerőlegesein értjük az A, B , a B, C és a C, A pontpárok középvonalait.

142. tétel. *Egy háromszög három középmerőlegese egy egyenes-sereghez tartozik.*

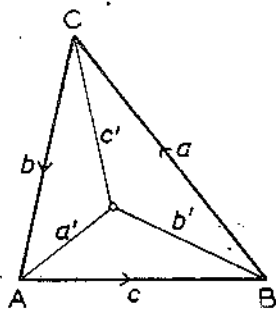
Bizonyítás. Jelöljük az A, B , a B, C és a C, A pontpárok középvonalait rendre c', a', b' -vel; az ABC síknak ezekre az egyenesekre vonatkozó tükrözéseit $S_{c'}, S_{a'}, S_{b'}$ -vel. Az $S_{c'}, S_{a'}, S_{b'}$ leképezésnél az A pont önmagába megy át; a 138. tétel értelmében tehát az a', b', c' egyenesek egy sereghez tartoznak. — Ha közülök kettőnek van egy O közös pontja, akkor a harmadik is átmegy az O ponton; az OA, OB, OC távolságok egyenlők, tehát az A, B, C pontok egy olyan kör pontjai, melynek O a középpontja.

Megjegyzés. A sík három tetszőleges pontján egy és csak egy epiciklus megy át. Ugyanis a három pontból alkotott három pontpár középvonalai egy sereghez tartoznak; az adott pontok ennek a seregnek rajtuk áthaladó egyenesein páronként homologak, s így ennek a seregnek egy epiciklusa átmegy a három ponton. Viszont ha egy ε epiciklus átmegy a három adott ponton, akkor a három pontból alkotott három pontpár középvonalai ahhoz az egyenes-sereghez tartoznak, melynek ε epiciklusa.

Értelmezés. Az ABC háromszögnek az A csúcsához tartozó *belső szögfelezőjén* értjük a $\sphericalangle BAC$ szöget felező egyenest (l. 106. o.). Az ABC háromszögnek az A csúcsához tartozó *külső szögfelezőjén* értjük azt az egyenest, mely a $\sphericalangle BAC$ szög mellékszögeit (vagyis a háromszög A -nál fekvő külső szögeit) felezi.

143. tétel. *Egy háromszög három belső szögfelezője egy ponton megy át. A háromszög egyik csúcsához tartozó belső szögfelezője és a másik két csúcsához tartozó külső szögfelezői egy egyenes-sereghez tartoznak.*

Bizonyítás. Legyen a' az ABC háromszögnek A csúcsához tartozó belső szögfelezője; jelöljük b' és c' -vel a B és a C csúcsához tartozó szögfelezőket, melyek vagy mindketten belső, vagy mindketten külső szögfelezői az ABC háromszögnek (99. ábra).



99. ábra.

Jelöljük a, b, c -vel a háromszög BC, CA, AB oldalvonalait rendre a BC, CA, AB irányítással ellátva; ugyanezeket az egyeneseket ellenkező irányítással véve jelöljük $-a, -b, -c$ -vel. Az a' belső szögfelezőre vonatkozó tükrözésnél az $\vec{AC}$ félsugár az $\vec{AB}$ félsugárba, tehát a b egyenes a $-c$ egyenesbe megy át. Ha b' a B csúcshoz tartozó külső szögfelezőt jelenti, akkor a b' -re vonatkozó tükrözésnél a $\vec{BC}$ félsugár a $\vec{BA}$ félsugárnak B felől való meghosszabbításába, vagyis az a egyenes a c egyenesbe megy át. Feltetésünk szerint b' és c' mindketten belső, vagy mindketten külső szögfelezői a háromszögnek, s így

$$S_{a'}(b) = -c, S_{b'}(c) = \varepsilon a, S_{c'}(a) = \varepsilon b, (\varepsilon = \pm 1);$$

ebből

$$S_{a'}S_{b'}S_{c'}(b) = -b,$$

tehát a síknak az irányítást megfordító $S_{a'}S_{b'}S_{c'}$ leképezésénél a b egyenes megfordított irányítással önmagába megy át. Jelöljük az A pont képét az $S_{a'}S_{b'}S_{c'}$ leképezésnél A_1 -gyel; az AA_1 szakasz középpontja a leképezésnek fixpontja, s így az a', b', c' egyenesek egy sereghez tartoznak. — Ha b' és c' az ABC háromszögnek belső szögfelezői, akkor a 37. tétel folytán metszik rendre a háromszög AC és AB oldalait; a 9. tétel szerint tehát van b' -nek és c' -nek egy O közös pontja. A bebizonyítottak szerint a' a (b', c') sereghez tartozik, vagyis a' átmegy az O ponton. Az O pontnak a háromszög három oldalától való távolságai egymással egyenlők, mint a 122. tétel alkalmazásával közvetlenül belátható.

Értelmezés. Az ABC háromszögnek az A csúcsából húzott magassági vonalán értjük az A pontból a BC egyenesre bocsátott merőlegest; ennek a BC egyenessel való metszéspontját a magassági vonal talppontjának nevezzük.

144. tétel. Egy háromszög három magassági vonala egy egyenes-sereghez tartozik. Egy hegyesszögű háromszög három magassági vonala egy ponton halad át,

Bizonyítás. (A következő bizonyítás alapgondolatát DEHN professzor szíves levélbeli közlésének köszönöm.) Tegyük fel, hogy ABC nem derékszögű háromszög; jelöljük az ABC háromszög oldalvonalait a, b, c -vel, magassági vonalait a', b', c' -vel. A b' és a c' magassági vonal B' és C' talppontját összekötő egyenest jelöljük d -vel, ennek a c -re és a b -re vonatkozó tükrösképeit e -vel

és f -fel (100. ábra). Mivel b és b' merőlegesek egymásra, ezért d és f egymásnak b' -re vonatkozóan is tükörképei; hasonlóan d és e egymás tükörképei a c' egyenesre vonatkozóan. Eszerint fennállanak a következő vonatkozások, melyekben eltekintünk az egyenesek irányításától:

$$S_b(d) = S_{b'}(d) = f;$$

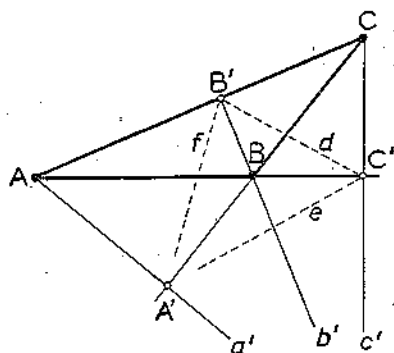
$$S_b(f) = S_{b'}(f) = d;$$

$$S_c(d) = S_{c'}(d) = e;$$

$$S_c(e) = S_{c'}(e) = d.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy az f egyenes az e egyenesbe megy át a következő mozgások közül mindegyiknél:

$$S_b S_{c'}, S_{b'} S_{c'}, S_b S_{c'}.$$



100. ábra.

Ezek közül mindegyik a síknak egy-egy forgása rendre az A, B, C pontok körül; például $S_b S_{c'}$ -nél a b és c egyenesek közös A pontja fixpont, s így a 132. tétel szerint $S_b S_{c'}$ egy forgás az A pont körül. Ebből következik, hogy az A pontnak az e és az f egyenestől való távolsága egymással egyenlő, vagyis, hogy A rajta fekszik az e, f egyenesek egyik középvonalán. Hasonlóan adódik, hogy B és C is rajta vannak az e, f egyenesek valamelyik középvonalán. Mivel feltevésünk szerint az A, B, C pontok nem fekszenek egy egyenesen, az e és f egyenesnek két különböző középvonala van, tehát a 137. tétel szerint e és f metszik egymást, s az általuk alkotott szögek két szögfelezője az e és f egyenesek két középvonala. Az AB és az AC egyenesnek az e -vel, illetve az f -fel való metszéspontja C' , illetve B' nem közös pontja e -nek és f -nek; ellenkező esetben ugyanis, mint könnyen belátható, az ABC háromszög derékszögű volna; ebből adódik, hogy B és C az e, f egyeneseknek ugyanazon a középvonalán fekszenek, de A a másik középvonalnak pontja. Az e és f egyenesek közös A' pontja egybeesik az ABC háromszög a' magassági vonalának a talppontjával, mivel az e, f egyenesek által alkotott szögek két szögfelezője: AA' és BC merőlegesek egymásra (101. tétel). Az A', B', C' pontok nem fekszenek egy egyenesen; az $A'B'C'$ háromszög belső és külső szögfelezői az a, a', b, b', c, c' egyenesek. Ezek közül egy-egy sereghez tartozik (mivel az ABC háromszög egy-egy csúcsán megy át) a következő három-

három egyenes: a', b, c ; a, b', c ; a, b, c' ; ebből a 143. tétel szerint következik, hogy ugyancsak egy sereghez tartoznak az a', b', c' egyenesek.

Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor a 110. tétel folytán a magassági vonalak A', B', C' talppontjai rendre a BC, CA, AB oldalakon vannak. Ebben az esetben az a', b', c' egyenesek az $A'B'C'$ háromszög belső szögfelezői; ezek a 143. tétel szerint egy ponton mennek át, mely az $A'B'C'$ háromszögnek s így az ABC háromszögnek is a belsejében fekszik. — Ha az ABC háromszögnek B -nél fekvő szöge tompaszög, akkor b' az $A'B'C'$ háromszögnek belső szögfelezője, a' és c' külső szögfelezői; a 143. tétel szerint a', b', c' egy sereghez tartoznak.

145. tétel. Az ABC háromszög egyik oldalának középperőlegese a másik két oldal középpontját összekötő egyenesre merőleges.

Bizonyítás (101. ábra). Jelöljük az AB, BC, CA oldalak középpontját rendre C', A', B' -vel; az $A'B'$ egyenesre merőlegest bocsátunk rendre az A, B, C pontokból; ezeknek talppontját jelöljük D, E, F -fel. Az ADB' és CFB' derékszögű háromszögek egybevágók, mivel $\angle DB'A = \angle FB'C$ (csúcsszögek), és $AB' = CB'$; ebből következik, hogy $AD = CF$. Hasonlóan adódik a CFA' és a BEA' derékszögű háromszögek egybevágósága, s ebből $CF = BE$; eszerint $AD = BE$. — A DE szakasz G középpontján át a DE egyenesre merőlegest emelünk; a síknak erre az egyenesre vonatkozó

tükrözésénél D és E egymásnak felelnek meg; a DE -re merőleges DA egyenes átmegy ennél a tükrözésnél az EB egyenesbe (93. tétel). Mivel $DA = EB$, tehát ennél a tükrözésnél A és B egymásnak felelnek meg, s ezért az AB szakasz C' középpontja önmagának felel meg. Eszerint a G ponton át a DE -re merőlegesen fektetett egyenes átmegy a C' ponton, a GC' egyenes az AB és az $A'B'$ egyenesek közös merőlegese.

24. §. Körök és szabályos sokszögek.

Értelmezés. Az α síkban az O középponttal bíró és az A ponton áthaladó k kör a síknak azokból a P pontjaiból áll, melyekre $OP = OA$. Az α síkot a kör síkjának nevezzük. A kör

síkjának valamely Q pontja értelmezés szerint a kör belsejéhez, vagy a kör külsejéhez tartozik, aszerint, hogy $OQ < OA$, vagy $OQ > OA$.

Az O pontból kiinduló és a kör síkjában fekvő tetszőleges félsugárnak a k körrel egy és csak egy P közös pontja van (III. 2); az OP szakasz pontjai a kör belsejéhez, az $\overline{OP}$ félsugárnak az OP szakaszon kívül fekvő pontjai a kör külsejéhez tartoznak. Bármely két a kör belsejében fekvő pontot összekötő szakasz pontjai a kör belsejéhez tartoznak (lásd a 115. tételt vagy az azt követő Megjegyzést).

Értelmezés. Ha A a k kör tetszőleges pontja és O a k kör középpontja, akkor az OA szakaszt a kör sugarának nevezzük. Ha A és A' a k kör két tetszőleges pontja, az AA' szakaszt a kör húrjának nevezzük; a 115. tételből következik, hogy a húr pontjai a kör belsejéhez tartoznak. Olyan húr, mely átmegy a kör középpontján, a kör átmérőjének nevezzük. A kör átmérője a kör sugarának kétszerese; a 113. tétel folytán a k kör bármely húrja kisebb a kör átmérőjénél, vagy azzal egyenlő; utóbbi esetben az illető húr a körnek egy átmérője.

A kör középpontjából a kör húrára bocsátott merőleges felezi a húr. Jelöljük a kör középpontját O -val, az AA' húrnak az O pontból húzott merőlegessel közös pontját C -vel; az $OA = OA'$ és $OC = OC$ egyenlőségekből következik, hogy az OCA és az OCA' derékszögű háromszögek egybevágók (122. tétel); innen $AC = A'C$.

Ha a k kör síkjában fekvő a egyenesnek van a k körrel egy A közös pontja, akkor vagy van a -nak k -val még egy (és csak egy) A' közös pontja, vagy pedig a merőleges az OA sugárra. Jelöljük ugyanis b -vel a k kör O középpontjából az a -ra bocsátott merőlegest. Az A pontnak a b egyenesre vonatkozó A' tükrösképe szintén közös pontja a -nak és k -nak; ugyanis az A' pont az a egyenesen fekszik, mivel a merőleges a b egyenesre; továbbá, a tükrözés értelmezése szerint $OA = OA'$. Ha A nem tartozik a b egyeneshez, akkor tehát A és A' az a egyenesnek a k körrel való két közös pontja; az AA' húr pontjai a k kör belsejéhez tartoznak, mint fent megjegyeztük; az AA' egyenesnek az AA' szakaszon kívül fekvő pontjai a k kör külsejéhez tartoznak (a 115. tétel folytán).

Értelmezés. Ha az a egyenesnek a k körrel egy és csak

egy A közös pontja van, akkor az a egyenest a *kör érintőjének*, az A pontot *érintési pontnak* nevezzük.

Mint előbb megjegyeztük, az *a érintő merőleges az érintési pontot a kör O középpontjával összekötő egyenesre*. Megfordítva: a kör bármely A pontján áthaladó egyenes, mely merőleges az OA egyenesre, a körnek érintője (I. 115. tételt); tehát a körnek minden pontjában van érintője. — Ugyancsak a 115. tételből következik, hogy a kör érintőjének összes pontjai, az A érintési pont kivételével, a kör külsejében fekszenek. A kör összes pontjai, az A pontot kivéve, az érintőnek ugyanazon az oldalán fekszenek, mint a kör középpontja.

Ha a k kör A és A' pontjaihoz tartozó érintőinek van egy P közös pontja, akkor a PA és a PA' szakaszok egyenlők és az OP egyenes merőleges az AA' húrra. A 122. tétel szerint ugyanis az OAP és az $OA'P$ derékszögű háromszögek egybevágók, mivel $OP=OP$ és $OA=OA'$; tehát $AA'P$ egyenlőszárú háromszög és OP ennek szögfelezője; a 107. tétel szerint tehát OP merőleges AA' -re. Ebből következik, hogy a kör külsejében fekvő bármely P ponton a k körnek legfeljebb két érintője megy át; ha a P ponton átmegy a k körnek egy érintője, akkor ennek az OP egyenesre vonatkozó tükörképe is érintője a körnek; eszerint bármely a kör külsejében fekvő ponton át a körnek vagy két érintője halad, vagy egy sem.

Ha P a k kör külsejében fekvő pont, melyen a k körnek két érintője megy át, jelöljük ezeknek érintési pontjait A -val és A' -vel; az $\sphericalangle APA'$ szög belsejében fekvő bármely félsugárnak van az AA' húrral közös pontja (37. tétel), tehát van a k kör belsejében fekvő pontja. Az $\sphericalangle APA'$ szög külsejében fekvő félsugaraknak nincs sem a k kör belsejében, sem a k körön pontjuk. Eszerint a P ponthoz tartozó sugársorban a kör két érintője elválasztja azokat az egyeneseket, melyek a k kör belsején áthaladnak, azoktól, melyeknek nincs a körrel vagy annak belsejével közös pontja.

Mint fent megállapítottuk, a P ponton áthaladó PA és PA' érintőknek a P pont és az A , illetve A' érintési pontok által meghatározott szakaszai egymással egyenlők: $PA=PA'$; eszerint A és A' egy olyan k' körön fekszenek, melynek P a középpontja; ennek a k' körnek érintői az eredeti k kör OA és OA' sugarain átfektetett egyenesek.

Megjegyzés. Eddig felvett axiómáinkból *nem* vezethetők le a következő állítások: bármely két a kör külsejében fekvő pont

összeköthető a kör külsejében fekvő törtvonallal; minden szakasznak, melynek egyik végpontja a kör belsejében, a másik a kör külsejében fekszik, van a körrel közös pontja.

A következő néhány megjegyzésben feltesszük a III. 1–5 axiómákon kívül a következő axiómát:

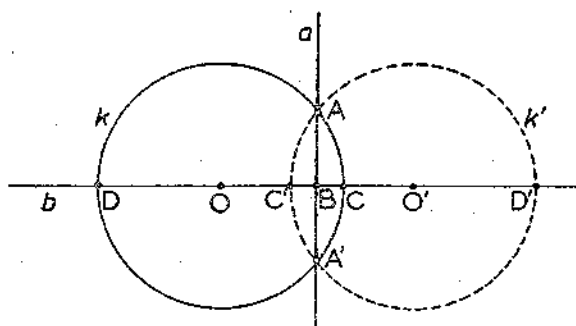
III. k. Ha k és k' az α síkban fekvő körök, s ha a k' körnek van a k kör belsejében és külsejében legalább egy-egy pontja, akkor k -nak és k' -nek van legalább egy közös pontja.

Jelöljük a k és a k' kör középpontját rendre O -val és O' -vel; a két kör közös pontját A -val. Az A pontnak az OO' egyenesre vonatkozó A' tükörképe szintén közös pontja k -nak és k' -nek, s ezenkívül a két körnek nincs más közös pontja (I. III. 4 axióma).

A III. k axiómából adódik a következő tétel:

Ha az a egyenes a k kör síkjában fekszik, s ha a -nak van k belsejében pontja, akkor van az a egyenesnek a k körrel két közös pontja.

Bizonyítás. A k kör O középpontján át az a egyenesre merőleges b egyenest bocsátunk, ennek a -val közös pontját B -vel, a k körrel közös pontjait C -vel és D -vel jelöljük; feltevésünk folytán a B pont a k kör belsejében fekszik (115. tétel); tegyük fel, hogy



102. ábra.

a B, C, D és O pontok elrendezése $DOBC$ (102. ábra). Az O, C, D pontoknak az a egyenesre vonatkozó tükörképeit jelöljük O', C', D' -vel; ezek a pontok a b egyenesen fekszenek, s elrendezésük $D'O'BC'$. Mivel $BC' = BC < OC = OD < BD = BD'$, következik, hogy a C, D, C', D' pontok elrendezése $DC'CD'$, s ezért a C' pont a k kör belsejében, D' pedig k külsejében fekszik. Az O' pont körül $O'C' = O'D'$ sugárral felvett k' körnek a III. k

axioma szerint van a k körrel legalább egy A közös pontja; mivel $OA = O'A$, tehát az A pont az O, O' pontpár középvonalán, vagyis az a egyenesen fekszik. Az A pontnak a b egyenesre vonatkozó A' tükörképe szintén közös pontja k -nak, k' -nek és az a egyenesnek. Eszerint az a egyenesnek a k körrel két közös pontja van.

A III. k axioma aequivalens a következővel:

Ha három megadott szakasz közül mindegyik kisebb a másik kettő összegénél, akkor van olyan háromszög, melynek oldalai rendre a három adott szakasszal egyenlők.

Megjegyzés. A III. k axioma alapján a szokásos módon elvégezhetők a következő szerkesztések: *szakasz felezése, szög felezése*, adott egyenesre adott ponton át *merőleges szerkesztése*. Az AB szakasz középpontjának meghatározására az A középpont körül AB sugárral és a B középpont körül BA sugárral kört veszünk fel; a két kör két közös pontját összekötő egyenes átmegy az AB szakasz C középpontján és merőleges AB -re; ez az egyenes tehát az A, B pontok középvonala. — Az a egyenes megadott C pontján át a -ra merőlegest úgy szerkesztünk, hogy az a egyenesre a C ponttól mindkét oldalon rámérünk egymással egyenlő CA és CB szakaszokat, s ezután a fenti eljárással meghatározzuk az A, B pontok középvonalát. — Az a egyenesre a rajta kívül fekvő P pontból merőlegest úgy szerkesztünk, hogy a P középpont körül az a egyenes valamely A pontján át kört veszünk fel; ha ennek a -val nincs más közös pontja, akkor PA merőleges a -ra; ha van még egy közös pontjuk: A' , akkor az A, A' pontok középvonalát a fenti eljárással meghatározzuk; ez átmegy a P ponton és merőleges a -ra. — Az $\sphericalangle(a, b)$ szögfelezőjét úgy határozzuk meg, hogy a szög csúcsától a szög száraira egyenlő szakaszokat mérünk rá; ezeknek végpontjai legyenek A és B ; az A, B pontok középvonala az adott szög felezője. — Hangsúlyozzuk, hogy mindezeket a feladatokat a III. k axioma felhasználása nélkül más módon már megoldottuk (82., 92. tétel és 96. tétel bizonyítása).

Megjegyzés. További tárgyalásainkban általában mellőzni fogjuk a III. k axiómát; minden esetben, midőn felhasználjuk, ezt külön meg fogjuk említeni.

Értelmezés. Az $A_1 A_2 \dots A_n$ egyszerű sokszöget *szabályos sokszögnek* nevezzük, ha fennáll az $A_1 A_2 \dots A_n \equiv A_2 A_3 \dots A_n A_1$ egybevágóság; ebből következik, hogy minden i indexre $A_1 A_2 \dots A_n \equiv A_i A_{i+1} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1}$.

Az értelmezésből következik, hogy egy szabályos sokszög összes oldalai egymással egyenlők: $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$. — Továbbá az $A_nA_1A_2 \equiv A_1A_2A_3 \equiv \dots \equiv A_{n-1}A_nA_1$ egybevágóságból adódik a következő szögek egyenlősége: $\sphericalangle A_nA_1A_2 = \sphericalangle A_1A_2A_3 = \dots = \sphericalangle A_{n-1}A_nA_1$.

Minden szabályos sokszög konvex. Az $A_1A_2 \dots A_n$ szabályos sokszögnek legalább egyik csúcsa, mondjuk A_1 , a sokszög konvex burkolójának is csúcsa; a síknak önmagára való ama kongruens leképezésénél, mely az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontoknak rendre az $A_1, A_{i+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{i-1}$ pontokat felelteti meg, a szabályos sokszög konvex burkolója önmagába megy át (ugyanis egy konvex sokszögnek a képe a sík kongruens leképezésénél konvex sokszög, a 88. tétel folytán); ebből következik, hogy a szabályos sokszög minden A_i csúcsa a konvex burkolónak is csúcsa, s így a 32. tétel folytán a szabályos sokszög azonos a konvex burkolójával.

Értelmezés. Ha az $A_1A_2 \dots A_n$ egyszerű sokszög A_i csúcsa konvex, akkor a sokszögnek az A_i csúcsnál fekvő szögén értjük az $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ szöget. (A_0 és A_{n+1} -en rendre A_n és A_1 értendő.)

A fentiek szerint egy szabályos sokszög minden csúcsa konvex; az $A_1A_2 \dots A_n$ szabályos sokszög szögein értjük az $\sphericalangle A_nA_1A_2, \sphericalangle A_1A_2A_3, \dots, \sphericalangle A_{n-1}A_nA_1$ szögeket.

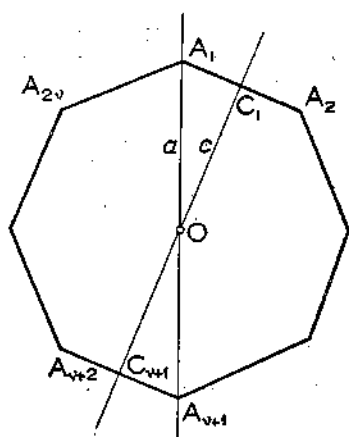
Értelmezés. Egy sokszög *szimmetriavonalán* olyan egyenest értünk, amelyre vonatkozó tükrözése a sokszög síkjának a sokszög csúcsait egymásnak felelteti meg. A 88. tétel folytán a sokszög minden oldalának ennél a tükrözésnél a sokszög valamely oldala felel meg.

Ha az a egyenes egy π egyszerű sokszögnek szimmetriavonala, akkor a sokszög síkjában az a egyenes mindegyik oldalán van π -nek legalább egy-egy pontja; ebből a 12. tétel szerint következik, hogy π -nek az a szimmetriavonallal legalább két közös pontja van. Ha A és B a π egyszerű sokszögnek két olyan az a szimmetriavonalon fekvő pontja, hogy a π sokszög egyik az A és B pontokat összekötő törtvonalának nincs végpontjain kívül a -val közös pontja, akkor ez a törtvonal s ennek a -ra vonatkozó tükrképe egy egyszerű sokszöget alkotnak; ez szükségképen azonos π -vel. Eszerint egy egyszerű sokszögnek bármely szimmetriavonallal pontosan két közös pontja van.

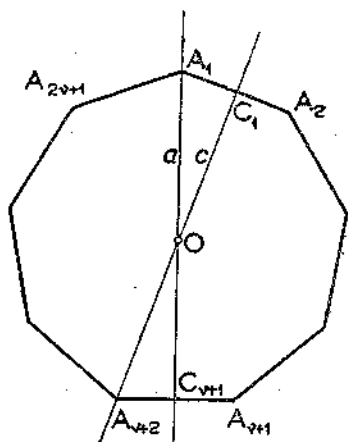
Ha a π egyszerű sokszögnek A pontja a sokszög a szimmetriavonalán fekszik, akkor A vagy csúcsa a π sokszögnek és a sok-

szögnek A -hoz tartozó oldalai egymás tükörképei a -ra vonatkozóan, vagy pedig A a sokszög valamely oldalának középpontja, s ez az oldal merőleges az a szimmetriavonalra, vagyis a az illető oldal középmerőlegese.

Egy szabályos sokszög szimmetriavonalai a sokszög szögeinek felezői, és a sokszög oldalainak középmerőlegesei. Ha a sokszög oldalainak száma páros: $n=2\nu$, akkor a szimmetriavonalak az $A_1A_{\nu+1}, A_2A_{\nu+2}, \dots$ egyenesek, továbbá az A_1A_2 oldal C_1 középpontját az $A_{\nu+1}A_{\nu+2}$ oldal $C_{\nu+1}$ középpontjával összekötő egyenes, stb. Ha az oldalszám páratlan: $n=2\nu+1$, akkor a sokszög szimmetriavonalai az $A_1C_{\nu+1}, A_2C_{\nu+2}, \dots$ egyenesek. Mindkét esetben a sokszögnek n szimmetriavonala van (103. és 104. ábra).



103. ábra.



104. ábra.

Jelöljük a -val az A_1 csúcson, és c -vel az A_1A_2 oldal C_1 középpontján áthaladó szimmetriavonalat; a síknak ezekre vonatkozó tükrözését rendre S_a -val és S_c -vel. Az S_aS_c szorzat a síknak olyan mozgása, melynél a sokszög A_i csúcsának az A_{i+1} csúcs felel meg; ugyanis az S_a tükrözésnél a csúcsok $(1, 2, 3, \dots, n)$ indexeinek rendre az $(1, n, n-1, \dots, 2)$ indexek, S_c -nél a $(2, 1, n, n-1, \dots, 3)$ indexek felelnek meg; ebből következik, hogy az S_aS_c leképezésnél az A_i csúcsnak az A_{i+1} csúcs felel meg. Az a és c szimmetriavonalaknak van egy O közös pontja; ez a $T=S_aS_c$ leképezésnek fixpontja; a 132. tételből következik, hogy T a síknak egy forgása

az O pont körül. Jelöljük a k tényezőből álló $TT \dots T$ szorzatot T^k -val. A $T, T^2, \dots, T^{n-1}$ leképezések a síknak az O pont körül való forgásai, melyeknél az A_1 pont rendre az $A_2, A_3, \dots, A_n$ pontba megy át; tehát az $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ szakaszok egymással egyenlők. Az O pontot a szabályos sokszög középpontjának nevezzük.

Ha a' jelenti az A_i csúcson, és c' az $A_i A_{i+1}$ oldal C_i középpontján áthaladó szimmetriavonalat, ugyanúgy adódik, hogy az $S_a, S_{a'} = T'$ leképezés a síknak egy forgása az a' és c' egyenesek közös O' pontja körül, s hogy ennél az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontoknak rendre az $A_2, A_3, \dots, A_1$ pontok felelnek meg; a 131. tétel szerint a T' leképezés azonos T -vel, s ezért az O' pont egybeesik O -val. Ebből következik, hogy a szabályos sokszög valamennyi szimmetriavonala egy ponton: a szabályos sokszög középpontján megy át.

Az O középpont körül való forgásoknál, melyek a szabályos sokszög csúcsait egymásba viszik át, az oldalak $C_1, C_2, \dots, C_n$ középpontjai egymásba mennek át; ebből következik, hogy az $OC_1, OC_2, \dots, OC_n$ szakaszok egymással egyenlők. Az előbbieket szerint az OC_i szakasz merőleges az $A_i A_{i+1}$ oldalra. Az O középponttal bíró és a C_i pontokon áthaladó körnek tehát érintői az adott szabályos sokszög oldalai; az O középponttal bíró és az A_i pontokon áthaladó körnek pedig húrjai a sokszög oldalai.

Ha egy n -oldalú szabályos sokszög O középpontjától mindegyik szimmetriavonalára mindkét irányban egyenlő szakaszokat mérünk fel, ezeknek O -tól különböző végpontjai egy $2n$ -oldalú szabályos sokszögnek a csúcsai.

Az I. 1–3, II. 1–4 és III. 1–5 axiómákból következik szabályos négyszög létezése. Két egymásra merőleges egyenesre közös O pontjuktól mindkét irányban egyenlő szakaszokat mérünk fel; ezeknek O -tól különböző végpontjai egy szabályos négyszögnek a csúcsai. A nevezett axiómákból és a III. k axiómából következik szabályos háromszög létezése.

A háromszögek egybevágóságára vonatkozó 104. és a szögek egyenlőségére vonatkozó 124. tétel (110. o.) (vagy utóbbi helyett a 98. és 103. tételek alkalmazásával) könnyen adódik a következő tétel:

Ha egy szabályos sokszög egy oldala egy másik szabályos sokszög egy oldalával, s az egyiknek egy szöge a másiknak egy szögével egyenlő, akkor a két szabályos sokszög egybevágó; azaz létezik a síknak olyan kongruens leképezése, mely az egyik sokszög csúcsait a másik sokszög csúcsaiba viszi át.

Értelmezés. Ha az azonosságtól különböző T leképezésnek n -edik hatványa, vagyis az n tényezőből álló $TT \dots T = T^n$ szorzat, az azonosság, akkor a T leképezést *periodikus leképezésnek* nevezzük. Azt a legkisebb n pozitív egész számot, melyre $T^n = 1$, a leképezés *periodusának* nevezzük. (T első hatványa a T leképezés; T 0-adik hatványán értjük az azonosságot; T^{-n} -en T^{-1} -nek, vagyis T inverzének n -edik hatványát.)

Ha egy egyenesnek valamely önmagára való kongruens leképezése periodikus, akkor ez az egyenesnek egy tükrözése; a periodus tehát $n=2$ (involutorius leképezés). Ugyanis, a 79. tétel szerint, az egyenesnek bármely önmagára való kongruens leképezése egy eltolás, vagy egy tükrözés. Az egyenes önmagában való eltolása azonban nem lehet periodikus, mivel bármely A_1 pontnak az eltolás hatványainál származó $A_1, A_2, \dots, A_n$ képpontjaira fennáll az $A_1 A_2 \dots A_n$ lineáris elrendezés, s ezért A_n különböző A_1 -től, ha $n > 1$.

A síknak azok a kongruens leképezései, melyek egy szabályos sokszög csúcsait egymásba viszik át, periodikusak.

Ha T a síknak önmagára való kongruens leképezése, s ha T valamely hatványának van olyan fixpontja, mely T -nek nem fixpontja, akkor T periodikus. Legyen ugyanis A olyan pont, mely T^n -nek fixpontja, de T -nek nem fixpontja; jelentse n a legkisebb olyan pozitív egész számot, melyre $T^n(A) = A$. Az $A_1 = A$, $A_2 = T(A)$, $\dots$, $A_n = T^{n-1}(A)$ pontok egymástól különbözők, s valamennyien fixpontok a T^n leképezésnél. Ha $n=2$, akkor a sík irányítását megtartó T^2 kongruens leképezésnek két fixpontja A_1 és A_2 , s ezért $T^2 = 1$ (131. tétel). Ha $n > 2$, akkor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok nem fekehetnek egy egyenesen, mert különben ez az egyenes önmagába menne át egy $n > 2$ periodusú leképezéssel. Eszerint a síknak önmagára való T^n leképezésénél legalább három nem egy egyenesen fekvő fixpont van, s így $T^n = 1$ (l. a 89. tételt, vagy ennek a 124. oldalon felsorolt következményeit).

Ha a síknak egy mozgása periodikus, akkor ez a síknak egy forgása valamely O pontja körül.

Ha a T mozgás periodusa $n=2$, állításunk a 133. tételből következik; tegyük fel, hogy $n > 2$. Jelöljük valamely A_1 pontnak, mely nem fixpont, a T hatványainál származó képeit $A_1, A_2, \dots, A_n$ -nel. Ezeknek a pontoknak a konvex burkolója a 88. tétel folytán T minden hatványánál önmagába megy át; ebből következik, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok valamennyien csúcsai π -nek, s hogy π egy szabályos sokszög. Ennek középpontja, O , a T mozgásnak

fixpontja, a szabályos sokszögekre vonatkozó fenti eredményeink szerint, s így T a síknak egy forgása az O pont körül (132. tétel).

Ha a síknak önmagára való, az irányítást megfordító T kongruens leképezése periodikus, akkor T a sík tükrözése valamely tengelyre vonatkozóan. Ugyanis T^2 a síknak egy periodikus mozgása, ennek előbbi eredményünk szerint van egy O fixpontja; legyen $O' = T(O)$. Az OO' szakasz C középpontja T -nek fixpontja, s így a 132. tétel szerint T a síknak egy tükrözése.

Értelmezés. Jelöljük T -vel a síknak egy az O pont körül való n -periodusú forgását ($n \geq 4$); legyen a_1 egy az O pontból kiinduló félsugár, és a_{k+1} ennek a T k -adik hatványánál származó képe: $a_{k+1} = T^k(a_1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n$ félsugaraknak az O pont körül való ciklikus elrendezése $(a_1 a_2 \dots a_n)$, akkor a T forgást n -periodusú *primitív forgás*nak nevezzük. Ha a periodus $n=2$, vagy 3, akkor a T forgást minden egyéb feltétel nélkül primitív forgásnak nevezzük.

Ha a T forgás periodusa $n=4$, akkor, mint könnyen belátható, az $\sphericalangle(a_i, a_{i+1})$ szögek derékszögek, s az a_i félsugarak ciklikus elrendezése $(a_1 a_3 a_2 a_4)$, tehát egy 4-periodusú forgás szükségképen primitív.

Meg fogjuk mutatni, hogy egy n -periodusú primitív forgás szögének a nagyságát az n periodus egyértelműen meghatározza, vagyis bármely két n -periodusú primitív forgásnak a forgásszögei egymással egyenlők. Nyilvánvaló ez az $n=2$ és 4 periodusok esetében, mivel a forgásszög ekkor egyenesszög, illetve derékszög. Az általános esetre vonatkozik a következő tétel:

Ha T_1 és T_2 a síknak két olyan az O pont körül való primitív periodikus forgása, melyek közül T_1 forgásszöge nagyobb T_2 forgásszögénél, akkor T_1 periodusa kisebb T_2 periodusánál.

Jelöljünk $a_1 = b_1$ -gyel egy az O pontból kiinduló félsugarat; legyen $a_{k+1} = T_1^k(a_1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) és $b_{\nu+1} = T_2^\nu(b_1)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, m-1$); n és m jelenti T_1 és T_2 periodusát. Feltehetjük, hogy $n > 2$; továbbá, hogy a_1 -nek ugyanazon az oldalán vannak a_2 és b_2 , mert ellenkező esetben T_2 helyett ennek inverzét tekintenők. Mivel feltettük, hogy $\sphericalangle(a_1, a_2) > \sphericalangle(b_1, b_2)$, tehát a b_2 félsugár az $\sphericalangle(a_1, a_2)$ szög belsejében fekszik. Ha ν jelenti azt a legnagyobb indexet ($\nu < m$), melyre b_ν az $\sphericalangle(a_1, a_2)$ szög belsejéhez tartozik (vagy a_2 -vel egybeesik), akkor $b_{\nu+1}$ az $\sphericalangle(a_2, a_3)$ szög belsejéhez tartozik. Jelöljük ugyanis c -vel azt az $\sphericalangle(a_2, a_3)$ szög belsejében haladó, az O pontból kiinduló félsugarat, melyre $\sphericalangle(a_2, c) = \sphericalangle(a_1, b_\nu)$.

Az $\sphericalangle(a_1, b_\nu) = \sphericalangle(c, a_2)$ és $\sphericalangle(b_\nu, a_2) = \sphericalangle(a_2, b_\nu)$ egyenlőségekből következik, tekintettel az $(a_1 b_\nu a_2 c a_3)$ ciklikus elrendezésre, hogy $\sphericalangle(a_1, a_2) = \sphericalangle(b_\nu, c)$ (124. tétel). Mivel feltevésünk folytán az $(a_1 b_\nu b_{\nu+1})$ és az $(a_1 b_\nu c)$ ciklikus irányítások megegyezők, tehát a $\sphericalangle(b_\nu, b_{\nu+1}) < \sphericalangle(b_\nu, c) = \sphericalangle(a_1, a_2)$ vonatkozásból következik, hogy a $b_{\nu+1}$ félsugár a $\sphericalangle(b_\nu, c)$ szög belsejéhez tartozik. De a ν index megválasztása miatt $b_{\nu+1}$ nem tartozhatik a $\sphericalangle(b_\nu, a_2)$ szög belsejéhez, sem a_2 -vel nem eshetik egybe, s így $b_{\nu+1}$ az $\sphericalangle(a_2, c)$ szögnek, tehát az $\sphericalangle(a_2, a_3)$ szögnek is a belsejéhez tartozik. Hasonló megfontolást alkalmazva adódik sorban, hogy az $\sphericalangle(a_k, a_{k+1})$ szögek közül mindegyiknek a belsejében van legalább egy-egy b_{ν_k} félsugár. Mivel pedig T_1 egy primitív forgás, az $a_1, a_2, \dots, a_n$ félsugarak ciklikus elrendezése $(a_1 a_2 \dots a_n)$, ezért az $\sphericalangle(a_k, a_{k+1})$ szögek közül kettő-kettő belsejének nincs közös pontja; tehát a $b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, \dots, b_{\nu_n}$ félsugarak egymástól és b_1 -től különböznek. Ebből következik, hogy a b_ν félsugarak száma $m > n$.

Ha T_1 és T_2 két olyan forgás, melynek fixpontjai az egymástól különböző O és O' pontok, akkor jelöljük S -sel a síknak az $O'O$ szakasszal való eltolását; az $S^{-1}T_2S$ mozgásnak fixpontja az O pont, ez tehát egy forgás az O pont körül; ennek forgásszöge egyenlő T_2 forgásszögével. Ha T_2 m -periodusú forgás, akkor $S^{-1}T_2S$ is m -periodusú, ugyanis minden k kitevőre fennáll:

$$(S^{-1}T_2S)^k = S^{-1}T_2SS^{-1}T_2S \dots S^{-1}T_2S = S^{-1}T_2^kS.$$

Ebből az előbbi eredmény alapján következik, hogy ha T_1 és T_2 a síknak két tetszőleges primitív periodikus forgása, melyeknek periodusai egyenlők, akkor forgásszögeik is egyenlők.

A síknak az O pont körül való bármely n -periodusú forgása az O pont körül való n -periodusú primitív forgásnak valamely hatványa. Viszont ha egy n -periodusú forgás nem primitív, van ennek egy olyan hatványa, mely primitív forgás. (Ezek a közvetlenül is belátható állítások a sík véges mozgáscsoportjaira vonatkozó lenti tételnek speciális esetei.)

Értelmezés. Az O középponttal bíró $A_1A_2 \dots A_n$ szabályos sokszög középponti szögén értjük az $\sphericalangle A_1OA_2$ szöget.

A fent bebizonyítottakból következik, hogy egy szabályos sokszög középponti szögének nagyságát a sokszög n oldalszáma egyértelműen meghatározza; vagyis hogy két olyan szabályos sokszögnek, melyeknek oldalszáma egyenlő, középponti szögük is egyenlő.

Ha két szabályos sokszög oldalszáma egyenlő, s egy-egy oldaluk egyenlő, akkor a két szabályos sokszög egybevágó. Legyen $A_1 A_2 \dots A_n$ és $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ a két adott szabályos sokszög; tegyük fel, hogy ezek egy síkban fekszenek, hogy középpontjuk közös, jelöljük ezt O -val, s hogy az A_1 és A'_1 csúcsok egy az O pontból kiinduló félsugáron fekszenek; mindezt az egyik sokszög síkjának a másik sokszög síkjára való alkalmas kongruens leképezésével elérhetjük. Mivel a két szabályos sokszög oldalszáma feltevésünk szerint egyenlő, középponti szögeik egyenlők, eszerint az $\vec{OA}_2$ félsugáron fekszik az $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ sokszögnek valamely az A'_1 -vel szomszédos csúcsa; ezt jelöljük A'_2 -vel. Az $A_1 A_2$ és az $A'_1 A'_2$ oldalak középpontját jelöljük C_1 -gyel és C'_1 -vel. A 107. tétel szerint az $A_1 C_1 O$ és az $A'_1 C'_1 O$ háromszögek derékszögűek, s mivel ezeknek O -nál fekvő szögei egyenlők, s feltevésünk folytán az ezzel szemben fekvő $A_1 C_1$ és $A'_1 C'_1$ befogók is egyenlők, ezért a két derékszögű háromszög egybevágó (122. tétel). Ebből következik, hogy az A_1 pont egybeesik az A'_1 ponttal, s ugyanúgy minden i indexre, A_i egybeesik A'_i -vel.

Értelmezés. Olyan csoportot, melynek véges sok eleme van, *véges csoportnak* nevezünk; a csoportban foglalt elemek számát a *csoport rendjének* (vagy *rendszámának*) nevezzük. — *Ciklikus csoporton* olyan véges csoportot értünk, melynek összes elemei a csoport egy elemének a hatványai.

Például, az *egyenes önmagára való kongruens leképezéseinek bármely véges csoportja másodrendű ciklikus csoport*, mely az egyenes valamely tükrözéséből, s ennek négyzetéből, vagyis az azonosságból áll; ez közvetlenül következik az egyenes periodikus leképezéseire vonatkozó fenti megjegyzésünkből (150. o.).

A sík mozgásainak bármely véges csoportja egy O pont körül való primitív forgás hatványaiból álló ciklikus csoport.

Legyen ugyanis A_1 a síknak olyan pontja, mely nem fixpont az adott G csoportnak az azonosságtól különböző egyik mozgásánál sem. Az A_1 pontnak a csoport mozgásainál származó $A_1, A_2, \dots, A_n$ képei valamennyien különbözők; ezek a csoport bármely mozgásánál egymásba mennek át. Ha $n=2$, akkor a csoport az $A_1 A_2$ szakasz középpontja körül való félforgásból és az azonosságból áll. Ha $n>2$, akkor az A_1 pontok nem fekdhetnek valamennyien egy egyenesen, mert különben ez az egyenes a csoport minden mozgásánál önmagába menne át, s az egyenesnek ezek a

leképezései együtt egy n -edrendű ($n > 2$) csoportot alkotnának, ami ellenmondás. Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok π konvex burkolója a 88. tétel folytán az adott csoport minden mozgásánál önmagába megy át; mivel π csúcsai egymásba mennek át, s minden A_i pont átmegy minden A_j pontba, tehát mert az A_i pontok közül legalább egy a π sokszögnek csúcsa, következik, hogy az összes A_i pontok csúcsai π -nek. Ebből következik, hogy a π sokszög szabályos; ennek önmagába való mozgásai fenti eredményeink szerint csak a sokszög O középpontja körül való forgások, melyek a sokszög csúcsait felcserélik. — Ha T -vel jelöljük a csoportnak azt a mozgását, mely a π sokszög A_1 csúcsát az A_1 -gyel szomszédos egyik A_i csúcsba viszi át, akkor egyrészt T egy n -periodusú primitív forgás az O pont körül, másrészt T hatványai megadják a π sokszög összes önmagába való mozgásait, s ezért az adott G csoportnak összes elemeit. Ez a fenti tétel állítása.

Mivel a síknak minden olyan periodikus kongruens leképezése, mely megfordítja a sík irányítását, a síknak egy tükrözése, a most bebizonyított tételből könnyen levezethetjük a következőt:

Ha a sík önmagára való kongruens leképezéseinek valamely véges csoportja tartalmaz a sík irányítását megfordító leképezést, akkor a csoport valamely O pont körül való primitív forgás hatványaiból s ezeknek egy olyan tükrözéssel való szorzatából áll, melynek tengelye áthalad az O ponton.

Ha a síknak valamely mozgása egy π egyszerű sokszöget önmagába visz át, akkor ez a mozgás a fentiek szerint a síknak egy periodikus forgása valamely O pont körül. Ennél a mozgásnál a π egyszerű sokszög belseje önmagának, s ugyanúgy a sokszög külseje önmagának felel meg. Eellenkező esetben ugyanis a sokszög belsejének bármely pontja a sokszög külsejének valamely pontjába menne át, s megfordítva; viszont ezt kizárja az a tény, hogy a sokszög konvex burkolójának külsejében fekvő pontok egymásba mennek át, a 88. tétel szerint.

Egy egyszerű sokszöget *középponti* (vagy *centrális*) *sokszögnek* nevezünk, ha van a síknak olyan forgása, valamely O pont körül, mely a sokszöget önmagába viszi át; az O pontot a *sokszög középpontjának* nevezzük.

Mivel a síknak azok a forgásai, melyek a π egyszerű sokszöget önmagába viszik át, véges csoportot alkotnak, fenti tételünkéből következik, hogy ezek valamennyien egy O pont körül való forgások. Eszerint egy sokszögnek *legfeljebb egy középpontja van*.

Be fogjuk bizonyítani, hogy *ha egy egyszerű sokszögnek van középpontja, akkor a középpont a sokszög belsejéhez tartozik.*

Jegyezzük meg először azt, hogy a sokszög O középpontja nem fekehetik a sokszögön. Ellenkező esetben ugyanis az O pont a sokszög valamely oldalának a középpontjával egybeesnék s a síknak az a forgása, mely a sokszöget önmagába viszi át, szükségképen az O pont körül való félforgás volna. Felveszünk egy az O ponton áthaladó és a sokszög illető oldalára merőleges vonal darabot, melynek középpontja O , s melynek nincs a sokszöggel más közös pontja; ennek végpontjai közül az egyik a sokszög belsejéhez, a másik a külsejéhez tartozik (24. tétel), s az O pont körül való félforgásnál egymásba mennek át. Ez ellentmond azonban a fenti megállapításunknak, mely szerint egy egyszerű sokszög belseje önmagába megy át a síknak minden olyan mozgásánál, mely a sokszöget önmagába viszi át.

Jelöljük π -vel az adott egyszerű sokszöget; legyen A_1 ennek olyan pontja, melynek O -tól való távolsága nem nagyobb mint π bármely más pontjának O -tól való távolsága. (Ilyen A_1 pont meghatározására, tekintsük a sokszög csúcsait, továbbá az O pontból a sokszög oldalvonalaira bocsátott merőlegesek talppontjai közül azokat, melyek a sokszög illető oldalához tartoznak; legyen ezek közül A_1 egyik olyan pont, melynek az O -tól való távolsága lehető legkisebb; l. még a 115. tételt.) Jelöljük T -vel azt az O pont körül való primitív forgást, mely a π sokszöget önmagába viszi át; ennek a periodusát jelöljük n -nel; legyenek A_1 -nek a T hatványainál származó képei $A_1, A_2, \dots, A_n$. A π sokszögnek minden pontja, az A_1 pontokat kivéve, az $A_1 A_2 \dots A_n$ szabályos sokszögnek külsejéhez tartozik (a 115. tétel folytán). A 31. tétel bebizonyításával megegyező módon látjuk be, hogy az A_i pontoknak a π sokszögön való ciklikus elrendezése $(A_1 A_2 \dots A_n)$. A π sokszögnek az A_1, A_2 pontok által meghatározott ama törtvónala, mely nem tartalmaz más A_i pontot, az OA_1 és OA_2 vonal darabokkal együtt egy b_1 egyszerű sokszöget alkot; ennek a külsejében fekszenek az $A_3, A_4, \dots, A_n$ pontok, mint a 27. tétel alkalmazásával könnyen belátható. A b_1 sokszögnek a T hatványainál származó $b_1, b_2, \dots, b_n$ képei közül kettő-kettő belsejének nincs közös pontja; mivel pedig a $b_1, b_2, \dots, b_n$ egyszerű sokszögek mod 2 összege a π sokszög, a 22. tétel bebizonyítása szerint következik ebből, hogy az OA_i szakaszok, s ezért az O pont is, a π egyszerű sokszögnek a belsejében fekszenek.

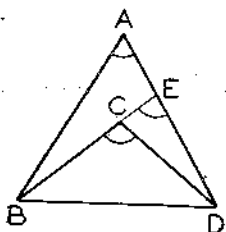
A négyszögekre vonatkozóan még néhány megjegyzést teszünk.

Értelmezés. Az $ABCD$ (egyszerű) négyszög AB és CD oldalait, s ugyancsak a BC és DA oldalait egymással szemben fekvőnek nevezzük. Szemben fekvő csúcsok A és C , s hasonlóan B és D . Ha a négyszög konvex, akkor a szemben fekvő csúcsoknál levő szögeket egymással szemben fekvő szögeknek nevezzük.

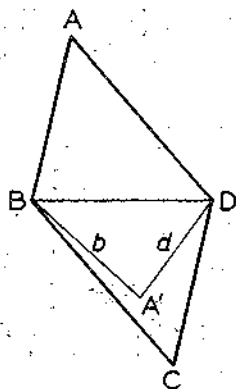
Egy négyszögnek legfeljebb egy konkáv csúcsa van (l. az értelmazést és azt követő megjegyzést a 37. oldalon). Ha az $ABCD$ négyszög C csúcsa konkáv, akkor a $\sphericalangle BCD$ szög (vagyis a $\vec{CB}$ és a $\vec{CD}$ félsugarak által bezárt szög) nagyobb a $\sphericalangle BAD$ szögnél. Ugyanis a C csúcs az ABD háromszögnek (a négyszög konvex burkolójának) belsejében fekszik; a $\vec{BC}$ félsugárnak van tehát az AD oldallal egy E közös pontja (105. ábra); a CDE háromszögnek külső szöge $\sphericalangle BCD$ nagyobb a $\sphericalangle CED$ belső szögnél, ez pedig mint az ABE háromszög külső szöge nagyobb, a $\sphericalangle BAD$ belső szögnél (110. tétel).

Ha az $ABCD$ négyszög két-két szemben fekvő oldala egyenlő, akkor a négyszög konvex és a szemben fekvő szögei egymással egyenlők. A 114. tétel folytán ugyanis, ha a C csúcs az ABD háromszög belsejében fekszik, akkor $AB + AD > BC + CD$, tehát ha $AB = CD$, $AD = BC$, akkor a négyszög konvex. Az ABD és CDB háromszögek egybevágóságából következik, hogy $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$; hasonlóan adódik az ABC és CDA háromszögek egybevágóságából, hogy $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$.

Ha az $ABCD$ konvex négyszög szemben fekvő szögei egyenlők, akkor a szemben fekvő oldalak is egyenlők. Ennek igazolására megmutatjuk, hogy a szemben fekvő szögek egyenlőségéből következik: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ és $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$ (106. ábra). Az ellenkezőttévefel, legyen például $\sphericalangle ABD < \sphericalangle CDB$; mivel $\sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC$ és $\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB = \sphericalangle ADC$ az $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ egyenlőségéből következik, hogy $\sphericalangle ADB < \sphericalangle CBD$. Legyenek b és d rendre a B és a D pontból kiinduló olyan félsu-



105. ábra.



106. ábra.

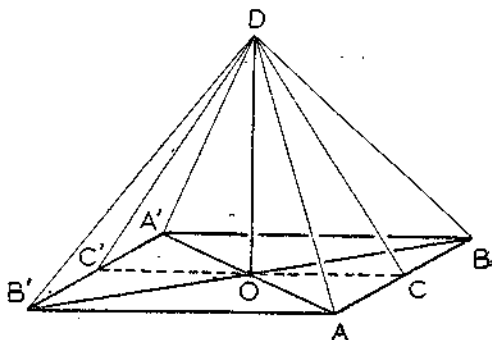
garak, melyek a BD egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek mint a C pont, s melyekre $\sphericalangle(\vec{BD}, b) = \sphericalangle ADB$ és $\sphericalangle(\vec{DB}, d) = \sphericalangle ABD$. Feltévéseink folytán a b félsugár $\sphericalangle DBC$ belsejében fekszik, s ezért a 37. tétel szerint metszi a DC szakaszt, a d félsugár metszi a BC szakaszt, a 9. tétel szerint tehát van b és d -nek egy A' közös pontja, mely a BCD háromszög belsejében fekszik. A 105. tétel szerint az ABD háromszög egybevágó az $A'DB$ háromszöggel, s így $\sphericalangle DA'B = \sphericalangle BAD$; feltévéseink szerint $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$, ebből $\sphericalangle DA'B = \sphericalangle BCD$. Mivel A' a BCD háromszög belsejében fekszik, fenti megjegyzésünk szerint $\sphericalangle DA'B > \sphericalangle DCB$; ez ellentmond előbbi megállapításunknak. Eszerint $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CDB$ és $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$; ebből a 105. tétel szerint következik az ABD és a CDB háromszögek egybevágósága, s ebből $AD = BC$ és $AB = CD$. — Az AC és BD átlók közös O pontja mindkét átlónak középpontja, mint a 82. tétel bizonyítása során már beláttuk. A síknak az O pont körül való félforgása az $ABCD$ négyszöget önmagába viszi át; ennél az A és C csúcsok egymásnak, a B és D csúcsok egymásnak felelnek meg. Ebben az esetben tehát a négyszög centrális, és O a középpontja.

25. §. Egyenesek és síkok a térben.

Következő tárgyalásaink alapját az I. 1—7, II. 1—4 és III. 1—5 axiómák képezik.

146. tétel. *Legyenek a, b, c valamely α síkban fekvő egyenesek, és d nem az α síkban fekvő egyenes, melyek áthaladnak az α sík O pontján. Ha d merőleges az a és b egyenesekre, akkor d merőleges a c egyenesre is.*

Bizonyítás. Legyenek A, B, D az a, b, d egyeneseknek O -tól különböző pontjai; legyenek továbbá A' és B' az a , illetve a b egyenesnek azok a pontjai, melyekre az $OA = OA'$, $OB = OB'$ egyenlőségek és az AOA' , BOB' elrendezések állanak fenn (107. ábra).



107. ábra.

A II. 4 axiomát az $AA'B$ háromszögre alkalmazva adódik, hogy c metszi az AB és AB' szakaszok közül az egyiket, mondjuk AB -t, valamely C pontban; ebben az esetben c metszi az $A'B'$ szakaszt egy C' pontban. Az $OABC$ és az $OA'B'C'$ síkidomok egybevágók, mivel az α síknak az O pont körül való félforgása közülök egyiket a másikba viszi át. Az ODA és ODA' derékszögű háromszögek egybevágók, s így $AD = A'D$; hasonlóan következik az ODB és az ODB' derékszögű háromszögek egybevágóságából, hogy $BD = B'D$. (Derékszögű háromszögek egybevágóságát illetően lásd a 122. tételt.) Mivel továbbá $AB = A'B'$, tehát $ABD \equiv A'B'D$; ebből és az $ABC \equiv A'B'C'$ egybevágóságából következik a III. 5 axioma szerint, hogy $CD = C'D$. A fentiek szerint $OC = OC'$ és $OD = OD$, tehát

$$ODC \equiv ODC';$$

eszerint az ODC síkban C és C' egymás tükörképei az OD egyenesre vonatkozóan, vagyis az $OD = d$ és a $CC' = c$ egyenesek egymásra merőlegesek.

147. tétel. *Ha az a, b, c egyenesek átmennek a d egyenes O pontján, s közülök mindegyik merőleges d -re, akkor az a, b, c egyenesek egy síkban fekszenek.*

Bizonyítás. Jelöljük c' -vel az a és b egyeneseken áthaladó síknak a c és d egyeneseken áthaladó síkkal való metszészonalát; előbbi tételünk értelmében c' merőleges d -re. A c és c' egyenesek tehát mindketten merőlegesek d -re, átmennek a d egyenes O pontján s egy síkban fekszenek; a 92. tétel szerint c és c' azonosak, vagyis c az a és b egyeneseken átfektetett síkban fekszik.

Értelmezés. Az a egyenest és az α síkot egymásra merőlegesnek nevezzük, ha a -nak van α -val egy O közös pontja, s ha bármely az α síkban fekvő és az O ponton áthaladó egyenes merőleges a -ra. — A 146. tétel értelmében az a egyenes merőleges az α síkra, ha két az α síkban fekvő és az O ponton áthaladó egyenesre merőleges.

148. tétel. *Minden a egyeneshez és P ponthoz megadható egy és csak egy olyan α sík, mely átmegy a P ponton és merőleges a -ra.*

Bizonyítás. Ha P az a egyenesen fekszik, átfektetünk a -n két tetszőleges β és γ síkot; legyenek b és c a β , illetve a γ síkban a P ponton áthaladó és az a -ra merőleges egyenesek (92. tétel). A b és c egyeneseken átfektetett sík átmegy a P ponton és merőleges az a egyenesre, a 146. tétel szerint.

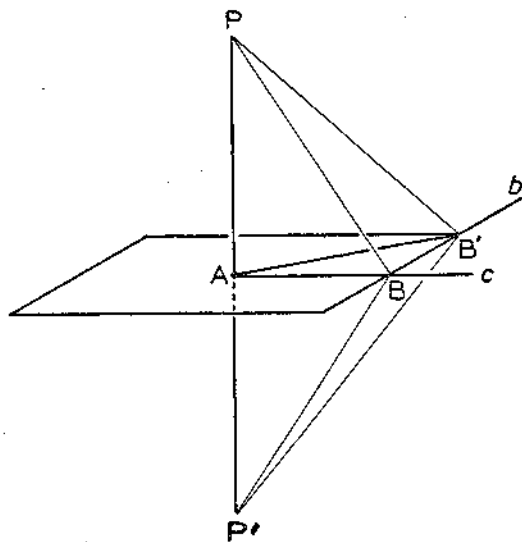
Ha P nem fekszik az a egyenesen, akkor a P ponton és az a egyenesen átfektetett síkban merőlegest bocsátunk a -ra a P pontból; ezt az egyenest a P pontból az a -ra bocsátott merőlegesnek nevezzük; ennek a merőlegesnek a talppontja, vagyis az a egyenessel közös pontja legyen Q . A Q ponton átmenő, az a -ra merőleges α síkot meghatározzuk a fenti eljárás szerint; a 147. tétel szerint az α sík átmegy a P ponton.

A 147. tételből következik, hogy az α síkot mindkét esetben egyértelműen meghatározzák az adott feltételek.

149. tétel. Minden α síkhoz és P ponthoz megadható egy és csak egy olyan a egyenes, mely áthalad a P ponton és merőleges az α síkra.

Bizonyítás. Ha P az α síkban fekszik, felveszünk két az α síkban fekvő és a P ponton áthaladó b és c egyenest, s az ezekre merőleges és a P ponton áthaladó β és γ síkokat (148. tétel). A β és γ síkok metszésvonala olyan a egyenes, mely átmegy a P ponton és merőleges az α síkban fekvő b és c egyenesekre, tehát a 146. tétel szerint merőleges az α síkra.

Ha a P pont nem fekszik az α síkban, legyen b tetszőleges az α síkban fekvő egyenes; a P ponton át b -re merőleges β síkot fektetünk; az α és β síkok metszésvonalát jelöljük c -vel. A P pontból merőlegest bocsátunk a c egyenesre, ezt az egyenest a -val, a és c közös pontját A -val, b és c közös pontját B -vel jelöljük (108. ábra). Legyen B' a b egyenesnek B -től különböző pontja; jelöljük P' -vel a PA egyenesnek azt a pontját, melyre az $AP = AP'$ egyenlőség, és a PAP'



108. ábra.

elrendezés áll fenn. A BAP és a BAP' derékszögű háromszögek egybevágók, s ezért $BP = BP'$. Ebből következik, hogy a $BB'P$

és a $BB'P'$ derékszögű háromszögek egybevágók, s így $B'P = B'P'$. Ebből és a fenti $AP = AP'$ egyenlőségből következik, hogy

$$AB'P \equiv AB'P',$$

s így a PP' egyenes merőleges az AB' egyenesre; mivel PP' merőleges az AB egyenesre is, tehát a 146. tétel szerint a PP' egyenes merőleges az α síkra.

Mindkét esetben az α síkra merőleges és a P ponton áthaladó egyenes egyértelműen meg van határozva; ha ugyanis két ilyen egyenes volna, a rajtuk áthaladó síknak az α síkkal való metszészonalára merőleges volna mindkét egyenes, ellentétben a 92. tétellel.

Értelmezés. A P és P' pontokat az α síkra vonatkozó *tükörképeknek* nevezzük, ha a PP' egyenes merőleges az α síkra, s ha ennek az egyenesnek az α síkkal való metszéspontja a PP' szakasz középpontja.

A 149. tételből következik, hogy bármely nem az α síkban fekvő P pontnak az α síkra vonatkozóan egy és csak egy tükörképe van, s ez nem fekszik az α síkban. — Valamely az α síkban fekvő P pontnak az α síkra vonatkozó tükörképén magát a P pontot értjük.

A 148. tételből következik, hogy két tetszőleges P és P' ponthoz megadható egy és csak egy olyan α sík, melyre vonatkozóan P és P' egymásnak tükörképei; ez a PP' szakasz középpontján áthaladó, a PP' egyenesre merőleges sík, melyet a P, P' pontok *középsíkjának* fogunk nevezni. A tér valamely Q pontja akkor és csak akkor tartozik a P, P' pontok középsíkjához, ha fennáll a $PQ = P'Q$ egyenlőség (107. és 108. tétel).

150. tétel. Ha a DO egyenes merőleges az OAC síkra, továbbá az OC egyenes merőleges az AC egyenesre, akkor DC is merőleges az AC egyenesre.

Bizonyítás. Jelöljük B -vel az AC egyenesnek azt a pontját, melyre az ACB elrendezés és az $AC = CB$ egyenlőség áll fenn (l. a 107. ábrát, 157. o.). Az ACO és a BCO derékszögű háromszögek egybevágók (122. tétel), s ezért $OA = OB$; ebből következik a DOA és a DOB derékszögű háromszögek egybevágósága, s így $DA = DB$. Eszerint ABD egy egyenlőszárú háromszög; az AB alap C középpontját a szemben fekvő D csúccsal összekötő DC egyenes a 107. tétel szerint merőleges az AB alapra, tehát az AC egyenesre.

151. tétel. *Ha a PA és a QB egyenesek merőlegesek az ABC síkra, akkor ezek az egyenesek egy síkban fekszenek.*

Bizonyítás. Jelöljük C -vel az ABC sík olyan pontját, hogy az AB és BC egyenesek egymásra merőlegesek. A 150. tétel szerint PB merőleges a BC egyenesre, s mert AB és QB is merőlegesek BC -re, tehát a 147. tétel szerint az AB , PB és QB egyenesek egy β síkhoz tartoznak; mivel P , A és Q , B ennek a síknak pontjai, tehát a PA és a QB egyenesek a β síkban fekszenek.

Értelmezés. Az α és β síkokat egymásra merőlegesnek nevezzük, ha a két síknak van egy közös a egyenese, s ha az egyik síkban fekvő és az a egyenesre merőleges bármely egyenes merőleges a másik síkra.

152. tétel. *Ha a b egyenes merőleges az α síkra, akkor minden a b egyenesen átfektetett sík merőleges az α síkra,*

Bizonyítás. Legyen β egy a b egyenesen átfektetett sík, és a ennek az α síkkal való metszésvonala. Minden az a egyenesre merőleges, az α síkban fekvő egyenes merőleges a β síkra a 150. tétel szerint. Mivel az α sík tartalmazza az a -ra és b -re ezek közös pontjában emelt c merőlegest, a fenti megfontolás szerint minden a β síkban fekvő, az a egyenesre merőleges egyenes az α síkra is merőleges.

153. tétel. *Ha a β és γ síkoknak van közös pontja, s mindkét sík merőleges az α síkra, akkor a β és γ síkok metszésvonala merőleges az α síkra.*

Bizonyítás. Az α síknak a β és a γ síkkal való metszésvonalát jelöljük b -vel és c -vel. A β és γ síkok valamely A közös pontján át b -re és c -re merőleges a , illetve a' egyenest bocsátunk. Mivel a β sík merőleges az α síkra, az a egyenes is merőleges α -ra, s ugyanúgy a' is merőleges α -ra. Minthogy az A ponton egy és csak egy az α síkra merőleges egyenes megy át (149. tétel), tehát a és a' azonosak, s ebből következik, hogy az a egyenes a β és γ síkok metszésvonala.

154. tétel. *Ha a b egyenes nem merőleges az α síkra, van egy és csak egy olyan a b egyenesen átfektetett sík, mely merőleges az α síkra.*

Bizonyítás. A b egyenes két tetszőleges pontjából merőleges egyeneseket bocsátunk az α síkra; ez a két egyenes a 151. tétel értelmében egy β síkban fekszik; a β sík merőleges az α síkra.

Értelmezés. Valamely P pontnak az α síkra való (merőleges) vetületén értjük a P ponton át az α síkra merőlegesen bo-

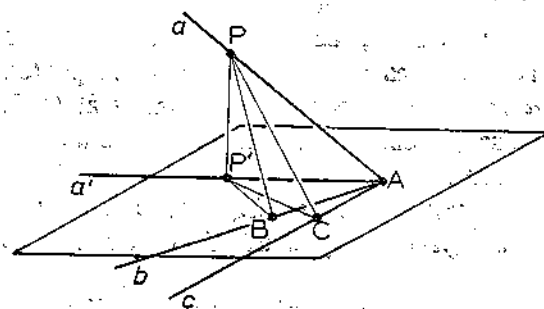
csátott egyenesnek az α síkkal közös P' pontját. — Ha Q az α sík tetszőleges más pontja, akkor a 115. tétel szerint $PP' < PQ$. A PP' szakaszt a P pontnak az α síktól való távolságának nevezzük.

Értelmezés. Ha az a egyenes nem merőleges az α síkra, a pontjainak az α síkra való vetületei ahhoz az a' egyeneshez tartoznak, melyben az a -n átfektetett és α -ra merőleges sík metszi az α síkot (154. tétel). Az a' egyenest az a egyenesnek az α síkra való vetületének nevezzük.

Értelmezés. Ha az α sík A pontjából kiinduló a félsugár nem merőleges α -ra, a pontjainak vetületei egy az A pontból kiinduló félsugárhoz tartoznak, melyet az a félsugárnak az α síkra való vetületének nevezünk. Az $\sphericalangle(a, a')$ szöget az a félsugár és az α sík egymással bezárt szögének nevezzük. Ha az a félsugár merőleges az α síkra, akkor azt mondjuk, hogy a félsugár és a sík egymással bezárt szöge derékszög.

155. tétel. Legyen a az α sík A pontjából kiinduló félsugár, mely nem merőleges α -ra; legyen a' az a félsugár vetülete, és b tetszőleges másik az α síkban fekvő és az A pontból kiinduló félsugár. Az $\sphericalangle(a, a')$ szög kisebb az $\sphericalangle(a, b)$ szögnél. — Ha c az α síkban fekvő és az A pontból kiinduló olyan félsugár, hogy az $\sphericalangle(a', b)$ szög kisebb az $\sphericalangle(a', c)$ szögnél, akkor az $\sphericalangle(a, b)$ szög is kisebb az $\sphericalangle(a, c)$ szögnél.

Bizonyítás (109. ábra). Legyen P az a félsugár tetszőleges pontja, P' ennek az α síkra való vetülete, továbbá B a b fél-



109. ábra.

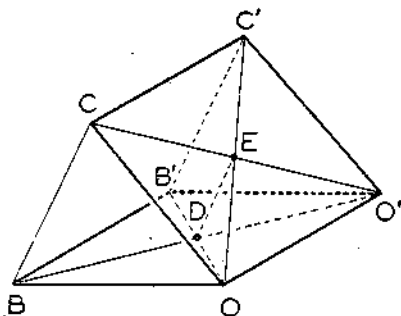
sugárnak az α pontja, melyre $AP' = AB$. A $PP'B$ derékszögű háromszög PB átfogója nagyobb mint PP' befogója (120. tétel). Az APP' háromszög AP és AP' oldalai rendre egyenlők az APB háromszög AP és AB oldalával, az előbbinek

PP' oldala pedig kisebb a másikkal PB oldalánál; a 117. tételből következik, tehát, hogy az első háromszög $\sphericalangle PAP'$ szöge kisebb a második háromszög $\sphericalangle PAB$ szögénél.

A tétel második állításának igazolására jelöljük C -vel a c félsugárnak azt a pontját, melyre $AP' = AC$. Feltévéstünk szerint a $P'AB$ háromszögnek $\sphericalangle P'AB$ szöge kisebb a $P'AC$ háromszög $\sphericalangle P'AC$ szögénél, s így a 117. tétel szerint $P'B < P'C$. A $PP'B$ és a $PP'C$ derékszögű háromszögekre alkalmazva a 121. tételt, adódik tehát, hogy az előbbinek PB átfogója kisebb a másiknak PC átfogójánál. Az APB és az APC háromszögekre nézve eszerint $AP = AP$, $AB = AC$ és $PB < PC$, s így a 117. tétel szerint $\sphericalangle PAB < \sphericalangle PAC$.

156. tétel. Legyenek β és γ egy a egyenes által határolt félsíkok. Felvesszünk az a egyenesen két tetszőleges O és O' pontot s jelöljük b, b' -vel, illetve c, c' -vel az O és az O' pontokból kiinduló, az a egyenesre merőleges, és rendre a β , illetve a γ félsíokban fekvő félsugarakat. A $\sphericalangle(b, c)$ és a $\sphericalangle(b', c')$ szögek egyenlők.

Bizonyítás. Jelöljük B, B', C, C' -vel ezeknek a félsugaraknak olyan pontjait, melyekre $OB = O'B'$ és $OC = O'C'$. Az $O'OB$ derékszögű háromszögnek O' -nél fekvő szöge hegyesszög, s ezért az $O'B$ félsugár az $\sphericalangle OO'B'$ szög belsejében halad, tehát metszi az OB' szakaszt (37. tétel): hasonlóan az OB' félsugár metszi az $O'B$ szakaszt; eszerint az OB' és az $O'B$ szakaszoknak van közös pontja; jelöljük ezt D -vel. Hasonlóan, jelöljük E -vel az OC' és az $O'C$ szakaszok közös pontját (110. ábra). — Az $O'OB$ és az $O'OB'$ derékszögű háromszögek egybevágók, mivel $OB = O'B'$ és $OO' = O'O$; ebből következik, hogy $OB' = O'B$, továbbá $\sphericalangle OO'B = \sphericalangle O'OB'$. Az utóbbi szögegyenlőségből a 108. tétel szerint következik, hogy az OOD háromszög egyenlőszárú, még-



110. ábra.

pedig $OD = O'D$. Hasonlóan vezetjük le a következő egyenlőségeket: $OC' = O'C$ és $OE = O'E$. — Az ODE és az $O'DE$ háromszögek egybevágók, mivel $OD = O'D$, $OE = O'E$, $DE = DE$, s ezért $\sphericalangle DOE = \sphericalangle D'O'E$; ebből és a fenti $OB' = O'B$, $OC' = O'C$ egyenlőségekből következik a 104. tétel szerint, hogy az $OB'C'$ és az $O'BC$ háromszögek egybevágók, s ezért $BC = B'C'$. Az utóbbi egyenlőségből s a fenti $OB = O'B'$, $OC = O'C'$ egyenlő-

ségekből adódik végre, hogy az OBC és az $O'B'C'$ háromszögek egybevágók, s ezért $\sphericalangle BOC = \sphericalangle B'O'C'$.

Megjegyzés. A 156. tételből (a 147. és 98. tétel alkalmazásával) adódik a tétel következő megfordítása:

Ha b, c és b', c' az a egyenes O illetve O' pontjából kiinduló és az a egyenesre merőleges félsugarak, melyek közül c és c' egy az a egyenes által határolt félsíkban, b és b' pedig az ezen átfektetett síknak ugyanazon az oldalán fekszenek, akkor a $\sphericalangle(b, c)$ és $\sphericalangle(b', c')$ szögek egyenlőségéből következik, hogy a b és b' félsugarak is egy az a egyenes által határolt félsíkban fekszenek.

Értelmezés. Az a egyenes által határolt β és γ félsíkok egymással bezárt szögén értjük az a egyenes valamely O pontjából kiinduló, az a -ra merőleges, és rendre a β és a γ félsíkban fekvő b és c félsugarak által bezárt szöget; a 156. tétel szerint ennek a szögnek a nagysága független az O pont megválasztásától. A β és γ félsíkok által bezárt szög akkor és csak akkor derékszög, ha a két félsík merőleges egymásra. — Ha a β és γ félsíkok által bezárt szög egyenlő a β' és γ' félsíkok által bezárt szöggel, akkor azt mondjuk, hogy a (β, γ) és a (β', γ') *lapszögek egyenlők*. — A $\sphericalangle(b, c)$ szögfelezőjén és az a egyenesen átfektetett síkot, mely a 156. tétel és megfordítása szerint ugyancsak független az O pont megválasztásától, a (β, γ) *lapszög felező síkjának* nevezzük.

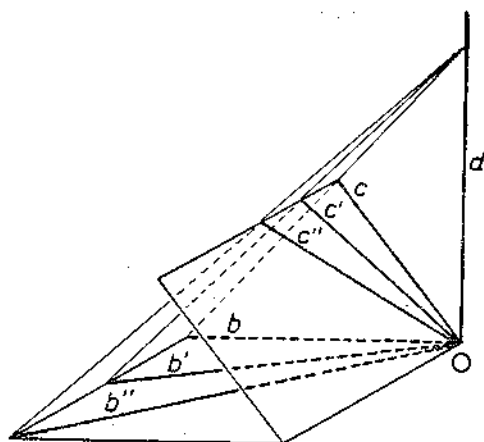
A 156. tételre adott bizonyításhoz teljesen hasonló módon adódik a következő

157. tétel. Legyenek β és γ egy a egyenes által határolt félsíkok. Felveszünk az a egyenesen két tetszőleges O és O' pontot; legyenek b, b' , illetve c, c' az O és az O' pontokból kiinduló és rendre a β , illetve a γ félsíkban fekvő olyan félsugarak, hogy az a egyenes a b és b' félsugarakkal egyenlő belső szögeket zár be, s hasonlóan a c és c' félsugarakkal. A $\sphericalangle(b, c)$ és a $\sphericalangle(b', c')$ szögek egyenlők.

158. tétel. Legyenek β és γ egy a egyenes által határolt félsíkok, melyeknek egymással bezárt szöge hegyesszög. Jelöljük b, b', b'' -vel három olyan a β félsíkban fekvő s az a egyenes O pontjából kiinduló félsugarat, melyek közül b merőleges a -ra, továbbá a $\sphericalangle(b, b')$ szög kisebb a $\sphericalangle(b, b'')$ szögnél. Jelöljük $\alpha, \alpha', \alpha''$ -vel rendre a b, b', b'' félsugarakon átfektetett és a β félsíkra merőleges síkokat, továbbá c, c', c'' -vel ezeknek a γ félsíkkal való metszéspontjait. A $\sphericalangle(b, c)$ szög nagyobb a $\sphericalangle(b', c')$ szögnél, s ez nagyobb a $\sphericalangle(b'', c'')$ szögnél.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy b -nek ugyanazon az oldalán feksziknek b' és b'' ; ekkor b' a $\sphericalangle(b, b'')$ szög belsejében, s ennek megfelelően c' a $\sphericalangle(c, c'')$ szög belsejében fekszik, tehát $\sphericalangle(c, c') < \sphericalangle(c, c'')$. Jelöljük d -vel a β félsíkra merőleges, az O pontból kiinduló félsugarat, mely β -nak ugyanazon az oldalán fekszik, mint a γ félsík (111. ábra); a

149. és a 153. tétel szerint d hozzátartozik az $\alpha, \alpha', \alpha''$ síkokhoz. Jelöljük D -vel a d félsugar valamely pontját; D -ből a c egyenesére (vagyis a c félsugáron átfektetett egyenesre) merőlegest bocsátunk, ennek a talppontja legyen C ; mivel $\sphericalangle(b, c)$, s ezért $\sphericalangle(c, d)$ is hegyesszög, a 110. télelből következik, hogy C a c félsugáron fekszik. Ha A jelenti a -nak



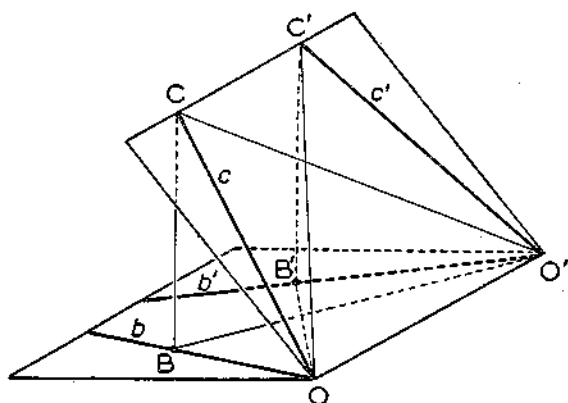
111. ábra.

egy az O -tól különböző pontját, akkor, mivel AO merőleges az OCD síkra, és OC merőleges CD -re, a 150. tétel szerint AC merőleges CD -re; ezért a D pont a C pontnak, s a c félsugar a d félsugárnak a γ félsíkra való vetülete, s így a 155. tétel folytán $\sphericalangle(c, d) < \sphericalangle(c', d) < \sphericalangle(c'', d)$. Ezeknek a szögeknek derékszögre kiegészítő szögei rendre a $\sphericalangle(b, c)$, $\sphericalangle(b', c')$, $\sphericalangle(b'', c'')$ szögek, s ezért $\sphericalangle(b, c) > \sphericalangle(b', c') > \sphericalangle(b'', c'')$.

159. tétel. Ha az a egyenes által határolt γ félsík nem merőleges az a egyenesen átfektetett β síkra, s ha c és c' a γ félsíkban fekvő és az a egyenes O illetve O' pontjából kiinduló olyan félsugarak, melyek az a egyenessel egyenlő belső szögeket zárnak be, akkor ezeknek a β síkra való vetületei: a b és b' félsugarak is az a egyenessel egyenlő belső szögeket zárnak be; és megfordítva.

Bizonyítás. (112. ábra). Jelöljük C -vel és C' -vel a c és c' félsugaraknak olyan pontjait, melyekre $OC = O'C'$. C -ből a β síkra bocsátott merőleges talppontja legyen B . Meghatározzunk egy B' pontot következőképen: legyen $\vec{OB'}$ a β síkban az a félsugar, mely az OO' egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint a B pont, s melyre $\sphericalangle B'O'O = \sphericalangle BOO'$; ezen a félsugáron legyen B'

az a pont, melyre $O'B' = OB$. A 157. tétel szerint $\sphericalangle COB = \sphericalangle C'O'B'$, s így a 104. tétel folytán a COB és a $C'O'B'$ háromszögek egybevágók; ebből következik, hogy a $\sphericalangle C'B'O'$ szög derékszög, és $CB = C'B'$. Az $OB = O'B'$, $OO' = O'O$ és $\sphericalangle BOO' = \sphericalangle B'O'O$ egyenlőségekből következik, hogy a BOO' és a $B'O'O$ háromszögek egybevágók, s így $BO' = B'O$. Hasonlóan a COO' és a $C'O'O$ háromszögek egybevágóságából következik, hogy $CO' = C'O$.

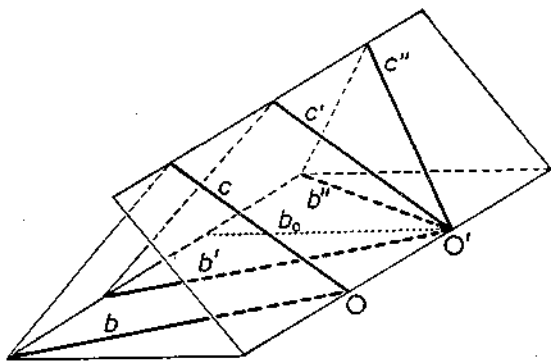


112. ábra.

A fent megállapított $CB = C'B'$, $BO' = B'O$ és $CO' = C'O$ egyenlőségek szerint a CBO' és a $C'B'O$ háromszögek egybevágók, s mivel az előbbinek B -nél fekvő szöge derékszög, hiszen CB merőleges a β síkra, tehát $C'B'$ is merőleges az OB' egyenesre; mint fentebb láttuk, $C'B'$ merőleges az $O'B'$ egyenesre is, s ezért a β síkra is. Eszerint az $O'B'$ félsugár az $O'C'$ félsugárnak a β síkra való vetülete; meghatározása szerint pedig az $\vec{O'B'}$ és az $\vec{OB}$ félsugarak az $a = OO'$ egyenessel egyenlő belső szöveget zárnak be. Ez éppen tételünk állítása. A tétel megfordítása hasonló megfontolással adódik.

160. tétel. Ha az a egyenes által határolt β és γ félsíkok nem merőlegesek egymásra, és α, α' olyan a β -ra merőleges síkok, hogy az α síknak a β és γ félsíkokkal való b és c metszészvonalai által bezárt $\sphericalangle (b, c)$ szög egyenlő az α' síknak ezekkel a félsíkokkal való b' és c' metszészvonalai által bezárt $\sphericalangle (b', c')$ szöggel, akkor a b és b' félsugarak az a egyenessel egyenlő belső szöveget vagy egyenlő megfelelő szöveget zárnak be.

Bizonyítás (113. ábra). Jelöljük O -val és O' -vel az a egyenesnek az α , illetve α' síkkal való metszéspontját. Legyen c'' az O' -ből kiinduló és a γ félsíkban fekvő félsugar, melyre nézve a c és a c'' félsugarak az a egyenessel egyenlő belső szögeket zárnak be. c'' -nek a β félsíkra való vetületét jelöljük b'' -vel. A 159. tétel szerint b és b'' az a egyenessel egyenlő belső szögeket zárnak be, s így a 157. tétel szerint $\sphericalangle(b, c) = \sphericalangle(b', c')$. Mivel feltevés szerint $\sphericalangle(b, c) = \sphericalangle(b', c')$, tehát $\sphericalangle(b', c') = \sphericalangle(b'', c'')$. Jelöljük b_0 -val az O' pontból kiinduló, az a egyenesre merőleges félsugarat, mely a β félsíkban fekszik. Mivel a (b'', c'') sík merőleges β -ra (151. tétel), tehát a 158. tétel szerint a $\sphericalangle(b', c') = \sphericalangle(b'', c'')$ egyenlőségből következik, hogy $\sphericalangle(b_0, b') = \sphericalangle(b_0, b'')$, s így a b' és b'' félsugarak vagy egybeesnek, vagy egymás tükörképei a b_0 -ra vonatkozóan. Az első esetben a b és b' félsugarak a -val egyenlő belső szögeket, a második esetben egyenlő megfelelő szögeket zárnak be. A 159. tétel szerint ugyanez érvényes a c és c' félsugaraknak az a -val bezárt szögeire nézve.



113. ábra.

26. §. A tér kongruens leképezései.

Értelmezés. *Térbeli idomon* a térben fekvő, véges sok pontból álló összességet értünk. Az $A_1 A_2 \dots A_n$ és $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ idomokat *egybevágóknak* nevezzük, ha minden i, j indexre $A_i A_j = A'_i A'_j$; ezt a következő jellel fejezzük ki:

$$A_1 A_2 \dots A_n \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_n.$$

A III. 1 axioma folytán az egybevágóság reflexív, szimmetrikus és tranzitív vonatkozás.

161. tétel. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és D, D' olyan pontok, melyekre fennáll az $ABCD \equiv ABCD'$ egybe-

vágóság, akkor a D és D' pontok vagy egybeesnek, vagy egymás tükörképei az ABC síkra vonatkozóan.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy D és D' különbözők, s jelöljük a DD' szakasz középpontját O -val. Ha az A, B, C pontok közül valamelyik, például A , a DD' egyenesen fekszik, akkor az $AD = AD'$ egyenlőség folytán A a DD' szakasz O középpontjával egybeesik; ebben az esetben a BDD' és CDD' egyenlőszárú háromszögekre alkalmazva a 107. tételt adódik, hogy az AB és az AC egyenesek merőlegesek a DD' egyenesre. Ha pedig az A, B, C pontok közül egyik sem fekszik a DD' egyenesen, akkor hasonló megfontolás szerint DD' merőleges az OA, OB, OC egyenesekre, s így a 147. tétel szerint ez a három egyenes egy síkban fekszik, vagyis a DD' szakasz O középpontja az ABC síkhoz tartozik. Mindkét esetben tehát D és D' egymás tükörképei az ABC síkra vonatkozóan.

A következő tétel a térre vonatkozóan a III. 4 sík-axiomának felel meg:

162. tétel. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, és D a térnek az ABC síkhoz nem tartozó pontja, továbbá A', B', C' olyan pontok, melyekre $ABC \equiv A'B'C'$, akkor van az $A'B'C'$ síknak bármelyik oldalán egy és csak egy olyan D' pont, melyre $ABCD \equiv A'B'C'D'$.

Bizonyítás. A 81. tétel szerint az A', B', C' pontok nem fekszenek egy egyenesen. A D pontnak az ABC síkra való vetületét jelöljük E -vel. Az $A'B'C'$ síkban van egy és csak egy olyan E' pont, melyre $ABCE \equiv A'B'C'E'$ (83. tétel). Az E' pontban emeljünk merőlegest az $A'B'C'$ síkra, s erre az egyenesre a sík illető oldalán mérjük fel az $E'D' = ED$ szakaszt. A DEA és $D'E'A'$ derékszögű háromszögek egybevágók a 122. tétel szerint, s ezért $AD = A'D'$; hasonlóan $BD = B'D'$ és $CD = C'D'$; tehát $ABCD \equiv A'B'C'D'$. A 161. tételből következik, hogy az adott feltételek a D' pontot egyértelműen meghatározzák.

163. tétel. Ha A, B, C, D egy síkban fekvő pontok, és A', B', C', D' olyan pontok, melyekre $ABCD \equiv A'B'C'D'$, akkor A', B', C', D' egy síkban fekszenek.

Bizonyítás. Ha A, B, C, D egy egyenesen fekszenek, akkor a 81. tétel folytán A', B', C', D' is egy egyenesen fekszenek. Tegyük fel, hogy A, B, C nem fekszenek egy egyenesen; ha D az ABC sík pontja, és A', B', C', D' nem egy síkban fekvő pontok, akkor az $ABC \equiv A'B'C'$ feltételből a 162. tétel szerint következik, hogy

van az ABC sík egyik oldalán egy és csak egy olyan D'' pont, melyre $ABCD'' \equiv A'B'C'D'$; ebből és a feltételezett $ABCD \equiv A'B'C'D'$ egybevágóságból következik $ABCD \equiv ABCD''$. A 161. tétel szerint tehát D és D'' vagy azonosak, vagy egymás tükörképei az ABC síkra vonatkozóan; ez azonban ellenmondás, mivel D az ABC síkban fekszik, D'' pedig nem.

A következő tétel a síkra vonatkozó III. 5 axiómának felel meg:

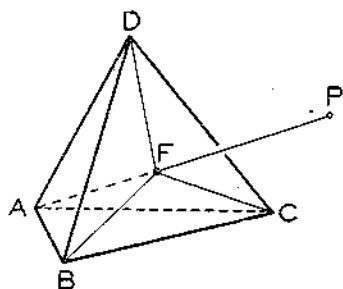
164. tétel. Ha A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, és P az ABC sík pontja, továbbá A', B', C', D', P' olyan pontok, melyekre $ABCD \equiv A'B'C'D'$ és $ABCP \equiv A'B'C'P'$, akkor $DP = D'P'$, s így $ABCDP \equiv A'B'C'D'P'$.

Bizonyítás. A 162. tétel bizonyításából következik, hogy ha E -vel és E' -vel jelöljük rendre a D -nek az ABC , és D' -nek az $A'B'C'$ síkra való vetületét, akkor $DE = D'E'$ és $ABCE \equiv A'B'C'E'$. Mivel a 163. tétel szerint a P' pont az $A'B'C'$ síkban fekszik, az $ABCE \equiv A'B'C'E'$ és az $ABCP \equiv A'B'C'P'$ egybevágóságból következik a 84. tétel értelmében: $EP = E'P'$; az utóbbi egyenlőség és a fenti $DE = D'E'$ egyenlőség folytán a DEP és a $D'E'P'$ derékszögű háromszögek egybevágók, s ezért $DP = D'P'$.

165. tétel. Ha A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, és P a tér tetszőleges pontja, továbbá A', B', C', D' olyan pontok, melyekre $ABCD \equiv A'B'C'D'$, akkor van egy és csak egy olyan P' pont, melyre fennáll az $ABCDP \equiv A'B'C'D'P'$ egybevágóság.

Bizonyítás. Ha P az ABC síkban fekszik, akkor a 83. tétel szerint van az $A'B'C'$ síkban egy és csak egy olyan P' pont, melyre $ABCP \equiv A'B'C'P'$, s így a 164. tétel szerint $ABCDP \equiv A'B'C'D'P'$.

Ha P'' a tér olyan pontja, melyre $ABCP \equiv A'B'C'P''$, akkor a 163. tétel folytán P'' az $A'B'C'$ síkban fekszik, s így a P' ponttal azonos. — Ha P nem tartozik az $ABCD$ tetraéder valamely lapján átfektetett síkhoz, akkor van a tetraédernek olyan csúcsa, mondjuk A , hogy az AP egyenesnek valamely F pontja a tetraéder szemközti lapján átfektetett BCD síkhoz tartozik (52. és 54. tétel) (114. ábra). Jelentse F'



114. ábra.

a $B'C'D'$ síknak azt a pontját, melyre $BCDF \equiv B'C'D'F'$; a 164. tétel folytán $AF = A'F'$. Legyen P' az $A'F'$ egyenesnek az a

(86. o.). Az értelmezésekből következik, hogy a tér önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezései csoportot alkotnak (l. 78—79. o.).

Értelmezés. A térnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését kongruens leképezésnek nevezzük, ha bármely két P és Q pontnak olyan P' , Q' pontok felelnek meg, hogy a PQ és $P'Q'$ szakaszok egyenlők. — A tér önmagára való kongruens leképezései csoportot alkotnak.

A 165. és 166. tétel szerint négy nem egy síkban fekvő A , B , C , D pont és négy olyan A' , B' , C' , D' pont, melyekre fennáll az $ABCD \equiv A'B'C'D'$ egybevágóság, meghatározza a térnek egy és csak egy olyan kongruens leképezését, melynél az A , B , C , D pontoknak rendre az A' , B' , C' , D' pontok felelnek meg.

A 163. tételből következik, hogy a tér kongruens leképezésénél minden α sík valamely α' síkba megy át; ez a leképezése α -nak α' -re nyilván kongruens leképezés; ennél minden az α síkban fekvő egyenes az α' sík valamely egyenesébe megy át (88. tétel). Ha a tér kongruens leképezésénél az α sík az α' síkba megy át, akkor az α sík által meghatározott bármelyik térrésznek az α' sík által meghatározott egyik térrész felel meg (l. a síkra vonatkozó 88. tétel bizonyítását). — A 93. tétel szerint az α sík bármely két egymásra merőleges egyenesének az α' síkban két egymásra merőleges egyenes felel meg. A tér kongruens leképezésénél tehát bármely két egymásra merőleges egyenes képe két egymásra merőleges egyenes. — Ha b és c két olyan egyenes, melyek valamely a egyenes A pontján átmennek és a -ra merőlegesek, akkor ezeknek a tér kongruens leképezésénél olyan b' , c' egyenesek felelnek meg, melyek az a -nak megfelelő a' egyenesre merőlegesek, és átmennek a' -nek azon az A' pontján, mely az A pont képe. A b és c egyeneseken áthaladó, s ezért az a egyenesre merőleges α síknak az adott leképezésnél megfelel a b' és c' egyeneseken áthaladó α' sík, s ez merőleges a' -re. Ebből közvetlenül következik az is, hogy két egymásra merőleges síknak a tér kongruens leképezésénél két egymásra merőleges sík felel meg. Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze:

168. tétel. A tér önmagára való kongruens leképezésénél minden α sík egy α' síkba (s minden egyenes egyenesbe megy át); az α sík által meghatározott egyik térrésznek az α' sík által meghatározott egyik térrész felel meg. — Két egymásra merőleges egyenesnek, vagy síknak szintén két egymásra merőleges egyenes, illetve

sík felel meg. Ha az a egyenes merőleges az α síkra, akkor az a egyenes α' képe merőleges az α sík képsíkjára, α' -re.

Két tetszőleges merőleges egyenespárhoz (vagy síkpárhoz) megadható a térnek olyan kongruens leképezése, mely közülök egyiket a másikba viszi át (lásd a síkra vonatkozó 94. tételt).

Értelmezés. A térnek az α síkra vonatkozó tükrözése az a leképezés, mely a tér minden P pontjához P -nek az α síkra vonatkozó P' tükörképét rendeli hozzá. (Síkra vonatkozó tükörkép értelmzését lásd a 160. oldalon.)

A térnek az α síkra vonatkozó tükrözése a tér kongruens leképezése. Legyen ugyanis P és Q a tér két tetszőleges pontja, P' , Q' ezeknek az α síkra vonatkozó tükörképei. Mivel a PP' és a QQ' egyenesek merőlegesek az α síkra, ezek a 151. tétel szerint egy β síkban fekszenek. A térnek az α síkra vonatkozó tükrözése a β síkban ennek önmagában való ama tükrözésével megegyezik, melynek tengelye az α és β síkok metszésvonala. Mivel pedig a sík önmagában való tükrözése kongruens leképezés, tehát $PQ = P'Q'$.

Értelmezés. Az a egyeneshez tartozó félsík-sor ciklikus irányítását a félsík-sor ciklikus rendezése alapján ugyanúgy értelmezzük, mint a sugársor ciklikus irányítását annak ciklikus rendezése alapján (116. o.). Az a egyeneshez tartozó félsík-sor ciklikus irányítását, vagy az a egyenes körül való forgási irányt az a egyenes által határolt három α, β, γ félsíknak $(\alpha\beta\gamma)$ ciklikus sorrendje egyértelműen meghatározza; egymással megegyezők az $(\alpha\beta\gamma)$, $(\beta\gamma\alpha)$, $(\gamma\alpha\beta)$ ciklikus irányítások; egymással ellenkezők: $(\alpha\beta\gamma)$ és $(\gamma\beta\alpha)$.

Értelmezés. Legyenek α, β, γ és α', β', γ' az a egyenes által határolt félsíkok, melyek közül β az (α, γ) lapszögnek és β' az (α', γ') lapszögnek a belsejében fekszik. Az (α, γ) és az (α', γ') lapszögeket megegyező, illetve ellenkező előjellűnek nevezzük, aszerint, hogy az $(\alpha\beta\gamma)$ és az $(\alpha'\beta'\gamma')$ ciklikus sorrendek az a egyenes körül ugyanazt a forgási irányt, vagy egymással ellenkező forgási irányokat határoznak meg.

Értelmezés. Az a egyeneshez tartozó félsík-sor valamely α eleméhez rendeljük hozzá a félsík-sor α' elemét, s minden β eleméhez azt a β' elemét, melyre nézve a (β, β') lapszög az (α, α') lapszöggel egyenlő és megegyező előjellű. A félsík-sornak ilyen módon értelmezett leképezését a félsík-sornak az a tengely körül (α, α') lapszöggel való forgásának nevezzük.

Nulla lapszöggel való forgáson az azonos leképezést értjük, mely minden az a egyenes által határolt α félsíkot önmagának feleltet meg. Az a tengely körül való *félforgáson* (vagy egyenes lapszöggel való forgáson) azt a leképezést értjük, mely minden az a egyenes által határolt α félsíknak az α -n átfektetett síknak az a egyenes által határolt másik félsíkját felelteti meg.

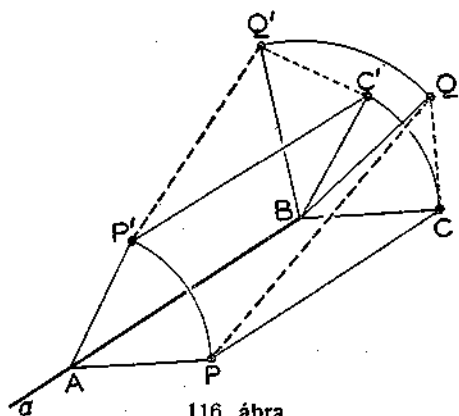
Az a egyeneshez tartozó félsík-sornak az a körül való forgásai kommutatív csoportot alkotnak, tekintettel a szögek összeadásának kommutatív (és asszociatív) voltára (96. o.).

Értelmezés. Tekintsük az a egyeneshez tartozó félsík-sornak az a körül való valamely forgását; jelöljük a félsík-sor tetszőleges elemét α -val, s ennek az adott forgásnál származó képét α' -vel. Van az α félsíknak az α' félsíkra egy és csak egy olyan kongruens leképezése, mely az a egyenes minden pontját önmagának felelteti meg (III. 4 axioma és 89. tétel folytán); az α félsík P pontjának feleljen meg ennél a leképezésnél az α' félsík P' pontja. A tér tetszőleges P pontjához hozzárendeljük a fenti előírással egyértelműen meghatározott P' képpontot; ezáltal a térnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését értelmeztük, melyet *a térnek az a tengely körül (α, α') lapszöggel való forgásának* nevezünk.

Az α félsíknak az α' félsíkra való ama kongruens leképezésénél, mely az a tengely minden pontját önmagának felelteti meg, bármely az α -ban fekvő és a -ra merőleges b félsugárnak képe olyan az α' -ben fekvő b' félsugár, mely merőleges a -ra, s melynek kezdőpontja b kezdőpontjával egybeesik. Ha tehát β tetszőleges az a tengelyre merőleges sík, és B ennek az a tengellyel közös pontja, akkor a térnek az a tengely körül való forgásánál a B pontból kiinduló és a β síkban fekvő bármely félsugárnak ugyancsak egy a B pontból kiinduló és a β síkban fekvő félsugár felel meg. *A térnek az a tengely körül (α, α') lapszöggel való forgásánál minden az a-ra merőleges sík önmagába megy át s ennek a síknak önmagára való leképezése a síknak forgása az a tengellyel közös pontja körül; a sík forgásának szöge az (α, α') félsíkok által bezárt szöggel egyenlő.*

A fentiek alapján könnyen megmutatható az, hogy *a térnek az a tengely körül való forgása kongruens leképezés.* Legyen ugyanis P és Q a tér két tetszőleges pontja, P' és Q' ezeknek valamely az a tengely körül való forgásánál származó képei. P -ből

merőlegest bocsátunk α -ra, s ennek az α -val közös pontját A -val jelöljük. A Q ponton át α -ra merőleges β síkot fektetünk, ennek α -val közös pontját B -vel, továbbá a P -ből a β síkra bocsátott



116. ábra.

merőleges talppontját C -vel jelöljük (116. ábra). A 151. tétel értelmében a β síkra merőleges AB és PC egyenesek egy síkban fekszenek, tehát a C pont az α egyenes által határolt, a P ponton átmenő α félsíkban fekszik. Mivel az α tengely körül való forgásnál a β sík önmagába megy át, a 168. tétel szerint a PC egyenes képe

a β síkra merőleges $P'C'$ egyenes; C' jelenti a C pont képét. Mivel a PC szakaszt tartalmazó α félsíknak a megfelelő α' félsíkra való leképezése kongruens, tehát $PC = P'C'$. Hasonlóan, mert a β síknak önmagában való forgása kongruens leképezés, következik, hogy $CQ = C'Q'$; ezért a PCQ és a $P'C'Q'$ derékszögű háromszögek egybevágók, s így $PQ = P'Q'$.

Értelmezés. A térnek az α tengely mentén való eltolásait következőképen értelmezzük. Tekintsük az α egyenesnek valamely önmagában való eltolását (ennek értelmezését, l. 80. o.). Bármely az α egyenes által határolt α félsíknak van egy és csak egy olyan önmagában való eltolása (115. o.), mely az α egyenesen annak megadott eltolásával megegyezik; az α félsík minden P pontjának megfelel ennél a leképezésnél az α félsíknak egy meghatározott P' pontja. A tér minden P pontjához hozzárendeljük a fenti előírással meghatározott P' pontot; ezáltal a térnek önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését kapjuk, melyet a térnek az α tengely mentén való eltolásának nevezünk.

Az α félsík önmagában való eltolásánál ennek a félsíknak α -ra merőleges félsugarai, melyeknek kezdőpontjai az α egyenesen vannak, egymásba mennek át; ebből következik, hogy a térnek az α tengely mentén való eltolásánál az α -ra merőleges síkok egymásba mennek át. Ha a P, Q pontok egy az α -ra merőleges β síkban (de nem egy az α -t metsző egyenesen) fekszenek, és A

képezése; az a tengelyre vonatkozó csavarmozgásnál az a egyeneshez tartozó félsík-sor önmagába s az a -ra merőleges síkok összessége önmagába megy át.

Legyen T a térnek egy eltolása az a tengely mentén, és R egy forgása az a tengely körül. Jelöljük P -vel a tér valamely pontját, s ennek képeit következőképen: $T(P) = Q$, $R(P) = P'$, $RT(P) = T(P') = Q'$. A P és P' pontok egy az a -ra merőleges β síkban fekszenek; ennek a -val közös pontját jelöljük O -val, s legyen $T(O) = O'$. A β sík T -nél egy az a -ra merőleges β' síkba megy át; a Q , Q' , O' pontok a β' síkban fekszenek. Továbbá P és Q , s hasonlóan P' és Q' egy-egy az a egyenes által határolt α , illetve α' félsíkhöz tartoznak. A 156. tétel szerint tehát a $\angle POP'$ szög egyenlő a $\angle QO'Q'$ szöggel, s ebből következik, hogy $R(Q) = Q'$; mivel $R(Q) = TR(P)$, tehát $RT(P) = TR(P)$. Eszerint a TR és az RT leképezések azonosak, vagyis a térnek az a tengely körül való forgásai és az a tengely mentén való eltolásai felcserélhető leképezések.

Fenti tárgyalásaink eredményét a következő tételben foglaljuk össze:

169. tétel. A térnek az a tengelyre vonatkozó eltolásai, forgásai és csavarmozgásai a tér kongruens leképezései, melyek együtt kommutatív csoportot alkotnak.

27. §. A tér irányítása.

A tér valamely a egyenese körül való forgási irányt az előző paragrafusban úgy értelmeztük, mint az a egyeneshez tartozó félsík-sor valamely ciklikus irányítását. Legyen α olyan sík, melynek a -val egy és csak egy A közös pontja van; az a egyenes körül megadott egyik forgási irány meghatározza az α sík egyik irányítását a következő értelemben. Legyenek β , γ , δ az a egyenes által határolt félsíkok, és $(\beta\gamma\delta)$ ezeknek olyan ciklikus sorrendje, mely az a körül megadott forgási iránynak megfelel. A β , γ , δ félsíkoknak az α síkkal való metszésvonalai az A pontból kiinduló b , c , d félsugarak; ezeknek (bcd) ciklikus sorrendje meghatároz egy az A pont körül való forgási irányt az α síkban; a 128. tétel értelmében ezáltal az α síknak egyik irányítása egyértelműen meg van határozva.

Értelmezés. A tér irányítását valamely a egyenesnek egyik irányítása és az a körül megadott egyik forgási irány együttesen

értelmezik. Az a egyenes két irányítása és az a körül való két forgási irány közül egyiket pozitívnak, másikat negatívnak nevezzük; értelmezés szerint a *térnek megegyező irányítását* határozza meg a -nak pozitív iránya az a körül való pozitív forgási iránnyal, és a -nak negatív iránya az a körül való negatív forgási iránnyal; ezzel *ellenkező térirányítást* határoz meg a -nak negatív iránya az a körül való pozitív forgási iránnyal (vagy megfordítva).

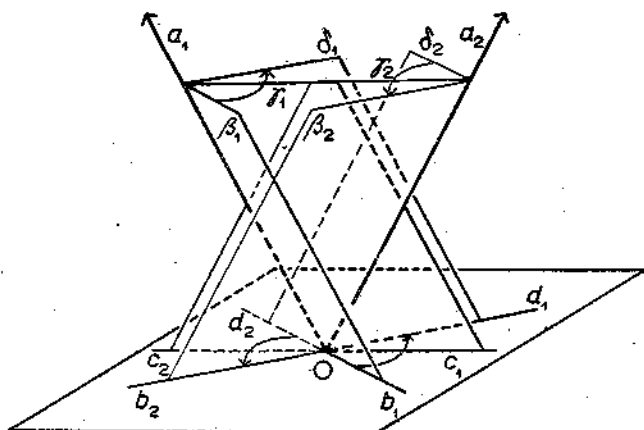
Értelmezés. Az a irányított egyenesnek valamely O pontja által meghatározott pozitív félsugarán értjük azt a félsugarat, melynek pontjai az egyenesen megadott irányítás értelmében „követik” az O pontot (l. a lineáris irányítás értelmezését a 79. oldalon); a -nak másik félsugarát negatívnak nevezzük. Ha az a egyenesnek az O pont által meghatározott két félsugara közül megadjuk azt, hogy melyik a pozitív, ezáltal meghatároztuk az a egyenesnek egyik irányítását. A tér irányításának meghatározására a következőben valamely irányított a egyenesnek pozitív félsugarát, s a félsugar körül (azaz a félsugáron átfektetett egyenes körül) való egyik forgási irányt fogjuk felvenni. Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy *a tér irányítását egy félsugar körül való egyik forgási irány értelmezi.*

Legyen a_1 és a_2 az O ponton áthaladó a egyenesnek az O pont által meghatározott két félsugara. Az a_1 és a_2 félsugarak körül megadott egy-egy forgási irány, melyek az a egyenes körül való, egymással ellenkező két forgási iránynak felelnek meg, egymással megegyező térirányításokat értelmeznek.

Értelmezés. Legyen a_1 és a_2 két az O pontból kiinduló félsugar, melyek nem fekszenek egy egyenesen. Jelöljük ε -nal az a_1 és a_2 félsugarakon átfektetett síkot; ennek az a_1 egyenese által határolt ama félsíkját, mely az a_2 félsugarat tartalmazza, γ_1 -gyel, s az a_2 egyenese által határolt ama félsíkját, mely az a_1 félsugarat tartalmazza, γ_2 -vel jelöljük. Legyenek továbbá β_1, δ_1 az a_1 , és β_2, δ_2 az a_2 egyenese által határolt félsíkok, melyek közül β_1 és β_2 az ε síknak egyik oldalán, δ_1 és δ_2 a másik oldalán fekszenek. Az a_1 és az a_2 félsugar körül való forgási irányokat, melyek rendre a $(\beta_1\gamma_1\delta_1)$, és a $(\delta_2\gamma_2\beta_2)$ ciklikus sorrendnek felelnek meg, *megegyező forgási irányoknak* nevezzük (118. ábra).

Ha α az O ponton áthaladó olyan sík, melynek ugyanazon az oldalán fekszenek az a_1 és a_2 félsugarak, akkor az a_1 körül való $(\beta_1\gamma_1\delta_1)$ és az a_2 körül való $(\delta_2\gamma_2\beta_2)$ forgási irányok az α síknak

ugyanazt az irányítást határozzák meg. Jelöljük ugyanis a $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ félsíkoknak az α síkkal való metszésvonalait rendre b_i, c_i, d_i -vel ($i=1, 2$); ezek az O pontból kiinduló félsugarak, melyek közül c_1 és c_2 egy egyenesnek (α és ε metszésvonalának) az O pont által



118. ábra.

meghatározott két félsugara; az α síkban ennek az egyenesnek egyik oldalán fekszenek a b_1 és b_2 , másik oldalán a d_1 és d_2 félsugarak; ezért az α síkban a $(b_1c_1d_1)$ és a $(d_2c_2b_2)$ irányítások meg-egyezők a 116. oldalon adott értelmezés szerint (118. ábra).

A fentihez teljesen hasonló megfontolással kapjuk a következő tételt:

170. tétel. Legyen a_1 és a_2 két az O pontból kiinduló félsugár, melyek nem fekszenek egy egyenesen, és legyen α az O ponton áthaladó sík, melynek nincs a_1 -gyel és a_2 -vel más közös pontja. Az a_1 és a_2 körül megadott, egymással megegyező forgási irányok az α síknak ugyanazt az irányítást, vagy két egymással ellenkező irányítást határozzák meg, aszerint, hogy az a_1 és a_2 félsugarak az α síknak ugyanazon az oldalán, vagy különböző oldalán fekszenek. — Ha α' olyan sík, mely nem megy át az O ponton, s melynek a_1 -gyel és a_2 -vel egy-egy közös pontja van, akkor az a_1 és az a_2 körül megadott, egymással megegyező forgási irányok az α' síknak ugyanazt az irányítást határozzák meg.

Ebből a tételből következik, hogy az a_1 és az a_2 körül megadott egymással ellenkező forgási irányok az O ponton áthaladó α síkban ugyanazt az irányítást, vagy egymással ellenkező irányításokat

határoznak meg aszerint, hogy az a_1 és a_2 félsugarak az α síknak különböző oldalán, vagy ugyanazon az oldalán fekszenek.

Legyenek a_1, a_2, a_3 , az O pontból kiinduló félsugarak; adjunk meg mindegyik körül egy-egy olyan forgási irányt, hogy az a_1 és az a_2 körül való, s ugyancsak az a_1 és a_3 körül való forgási irányok megegyezők legyenek: megmutatjuk, hogy ekkor az a_2 és az a_3 körül való forgási irányok is megegyezők. Legyen α olyan az O ponton áthaladó sík, melynek az a_1, a_2, a_3 félsugarakkal O -n kívül nincs közös pontja, s melynek különböző oldalán fekszenek az a_2 és a_3 félsugarak. Tegyük fel, hogy a_1 és a_2 az α síknak ugyanazon az oldalán fekszenek; ekkor tehát a 170. tétel szerint az a_1 és az a_2 körül megadott forgási irányok α -nak ugyanazt az irányítását, az a_1 és az a_3 körül megadott forgási irányok α -nak két ellenkező irányítását határozzák meg. Ebből következik, hogy az a_2 és az a_3 félsugarak körül megadott forgási irányok az α síknak két ellenkező irányítását határozzák meg, s mivel ezek a félsugarak α -nak különböző oldalán fekszenek, a 170. tétel szerint az a_2 és az a_3 körül megadott forgási irányok megegyezők.

Fenti tárgyalásunk eredményét a következő tételben mondjuk ki:

171. tétel. *A tér valamely O pontjából kiinduló félsugarak összessége irányítható, vagyis megadható minden az O pontból kiinduló félsugár körül egy-egy olyan forgási irány, hogy bármely két félsugár körül megadott forgási irányok megegyezők. Az O pontból kiinduló félsugarak összességének irányítását egyik ilyen félsugár körül megadott forgási irány meghatározza; a félsugár körül való két egymással ellenkező forgási iránynak az O pontból kiinduló félsugarak összességének két különböző irányítása felel meg.*

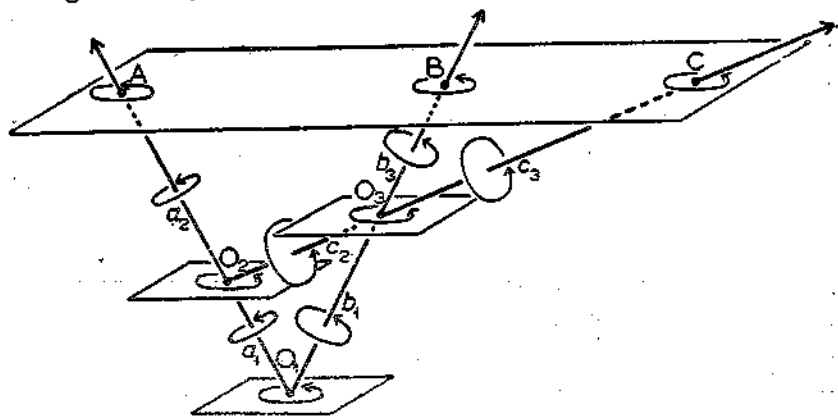
Megjegyzés. Az O ponton áthaladó egyenesek összessége nem irányítható.

Értelmezés. A térnek az O pontban való irányításán az O pontból kiinduló félsugarak összességének irányítását értjük. A félsugarak összességéhez rendelt két különböző irányításnak megfelel a térnek az O pontban való két különböző irányítása. Bármely az O pontból kiinduló félsugár körül megadott forgási irány meghatározza a térnek az O pontban való egyik irányítását.

Értelmezés. Legyen O és O' a tér két pontja; jelöljük a -val az $\vec{OO'}$ félsugarat, és a' -vel ennek az O' pont által meghatározott félsugarát. Az a és az a' körül megadott forgási irányokat megegyezőnek nevezzük, ha ezek ugyanannak az OO' egyenes

körül való forgási iránynak felelnek meg. — A térnek az O pontban és az O' pontban megadott irányításait megegyezőnek nevezzük, ha ezek az a és az a' félsugarak körül megegyező forgási irányoknak felelnek meg.

Legyen O_1, O_2, O_3 a tér három tetszőleges pontja; adjuk meg a térnek az O_1, O_2, O_3 pontokban egy-egy olyan irányítását, hogy az O_1 -ben és az O_2 -ben, s ugyancsak az O_1 -ben és az O_3 -ban megadott irányítások megegyezők legyenek; meg fogjuk mutatni, hogy ekkor az O_2 -ben és az O_3 -ban megadott irányítások is megegyezők. — Állításunk az értelmezésből közvetlenül következik abban az esetben, ha O_1, O_2, O_3 egy egyenesen fekszenek. — Ha O_1, O_2, O_3 nem fekszenek egy egyenesen, jelöljük a_1 -gyel az $\vec{O_1O_2}$ félsugarat, b_1 -gyel az $\vec{O_1O_3}$ félsugarat, a_2 -vel és b_2 -mal ezeknek az O_2 , illetve az O_3 pont által meghatározott félsugarát. Jelöljük továbbá c_2 -vel az $\vec{O_2O_3}$ félsugarat és c_3 -mal ennek az O_3 pont által meghatározott félsugarát



119. ábra.

(119. ábra). Vegyük fel az a_1 félsugar körül való egyik forgási irányt; ez meghatározza a térnek az O_1 pontban való irányítását, s ezáltal a b_1 körül való egyik forgási irányt. Az a_1 körül megadott forgási iránynak megfelel az a_2 félsugar körül való egyik forgási irány; ez utóbbi meghatározza a térnek az O_2 pontban való irányítását, s ezáltal a c_2 körül való egyik forgási irányt, ennek viszont megfelel a c_3 körül való egyik forgási irány. Hasonlóan, a b_1 körül meghatározott forgási iránynak megfelel a b_2 körül való egyik forgási irány. Azt kell igazolnunk, hogy a b_2 és a c_3 körül ilyen módon meg-

határozott forgási irányok megegyezők. Felveszünk az a_2 és a c_3 félsugáron egy-egy A és C pontot; mivel az összes fent nevezett pontok és félsugarak az $O_1O_2O_3$ síkban fekszenek, alkalmazhatjuk a 7. tételt az O_2AC háromszögre; ebből következik, hogy az AC egyenesnek van a b_3 félsugárral egy B közös pontja. Fekteszünk az AC egyenesen át az $O_1O_2O_3$ síktól különböző α' síkot; erre és az O_1 pontból kiinduló a_1 , b_1 félsugarakra alkalmazva a 170. tételt, adódik, hogy az a_1 és a b_1 félsugarak körül meghatározott forgási irányok az A és a B pontban az α' síknak megegyező irányításait határozzák meg. Hasonlóan adódik, hogy az O_2 pontból kiinduló a_2 és c_2 félsugarak körül felvett forgási irányok az A és a C pontban az α' síknak megegyező irányításait határozzák meg. A sík irányíthatóságára vonatkozó 128. tétel értelmében az α' síknak a B és a C pontban ilyenképen meghatározott irányításai szintén megegyezők. Mivel ugyancsak megegyezők az értelmezés szerint az α' síknak azok az irányításai, melyeket az a_1 és az a_2 félsugarak körül megadott forgási irányok határoznak meg, s ugyanez érvényes b_1 -re és b_3 -ra, továbbá c_2 -re és c_3 -ra, az előbbiekből következik, hogy a b_3 és a c_3 félsugarak körül meghatározott forgási irányok az α' síknak ugyanazt az irányítását határozzák meg, s ezért a 170. tétel szerint ezek a forgási irányok megegyezők. Eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

172. tétel. *A tér irányítható, vagyis megadható a tér minden pontjában egy-egy olyan irányítás, hogy bármely két ponthoz rendelt irányítások megegyezők. A tér irányítását valamely félsugár körül megadott forgási irány egyértelműen meghatározza; a félsugár körül való két különböző forgási iránynak a tér két irányítása felel meg: ezeket egymással ellenkezőnek, s közülük egyiket a tér pozitív, a másikat a tér negatív irányításának nevezzük.*

A tér irányítását egy háromoldalú testszög élének ciklikus sorrendjével határozhatjuk meg a következő módon. Legyen a, b, c az O pontból kiinduló három félsugár, melyek nem tartoznak egy síkhoz; legyen d az O pontból kiinduló olyan félsugár, mely az (abc) háromoldalú (tehát konvex) testszög belsejében halad; a d egyenese által határolt ama félsíkokat, melyek rendre az a, b, c félsugarakat tartalmazzák, jelöljük α, β, γ -val. Az a, b, c félsugarak (abc) ciklikus sorrendjének megfeleltetjük ezeknek a félsíkoknak $(\alpha\beta\gamma)$ ciklikus sorrendjét; ezáltal meghatároztunk a d félsugár körül egy forgási irányt, mely a 172. tétel értelmében meghatározza a

tér egyik irányítását. A térnek ilyen módon meghatározott irányítása független a d félsugár választásától; ennek igazolására felvesszünk az a, b, c félsugáron egy-egy tetszőleges A, B, C pontot, az ezeken átfektetett síkot jelöljük ε -nal, s az ABC háromszög belsejének a d félsugárral közös pontját D -vel (a D pont létezését illetően l. a 47. és 37. tételt). Az ε síkban az ABC háromszög csúcsainak (ABC) ciklikus sorrendje által meghatározott irányítás megegyezik azzal az irányítással, mely a d félsugár körül felvett $(\alpha\beta\gamma)$ forgási iránynak megfelel. Ha d' másik az O pontból kiinduló és az (abc) testszög belsejében fekvő félsugár, akkor az a d' körül való forgási irány, mely a fenti értelemben az (abc) ciklikus sorrendnek megfelel, az ε síkban ugyanazt az irányítást határozza meg, mint az ABC háromszög csúcsainak (ABC) ciklikus sorrendje. Ebből a 170. tétel szerint következik, hogy a d és a d' félsugarak körül az (abc) ciklikus sorrend által meghatározott térirányítások egymással megegyezők. — Ugyancsak a 170. tételből adódik a következő:

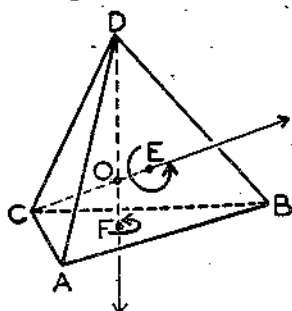
Ha (abc) és (abc') két olyan testszög, melyeknek c és c' élei a közös (a, b) lapnak különböző oldalán vannak, akkor az (abc) és a (bac') ciklikus sorrendek a térnek ugyanazt az irányítását határozzák meg.

A tér irányítását másképen egy tetraéder csúcsainak permutációival határozhatjuk meg a következő módon. Legyen $ABCD$ egy tetraéder; a csúcsok $ABCD$ sorrendjének, vagy permutációjának megfelelően a D -ből kiinduló $\vec{DA}$, $\vec{DB}$, $\vec{DC}$ félsugarak $(\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC})$ ciklikus sorrendjét; ez előbbi eredményünk értelmében meghatározza a térnek egyik irányítását; a tetraéder csúcsainak $(ABCD)$ permutációjához a térnek ezt az irányítását rendeljük hozzá.

Az $(ABCD)$, $(BCAD)$, $(CABD)$ permutációknak megfelelő térirányítások egymással megegyezők, az $(ABCD)$ és a $(BACD)$ permutációknak megfelelő térirányítások ellenkezők; ugyanis a síkra vonatkozó tételeink szerint (121. o.) az ABC síknak (ABC) , (BCA) , (CAB) irányításai megegyezők, az (ABC) és a (BAC) irányításai pedig ellenkezők; ebből a 170. tétel alapján adódik előbbi állításunk.

Az $(ABCD)$ és az $(ABDC)$ permutációknak megfelelő térirányítások egymással ellenkezők. Ennek igazolására jelöljük O -val a tetraéder belsejének valamely pontját, továbbá E -vel a CO egyenesnek és az ABD lapnak, F -fel pedig a DO egyenesnek és az

ABC lapnak közös pontját (54. tétel) (120. ábra). Az $(ABCD)$ permutációnak az értelmezés szerint a $\vec{DF}$ félsugár körül az a forgási irány felel meg, mely az ABC síkban az (ABC) forgási irányt, s ennek megfelelően az ABD síkban az (ABD) forgási irányt határozza meg; ezzel az értelmezés szerint megegyező az a térirányítás, melyet az $\vec{OD}$ félsugár és az ABD síkban az (ADB) irányítás határoz meg. — Az $(ABDC)$ permutációnak a $\vec{CE}$ félsugár körül, s így az $\vec{OE}$ félsugár körül is az a forgási irány felel meg, mely az ABD síkban az (ABD) irányítást határozza meg. Eszerint az $\vec{OD}$ és az $\vec{OE}$ félsugarak körül a fenti módon meghatározott forgási irányok az ABD sík két ellenkező irányítását, s ezért a 170. tétel szerint egymással ellenkező térirányításokat határoznak meg.



120. ábra.

A fentiek szerint a tetraéder csúcsainak két tetszőleges permutációja a térnek ugyanazt az irányítását, vagy két ellenkező irányítását határozza meg, aszerint, hogy az egyik permutációból a másikat páros, vagy páratlan számú felcseréléssel kapjuk.

A 170. tételből következik, hogy ha $ABCD$ és $ABCD'$ két olyan tetraéder, melyeknek D és D' csúcsai a közös ABC lapnak különböző oldalán vannak, akkor az $(ABCD)$ és az $(ABCD')$ permutációk a térnek ellenkező irányításait határozzák meg.

A térnek önmagára való kongruens leképezésénél a tér valamely irányításának a tér egyik meghatározott irányítása felel meg. Ennek igazolására jegyezzük meg, hogy a tér kongruens leképezésénél valamely a egyenes egyik irányának megfelel az a' képegynes egyik meghatározott iránya (75. tétel). Az a egyeneshez tartozó félsík-sor az adott leképezésnél az a' egyeneshez tartozó félsík-sorba megy át, s a félsík-sor elemeinek ciklikus elrendezése változatlan marad (alkalmazzuk a 102. tételt a félsík-sornak egy az a -ra merőleges síkkal való metszetére); ezért az a körül való egyik forgási iránynak az a' körül való egyik forgási irány felel meg. Ha a_1 és a_2 két az O pontból kiinduló félsugár, a'_1 , a'_2 ezeknek, és O' az O pontnak a képe, akkor az a_1 és a_2 körül megadott, egymással megegyező forgási irányoknak az a'_1 és a'_2 körül egy-

mással megegyező forgási irányok felelnek meg. Ebből következik, hogy a térnek az O pontban megadott forgási irányának a leképezésnél az O' pontban egyik meghatározott irányítása felel meg. Ha ezek a térirányítások megegyezők, akkor bármely más Q pontra, s ennek Q' képpontjára vonatkozóan is megegyezők; ez a 168. és 172. tétel alapján hasonló megfontolással adódik, mint amelyet a síkra vonatkozó megfelelő tétel bebizonyításánál alkalmaztunk (l. 122. o.). Aszerint, hogy az O és az O' ponthoz tartozó térirányítások, melyek az adott leképezésnél egymásnak megfelelnek, megegyezők, vagy ellenkezők, azt mondjuk, hogy a *leképezés megtartja, vagy megfordítja a tér irányítását*.

Megjegyzés. A térnek olyan kongruens leképezése, mely valamely α síkot önmagába visz át, s ennek a síknak az irányítását megtartja, a tér irányítását megtartja, vagy megfordítja aszerint, hogy az α sík által meghatározott két térrész a leképezésnél önmagába, vagy egymásba megy át (l. 168., 170. és 172. tételt). Ebből következik, hogy a *térnek az α síkra vonatkozó tükrözése megfordítja a tér irányítását*.

A térnek egy a tengelyre vonatkozó eltolása, forgása, vagy csavarmozgása megtartja a tér irányítását, mivel az a egyenes iránya, s a körülötte való forgási irány a leképezésnél változatlan marad.

A térnek két az irányítást megtartó, vagy két az irányítást megfordító leképezéséből alkotott szorzat a térnek az irányítását megtartó leképezése; egy az irányítást megtartó és egy az irányítást megfordító leképezésnek a szorzata megfordítja a tér irányítását. Eszerint páros, illetve páratlan számú az irányítást megfordító leképezésnek a szorzata megtartja, illetve megfordítja a tér irányítását.

28. §. A tér mozgásai.

Értelmezés. A tér olyan kongruens leképezését, mely a tér irányítását megtartja, a *tér mozgásának* nevezzük.

173. tétel. *A tér mozgásai csoportot alkotnak.*

Ugyanis, mint a 27. §. végén megjegyeztük, a tér bármely két az irányítást megtartó leképezésének a szorzata megtartja a tér irányítását.

A 165. tételből adódik a következő tétel:

Ha a tér valamely kongruens leképezésének négy nem egy síkban fekvő fixpontja van, akkor a leképezés az azonosság. —

Ha a térnek két kongruens leképezése egymással megegyező négy nem egy síkban fekvő pontban, akkor a két leképezés egymással azonos.

Ebből a 161. tételre való tekintettel adódik a következő tétel:

Ha a tér valamely kongruens leképezésének három nem egy egyenesen fekvő fixpontja van, akkor a leképezés vagy az azonosság, vagy a három fixponton átfektetett síkra vonatkozó tükrözés. — Ha tehát a tér két mozgása egymással megegyező három nem egy egyenesen fekvő pontban, akkor a két mozgás egymással azonos.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

174. tétel. *Ha a tér valamely kongruens leképezésének fixpontjai A és B , akkor az AB egyenes minden pontja fixpont. Ha a leképezésnek az AB egyenes pontjain kívül nincs más fixpontja; akkor a leképezés az AB tengely körül való forgás.*

Bizonyítás. A tétel első állítása a 80. tétel közvetlen következménye. — Az AB egyenesre merőleges, az A ponton átfektetett síkot jelöljük α -val; a 168. tétel szerint az adott leképezésnél az α sík önmagába megy át. Feltevésünk folytán az α síkban a leképezésnek nincs A -n kívül fixpontja, s ezért a leképezés az α síkban egy az A pont körül való forgással megegyezik (132. tétel). Jelöljünk b -vel egy az α síkban fekvő és az A pontból kiinduló félsugarat, és b' -vel ennek a képét; legyenek β és β' az AB egyenes által határolt ama félsíkok, melyek rendre a b illetve a b' félsugarat tartalmazzák. A térnek az AB egyenes körül (β , β') lapszöggel való forgása szintén megegyezik az α síkban ennek a $\sphericalangle(b, b')$ szöggel való forgásával. Ebből fenti tételeink szerint következik, hogy az adott leképezés a térnek az AB tengely körül (β , β') lapszöggel való forgásával azonos.

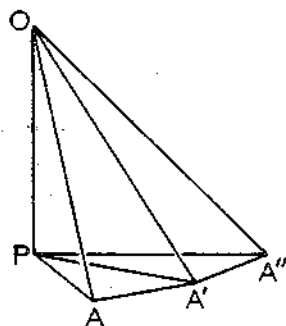
175. tétel. *Ha a tér valamely mozgásnak van fixpontja, akkor van legalább két fixpontja, s az adott mozgás az ezeken a fixpontokon áthaladó tengely körül való forgás, vagy az azonosság.*

Bizonyítás. Legyen O az adott mozgásnak fixpontja; legyen A tetszőleges olyan pont, mely képétől, A' -től, különböző; jelöljük A'' -vel A' képét.

Ha az A és az A'' pontok egybeesnek, akkor az A , A' pontok β középsíkja, mely az $OA = OA'$ egyenlőség szerint tartalmazza az O fixpontot, az adott mozgásnál önmagába megy át, mégpedig megfordított irányítással (l. a 184. oldalon levő Megjegyzést). A 132. tétel szerint a β síknak ez a leképezése egy tükrözés valamely

az O ponton áthaladó b tengelyre vonatkozóan; a tér adott mozgása a b tengely körül való félforgás (174. tétel).

Ha az A és az A'' pontok különbözők, akkor az A, A', A'' pontok nem fekszenek egy egyenesen, mivel $OA = OA' = OA''$ (115. tétel). Az O ponton át bocsássunk az $\alpha = A'A''$ síkra merőleges a egyenest; ha O az α síkban fekszik, jelöljük P -vel az a egyenesnek tetszőleges az O -tól különböző pontját; ellenkező esetben pedig jelentse P az a egyenesnek az α síkkal való metszéspontját, mely a 120. tétel szerint az A, A', A'' pontoktól különböző (121. ábra). Az $OA = OA' = OA''$ egyenlőségből következik, hogy



121. ábra.

az OPA, OPA', OPA'' derékszögű háromszögek egybevágók (122. tétel); ezért $PA = PA' = PA''$. Mivel továbbá $AA' = A'A''$, tehát $OPA'A \equiv OPA'A''$ és $OPAA' \equiv OPA'A''$. Az első egybevágóságból következik, hogy az egymástól különböző A és A'' pontok középsíkja az OPA' sík, s ezért sem az O, A, A', P pontok, sem az O, A', A'', P pontok nem fekszenek egy síkban. Jelöljük P' -vel P -nek az adott mozgásnál származó képét; az $OPAA'$ tetraéder képe az adott mozgásnál az

$OP'A'A''$ tetraéder, s így $OPAA' \equiv OP'A'A''$; ebből és a fenti egybevágóságból következik, hogy $OPA'A'' \equiv OP'A'A'$. A 161. tétel szerint a P és P' pontok vagy egybeesnek, vagy egymás tükörképei az $OA'A''$ síkra vonatkozóan. Utóbbi esetben azonban az $(OPA'A'')$ és az $(OP'A'A'')$ térirányítások ellenkezők, s mivel A és A'' az OPA' sík különböző oldalán fekszenek, tehát az $(OPAA')$ és az $(OPA'A'')$ térirányítások megegyezők (l. 183. o.); eszerint az $(OPAA')$ és az $(OP'A'A'')$ térirányítások ellenkezők, ami azt jelenti, hogy az adott leképezés megfordítja a tér irányítását, feltevésünkkel ellentétben. — Ezért tehát a P pont egybeesik képével P' -vel, vagyis P az adott mozgás fixpontja, és a 174. tétel szerint a mozgás a térnek az OP tengely körül való valamely forgása.

Megjegyzés. A térnek egy az OP tengely körül való forgását szorozzuk meg az O ponton áthaladó, az OP -re merőleges síkra vonatkozó tükrözéssel; ez a szorzat a térnek olyan kongruens leképezését adja, melynek egyetlen fixpontja az O pont; ez a leképezés megfordítja a tér irányítását. — Ha az OP tengely körül

való félforgást szorozzuk az O ponton áthaladó és az OP -re merőleges síkra vonatkozó tükrözéssel, akkor a térnek olyan *involutorius* leképezését kapjuk, melynél minden Q pontnak az O pontra vonatkozó tükrörképe, vagyis az OQ egyenesnek az a Q' pontja felel meg, melyre a QOQ' elrendezés és az $OQ = OQ'$ egyenlőség áll fenn. A térnek ezt a leképezését az O pontra vonatkozó tükrözésnek nevezzük.

Ha a térnek egy az irányítást megfordító kongruens leképezésénél van egy O fixpont, akkor ez a leképezés előállítható mint egy az O pontra vonatkozó tükrözésnek s egy az O ponton áthaladó a tengely körül való forgásnak, s ugyancsak mint egy az a tengely körül való forgásnak s az a tengelyre merőleges, az O ponton átmenő α síkra vonatkozó tükrözésnek a szorzata. (Ezek a szorzatok felcserélhetők.)

Szorozzuk meg ugyanis az adott S leképezést, melynek fixpontja O , a térnek az O pontra vonatkozó T tükrözésével; mivel ez a két leképezés megfordítja, a kettőnek a szorzata megtartja az irányítást; ez a szorzat a 175. tétel szerint tehát egy R forgás valamely az O ponton áthaladó a tengely körül; ennek a forgásnak és az O pontra vonatkozó tükrözésnek a szorzata az adott S leképezés: $S = RT$. — Jelöljük α -val az O ponton áthaladó, az a egyenesre merőleges síkot. Az a egyenes az adott S leképezésénél is, s az α síkra vonatkozó S' tükrözésnél is megfordított irányítással önmagába megy át. Az SS' szorzat a térnek olyan mozgása, mely az a egyenest megmaradó irányítással önmagába viszi át, s melynek fixpontja az O pont; ez tehát egy forgás az a tengely körül; ebből: $S = RS'$. — Ebből következik az is, hogy ha a térnek egy az irányítást megfordító leképezésénél van két fixpont, akkor a leképezés a tér tükrözése valamely síkra vonatkozóan.

176. tétel. A térnek az O ponton áthaladó egyenesek körül való forgásai csoportot alkotnak.

Bizonyítás. Ha ugyanis R_1 és R_2 két olyan forgás, melyeknek tengelyei átmennek az O ponton, akkor O fixpont az R_1R_2 leképezésnél; az R_1R_2 leképezés, mivel két mozgás szorzata, maga is a térnek egy mozgása (173. tétel); a 175. tétel szerint tehát R_1R_2 valamely az O ponton átmenő egyenes körül való forgás.

Értelmezés. A térnek az O pont körül való forgásán értjük bármely az O ponton áthaladó egyenes körül való forgását.

A 176. tétel így fogalmazható meg: a térnek az O pont körül való forgásai csoportot alkotnak.

177. tétel. Legyen a és b két az O ponton áthaladó és egymásra merőleges egyenes. A térnek az O pont körül való bármely forgása előállítható mint az a és b tengelyek körül való forgások szorzata.

Bizonyítás. Jelöljük c -vel az (a, b) síkra merőleges és az O ponton átmenő egyenest; legyen d egy tetszőleges az O ponton átmenő egyenes. Jelöljük R_a -val az a tengely körül való egyik olyan forgást, mely az (a, d) síkot az (a, c) síkba viszi át; a d egyenesnek az R_a forgásnál származó képét jelöljük $d' = R_a(d)$ -vel (ha d az (a, c) síkban fekszik, akkor legyen R_a az azonosság és $d' = d$). A b tengely körül való bármely forgásnál a b -re merőleges (a, c) sík önmagába megy át; jelöljük R_b -vel a b tengely körül való egyik olyan forgást, mely d' -t a -ba viszi át. Az $R_a R_b$ mozgásnál a d egyenes a -ba megy át; az $R_a R_b$ mozgást jelöljük T -vel. Ha R_a jelent egy tetszőleges forgást a d tengely körül, akkor a $T^{-1} R_a T$ mozgásnál az a egyenes pontjai fixpontok, tehát ez a mozgás egy forgás az a tengely körül, jelöljük ezt R'_a -vel: $R'_a = T^{-1} R_a T$. Ebből a vonatkozásból adódik: $R_a = T R'_a T^{-1}$, vagy T helyett $R_a R_b$ -t és T^{-1} helyett $R_b^{-1} R_a^{-1}$ -et téve:

$$R_a = R_a R_b R'_a R_b^{-1} R_a^{-1}.$$

Értelmezés. A térnek azok a pontjai, melyeknek az O ponttól való távolságai egymással egyenlők, gömböt alkotnak; O a gömb középpontja. A térnek minden az O -tól különböző pontján egy és csak egy olyan gömb megy át, melynek O a középpontja.

A térnek az O pont körül való forgásainál minden az O középponttal bíró gömb pontjai egymásba mennek át. Az O pont körül való forgások csoportja egy az O középponttal bíró gömbön tranzitív, vagyis a gömb bármely pontját a csoport alkalmas eleme annak bármely más pontjába átviszi; de nem egyszeresen tranzitív, mert a gömb két tetszőleges A és B pontjához több olyan az O pont körül való forgás tartozik, mely A -t B -be viszi át.

Értelmezés. Az α sík aequidistans felületén azoknak a pontoknak az összességét értjük, melyek az α síknak ugyanazon az oldalán fekszenek, s melyeknek az α síktól való távolságai egymással egyenlők. A térnek minden pontján az α síknak egy és csak egy aequidistans felülete megy át.

A térnek azok a mozgásai, melyek az α síkot megmaradó irányítással önmagába viszik át, csoportot alkotnak, mely az α síkon

tranzitív. Ennek a csoportnak bármely leképezésénél az α sík mindegyik aequidistans felülete önmagába megy át.

178. tétel. A tér bármely mozgása előállítható két forgás szorzataként, s ugyancsak egy eltolás és egy forgás szorzataként.

Bizonyítás. A tér azonos leképezése bármely tengely körül való félforgásnak a négyzete. Ha az adott mozgás nem az azonosság, akkor legyen A a térnek egy olyan pontja, mely képétől, A' -től, különböző. Az adott mozgást szorozzuk meg az AA' szakasz középpontja körül való valamely félforgással; ez a szorzat a térnek olyan mozgása, melynél A fixpont, ez tehát egy az A ponton áthaladó tengely körül való forgás (175. tétel). Ennek a forgásnak és az AA' szakasz középpontja körül alkalmazott félforgásnak a szorzata az adott mozgás. — Hasonlóan előállítható az adott mozgás mint az AA' szakasszal való eltolásnak és egy az A' pont körül való forgásnak, vagy mint egy az A körül való forgásnak és az AA' szakasszal való eltolásnak a szorzata.

29. §. Térbeli egyenes-nyalábok.

Értelmezés. Térbeli egyenes-nyalábon a tér egyeneseseinek olyan összességét értjük, melyre nézve a következő feltételek teljesülnek:

1. A tér minden pontján a nyalábnak legalább egy egyenese megy át.

2. A nyaláb bármely két egyenese egy síkban fekszik.

3. A nyaláb egyenesein a homolog pontok vonatkozása tranzitív (l. 129. o.).

Értelmezés. Legyen a és b két tetszőleges olyan egyenes, melyek egy γ síkban fekszenek; az ezek által meghatározott (a, b) nyalábot a következő előírással értelmezzük: 1. Ha C a γ sík tetszőleges pontja, akkor az (a, b) nyalábnak a C ponton áthaladó egyenese értelmezés szerint az (a, b) seregnek a C ponton áthaladó egyenese (l. 22. §.). 2. Ha C a térnek olyan pontja, mely nem tartozik a $\gamma = (a, b)$ síkhoz, jelöljük c -vel az a egyenesen és a C ponton átfektetett $\beta = (a, C)$ síknak a b egyenesen és a C ponton átfektetett $\alpha = (b, C)$ síkkal való metszéspontját; értelmezés szerint c az (a, b) nyalábnak a C ponton áthaladó egyenese.

Az értelmezésből következik, hogy ha az a és b egyeneseknek van közös pontja, O , akkor az (a, b) nyaláb az O ponton áthaladó

egyenesek összessége. Ha az a és b egyeneseknek van közös merőlegese, akkor van egy olyan sík, mely az a és b egyenesekre merőleges, s az erre a síkra merőleges egyenesek összessége alkotja az (a, b) nyalábot (l. erre vonatkozóan a 152. és 153. tételleket). Mindkét esetben nyilván teljesülnek a fenti 1–3. feltételek.

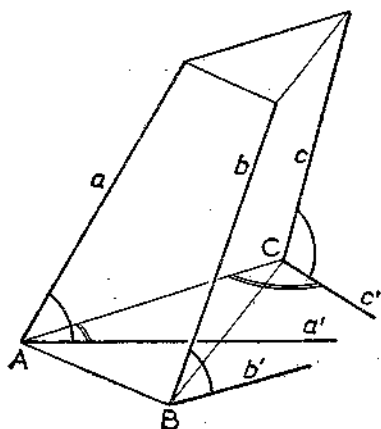
Tegyük fel, hogy az adott a és b egyeneseknek nincs sem közös pontjuk, sem közös merőlegesük. (A IV. fejezetben bevezetendő párhuzamossági axioma kizárja ezt a feltevést.) Meg fogjuk mutatni, hogy ebben az esetben is teljesülnek az (a, b) nyalábra vonatkozóan az egyenes-nyaláb fenti általános értelmezésében foglalt 2. és 3. feltételek; az 1. feltétel az (a, b) nyaláb meghatározása folytán önként teljesül.

Jelöljük A -val és B -vel az a és b egyenesek egy homolog pontpárját; legyen továbbá c az (a, b) nyalábnak olyan egyenese, mely nem fekszik az (a, b) síkban, s jelöljük C -vel a c egyenesnek azt a pontját, mely a b egyenes B pontjával homolog. Be fogjuk bizonyítani, hogy A és C az a és c egyenesek homolog pontjai.

Az A, B, C pontok nem fekszenek egy egyenesen, tehát meghatároznak egy ε síkot. Mivel feltevésünk szerint a -nak és b -nek nincs közös merőlegese, az a, b, c egyenesek közül egyik sem lehet merőleges az ε síkra. Ha például c merőleges volna az ε síkra, akkor a 152. tétel szerint a c -n átfektetett (b, C) sík is merőleges volna ε -ra; mivel B és C a b és c egyenesek homolog pontjai, tehát a c és CB egyenesek merőlegességéből következne, hogy b is merőleges a BC egyenesre és az ε síkra, s ezért az AB egyenesre is. Mivel A és B az a és b egyenesek homolog pontjai, tehát AB az a és b egyenesek közös merőlegese volna, feltevésünkkel ellentétben.

Tekintsük az ε sík által meghatározott egyik térrészt, s nevezzük a, b, c félsugárnak az a, b, c egyeneseknek rendre az A, B, C pont által

meghatározott ama félsugarát, mely a nevezett térrészhez tartozik. Ezeknek a félsugaraknak az ε síkra való (merőleges) vetületét jelöljük



122. ábra.

rendre a', b', c' -vel. Tegyük fel, hogy az (a, b) , (b, c) , (c, a) síkok közül egyik sem merőleges az ε síkra. (A kizárt esetet a következő meggondolás csekély módosításával intézhetjük el.) Az a', b' félsugarak az ε síkban az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek; hasonlóan a b', c' félsugarak a BC egyenesnek, és c', a' a CA egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek (122. ábra).

Feltevésünk szerint az (a, a') , (b, b') , (c, c') síkok merőlegesek az ε síkra, s mivel A és B az a és b egyeneseknek, B és C a b és c egyeneseknek homolog pontjai, tehát

$$\sphericalangle(a, \vec{AB}) = \sphericalangle(b, \vec{BA}) \quad \text{és} \quad \sphericalangle(b, \vec{BC}) = \sphericalangle(c, \vec{CB}),$$

hol a zárójelekben a, b, c a fent értelmezett félsugarakat jelentik; a 159. tétel szerint tehát

$$\sphericalangle(a', \vec{AB}) = \sphericalangle(b', \vec{BA}) \quad \text{és} \quad \sphericalangle(b', \vec{BC}) = \sphericalangle(c', \vec{CB}),$$

továbbá a 157. tétel szerint:

$$\sphericalangle(a, a') = \sphericalangle(b, b') = \sphericalangle(c, c').$$

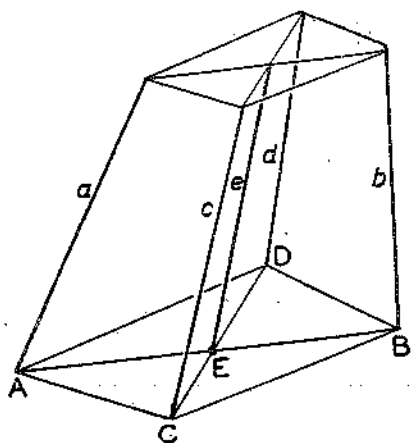
Mivel az (a, a') és a (c, c') síkok merőlegesek az ε síkra, az $\sphericalangle(a, a') = \sphericalangle(c, c')$ egyenlőségből a 160. tétel szerint következik, hogy az a' és a c' félsugarak az AC egyenessel egyenlő *belső*, vagy egyenlő *megfelelő* szögeket zárnak be. Az utóbbi eshetőséget kizárja az a tény, hogy A, B, C nem fekszenek egy egyenesen. Jelöljük ugyanis rendre a^0, b^0, c^0 -val a B, C, a C, A és az A, B pontpárok középvonalát, továbbá d^0 -val a C ponton áthaladó és az AC -re merőleges egyenest. Az ε síknak az illető egyenesekre vonatkozó tükrözését jelöljük S_a, S_b, S_c, S_d -val. Az ε síknak $S_a S_b S_c S_d$ leképezésénél a C pont önmagába megy át; ha a' és c' az AC egyenessel egyenlő megfelelő szögeket zárnának be, akkor ennél a leképezésnél a c' félsugár is önmagába menne át; ez a leképezés, mivel négy tükrözés szorzata, megtartja az ε sík irányítását, s így a 132. tétel szerint:

$$S_a S_b S_c S_d = 1, \text{ ebből: } S_a S_b S_d = S_c \text{ és } (S_a S_b S_d)^2 = 1.$$

Az utóbbi vonatkozás szerint az a^0, b^0, c^0 egyenesek egy sereghez tartoznak (138. tétel), az előbbi vonatkozás szerint d^0 ugyanehhez a sereghez tartozik (l. 132. o.). Minthogy ennek a seregnek b^0 és d^0 egyenesei merőlegesek az AC egyenesre, ezért a^0 és c^0 is merőlegesek AC -re (138. tétel); ebben az esetben az a^0 egyenes az egymást metsző BC és AC egyenesek közös merőlegese volna, ellentétben a 92. tétellel.

A fentiekből következik tehát, hogy az a' és c' félsugarak az AC egyenessel egyenlő *belső szögeket* zárnak be; a 159. tétel szerint következik ebből, hogy az a és c félsugarak az AC egyenessel ugyancsak egyenlő *belső szögeket* zárnak be, vagyis hogy A és C az a és c egyeneseknek *homolog pontjai*.

A c egyenesen és az (a, b) sík tetszőleges E pontján átfektetett (c, E) síknak az (a, b) síkkal való metszésvonalát jelöljük e -vel. Előbbi eredményünk szerint az a, b, c egyeneseken, s ugyancsak az a, c, e és a b, c, e egyeneseken a homolog pontok vonatkozása tranzitív; ebből következik, hogy az a, b, e egyeneseken a homolog pontok vonatkozása tranzitív, s ezért az (a, b) síkban az a, b, e egyenesek egy sereghez tartoznak.



123. ábra.

Ha c és d az (a, b) nyalábnak két olyan egyenese, melyek az (a, b) síknak különböző oldalán fektüsznek, jelöljük E -vel a c és d egyenesek egy-egy C és D pontját összekötő szakasznak az (a, b) síkkal való metszéspontját. A (c, E) sík is, a (d, E) sík is abban az e egyenesben metszi az (a, b) síkot, mely az (a, b) seregnek az E ponton áthaladó egyenese; eszerint az $(e, C) = (e, D)$ sík tartalmazza a c és d egyeneseket (123. ábra).

Ha c és d az (a, b) nyalábnak két tetszőleges egyenese, melyek az (a, b) síknak ugyanazon az oldalán fektüsznek, s melyek nem tartoznak egy az a -n átfektetett síkhoz, akkor vagy az (a, c) sík választja el egymástól a b és d egyeneseket, vagy az (a, d) sík választja el egymástól a b és c egyeneseket. Tegyük fel ugyanis, hogy a d egyenes valamely pontja az (a, c) síknak ugyanazon az oldalán fekszik, mint a b egyenes. Mivel a és d egy síkhoz tartoznak, d -nek nem lehet az (a, c) síkkal közös pontja, különben d az (a, c) síkhoz tartoznék, fejtévésünkkel ellentétben. Ezért d annak a lapszögnek a belsejében fekszik, melyet az (a, b) és az (a, c) síkoknak az a egyenes által határolt és rendre a b , illetve a c egyenest tartalmazó félsíkjai alkotnak. Ennek a lapszögnek egy

síkmetszetére alkalmazva a 37. tételt adódik, hogy az (a, d) sík elválasztja egymástól a nevezett lapszög két lapját, s így a b és a c egy-egy B és C pontját összekötő szakasznak van az (a, d) síkkal egy E közös pontja. A b egyenes az értelmezés szerint az (a, d) nyalábhoz, s hasonlóan, az a egyenes a (b, c) nyalábhoz tartozik, tehát az (a, d) és a (b, c) síkok e metszészvonala az (a, d) seregnek, s ugyancsak a (b, c) seregnek az E ponton áthaladó egyenese. A c -n átfektetett síkoknak az (a, d) síkkal való metszészvonalai az (a, e) seregnek az egyenesei; az (a, d) és az (a, e) seregek megegyezéséből következik tehát, hogy d egy a c egyenesen átfektetett síknak az (a, d) síkkal való metszészvonala. Ezzel igazoltuk azt, hogy az (a, b) nyaláb két tetszőleges egyenese egy síkhoz tartozik.

Legyenek c, d, f az (a, b) nyalábhoz, de nem az (a, b) síkhoz tartozó egyenesek. Előbbi eredményünk szerint a c, d, f egyenesek közül bármely kettő egy síkhoz tartozik. Ha f a (c, d) síkban fekszik, akkor a c, d, f egyenesek a (c, d) síknak az a -n átfektetett három síkkal való metszészvonalai, s ezért f a (c, d) sereghez, s így az értelmezés szerint a (c, d) nyalábhoz tartozik. — Ha pedig f nem fekszik a (c, d) síkban, akkor f egy a c -n és egy a d -n átfektetett síknak a metszészvonala, s ezért az értelmezés szerint f a (c, d) nyalábhoz tartozik. Ebből következik, hogy ha c és d az (a, b) nyaláb két tetszőleges egyenese, akkor a (c, d) nyaláb azonos az (a, b) nyalábbal.

Mint fent igazoltuk, az (a, b) nyaláb a, b, c egyenesein a homolog pontok vonatkozása tranzitív; utóbbi eredményünk alapján következik ebből, hogy az (a, b) nyaláb három tetszőleges egyenesén a homolog pontok vonatkozása tranzitív. Igazoltuk tehát azt, hogy a fenti előírással értelmezett (a, b) nyaláb eleget tesz az egyenes-nyaláb általános értelmezésében foglalt 1., 2., 3. feltételeknek.

Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze:

179. tétel. Egy síkhoz tartozó bármely két egyenes meghatároz a térben egy egyenes-nyalábot. Ennek a nyalábnak bármely két egyenese ugyanezt a nyalábot határozza meg. Ha a nyaláb két egyenesének van egy O közös pontja, akkor a nyaláb a térnek az O ponton áthaladó egyeneseiből áll. Ha a nyaláb két egyenesének van közös merőlegese, akkor a nyaláb egy síkra merőleges egyenesekből áll.

Értelmezés. Valamely egyenes-nyaláb episzféráján azoknak

a pontoknak az összességét értjük, melyek valamely A ponttal a nyaláb egyenesein homologok. A tér minden pontján egy egyenes-nyalábnak egy és csak egy episzférája megy át. Az egyenes-nyaláb bármely egyenesén átfektetett síknak a nyaláb bármely episzférájával való metszete egy epiciklus; ugyanis a nyalábnak azok az egyenesei, melyek ehhez a síkhoz tartoznak, egy egyenes-sereget alkotnak; ennek egy epiciklusa alkotja az adott episzférának a síkkal való metszetét.

A síkra vonatkozó 139. tétellel megegyező módon bizonyíthatjuk be a következő tételt:

180. tétel. *A tér bármely kongruens leképezésénél egy egyenes-nyalábhoz tartozó egyenesek ismét egy nyalábhoz tartozó egyenesekbe, s az egyik nyaláb episzférái a másiknak episzféráiba mennek át.*

Ha egy egyenes-nyaláb két egyenesének van közös pontja: O , akkor a nyaláb episzférái az O középponttal bíró gömbök. Ha a nyaláb két egyenesének van közös merőleges síkja: α , akkor a nyaláb episzférái az α sík és ennek aequidistans felületei.

Ha egy egyenes-nyaláb a egyenesén átfektetünk egy α síkot, a térnek az α síkra vonatkozó tükrözésénél a nyalábnak az α síkban fekvő egyenesei önmagukba mennek át s ezeknek az egyeneseknek a pontjai fixpontok. Tehát a 180. tétel szerint az α síkra vonatkozó tükrözésnél a nyaláb, s annak minden episzférája önmagába megy át.

Ha a térnek az a egyenes körül való forgásánál az a egyenes által határolt α félsík az α' félsíkba megy át, akkor az α síkjára vonatkozó és az (α, α') lapszög felezősíkjára vonatkozó tükrözések szorzata megegyezik az adott forgással. Előbbi eredményünk szerint tehát egy egyenes-nyaláb bármely egyenesé körül való forgás a nyaláb egyeneseit egymásba s a nyaláb minden E episzféráját önmagába viszi át. Az E episzférának ezt a leképezését az episzféra forgásának nevezzük.

Legyen E egy egyenes-nyaláb valamely episzférája, és ε egy az E -on fekvő epiciklus, vagyis a nyaláb valamely egyenesén átfektetett α síknak az E -nal való metszésvonala. Az α síknak az ε epiciklus mentén való eltolása (l. 137. o.) meghatározza a térnek egy és csak egy olyan mozgását, mely az α síkban a síknak ezzel az eltolásával megegyezik. A térnek ennél a mozgásánál az adott nyaláb egyenesei egymásba, s a nyaláb episzférái önmagukba mennek át. Az E episzférának ilyen módon értelmezett leképezését az ε epiciklus mentén való eltolásnak nevezzük.

A tér tükrözése egy olyan α síkra vonatkozóan, mely a nyaláb valamely egyenesén átmegy, a nyaláb bármely E episzféráját önmagába viszi át; az α síknak és az E episzférának metszészvonalát képező ε epiciklus minden pontja fixpont. Az E episzférának ilyen módon származó leképezését az ε epiciklusra vonatkozó tükrözésének nevezzük.

A fent nevezett leképezések szorzataként előállítható a térnek minden olyan kongruens leképezése, mely egy nyalábot s annak minden episzféráját önmagába viszi át. Az episzférán ezek által értelmezett leképezéseket az *episzféra kongruens leképezéseinek* nevezzük; ezeknek összessége csoportot alkot.

Megjegyzés. Az E episzférára, annak pontjaira és epiciklusaira nézve teljesülnek a síkra vonatkozó I. 1—3, II, III axiómák, ha azokban egyenesen epiciklust és síkon episzférát értünk, s ha az episzférán fekvő idomok egybevágóságát az episzféra kongruens leképezései alapján értelmezzük.

30. §. Gömbök és szabályos poliéderek.

Értelmezés. Az O középponttal bíró és az A ponton áthaladó gömb a térnek azokból a P pontjaiból áll, melyekre $OA = OP$. A tér valamely Q pontja értelmezés szerint a *gömb belsejéhez*, vagy a *gömb külsejéhez* tartozik aszerint, hogy $OQ < OA$, vagy $OQ > OA$.

Az O pontból kiinduló bármely félsugárnak a gömbbel egy és csak egy P közös pontja van (III. 2); az OP szakasz pontjai a gömb belsejéhez, az $\overline{OP}$ félsugárnak az OP szakaszon kívül fekvő pontjai a gömb külsejéhez tartoznak.

Értelmezés. Ha A a gömb tetszőleges pontja, és O a gömb középpontja, akkor az OA szakaszt a *gömb sugarának* nevezzük. Ha A és A' a gömb két tetszőleges pontja, az AA' szakaszt a *gömb húrjának* nevezzük. A 115. tétel folytán az AA' szakasz pontjai a gömb belsejéhez, az AA' egyenesnek az AA' szakaszon kívüli fekvő pontjai a gömb külsejéhez tartoznak. — Olyan húr, mely átmegy a gömb középpontján, a *gömb átmérőjének* nevezzük. A gömb átmérője a gömb sugarának kétszerese. A 113. tétel folytán a gömb bármely olyan húrja, mely nem átmérője a gömbnek, kisebb a gömb átmérőjénél.

A gömb középpontján átfektetett tetszőleges síknak a gömbbel

való metszete egy olyan kör, melynek középpontja a gömb középpontjával egybeesik, s melynek sugara a gömb sugarával egyenlő; ezeket a köröket a *gömb főkörreinek* nevezzük.

Ha az α síknak van egy gömbbel egy A közös pontja, akkor a gömb O középpontjából az α síkra bocsátott merőlegesnek B talppontja vagy egybeesik A -val, s ebben az esetben az α síknak nincs a gömbbel más közös pontja (115. tétel); vagy pedig A és B különbözők, s ebben az esetben az α síkban a B középponttal bíró és az A ponton áthaladó kör pontjai alkotják a gömbnek az α síkkal való metszetét. Ugyanis, ha A' ennek a körnek egy más pontja, akkor a $BA = BA'$ és $OB = OB$ egyenlőségek folytán az OBA és az OBA' derékszögű háromszögek egybevágók (122. tétel), s így $OA = OA'$, tehát A' az adott gömbnek pontja; ha pedig A' a gömbnek az α síkban fekvő pontja, akkor az $OA = OA'$ és $OB = OB$ egyenlőségekből következik, hogy az OBA és az OBA' derékszögű háromszögek egybevágók, s ezért $BA = BA'$, vagyis, hogy A' a nevezett körnek pontja.

Értelmezés. Ha az α egyenesnek a Γ gömbbel egy és csak egy A közös pontja van, akkor az α egyenest a *gömb érintőjének*, az A pontot *érintési pontnak* nevezzük. Ha az α egyenes a Γ gömbnek érintője, akkor α érintője annak a főkörnek is, melyben az a -n és a gömb középpontján átfektetett sík metszi a gömböt.

Értelmezés. Ha az α síknak a Γ gömbbel egy és csak egy A közös pontja van, akkor az α síkot a *gömb érintősíkjának*, az A pontot *érintési pontnak* nevezzük. Az érintősík merőleges az OA gömbsugarra.

A gömb A pontján áthaladó ama sík, mely merőleges az OA gömbsugarra, a gömbnek érintősíkja (a 115. tétel folytán); tehát a gömbnek minden pontjában van érintősíkja. A gömbnek az A érintési ponthoz tartozó érintő az A érintési ponthoz tartozó érintősíkban fekszenek. Ugyancsak a 115. tételből következik, hogy a gömb érintősíkjának összes pontjai, az A érintési pont kivételével, a gömb külsejében fekszenek. A gömb összes pontjai, az A pontot kivéve, az érintősíknak ugyanazon az oldalán fekszenek, mint a gömb középpontja.

Ha a P pont a Γ gömb külsejében fekszik, és ha A, A', A'' a gömbnek olyan pontjai, hogy a PA, PA', PA'' egyenesek a gömbnek érintői, akkor $PA = PA' = PA''$, tehát az A, A', A'' pontok nem fekszenek egy egyenesen (115. tétel), és az OP egyenes me-

röleget az $AA'A''$ síkra. Ennek a síknak a gömbbel való metszete egy k kör; a k kör bármely pontját a P ponttal összekötő egyenes érintője a gömbnek.

Legyen Γ és Γ' két gömb, melyeknek középpontjai az egymástól különböző O és O' pontok. Ha A a két gömb közös pontja, s ez rajta fekszik az OO' egyenesen, akkor azt mondjuk, hogy a két gömb érinti egymást az A pontban. Ebben az esetben Γ -nak és Γ' -nek nincs más közös pontja (113. tétel); a két gömb közül mindegyik vagy egészen a másiknak a belsejében, vagy egészen a másiknak a külsejében fekszik, az A ponttól eltekintve, és az A pontban közös az érintősíkjuk. — Ha a Γ és a Γ' gömbnek van egy olyan A közös pontja, mely nem fekszik rajta az OO' egyenesen, akkor jelöljük az A ponton át az OO' egyenesre merőlegesen fektetett α síknak az OO' egyenessel való metszéspontját B -vel; az α síkban a B középponttal bíró és az A ponton áthaladó k kör alkotja a Γ és Γ' gömbök egymással való metszetét (122. tétel).

A III. k axiomát (145. o.) feltéve, bebizonyíthatjuk még a következő tételeket: Ha egy egyenesnek van a Γ gömb belsejében pontja, akkor van a gömbbel pontosan két közös pontja. Ha egy síknak van a Γ gömb belsejében pontja, akkor van a gömbbel közös pontja, tehát a gömbnek a síkkal való metszete egy kör. Ha a Γ gömbnek van a Γ' gömb belsejében és külsejében legalább egy-egy pontja, akkor van a két gömbnek közös pontja, tehát a két gömb metszete egy kör.

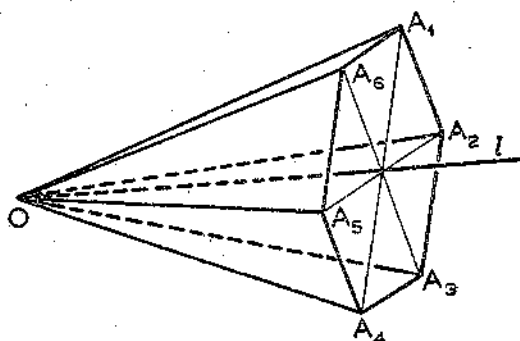
Értelmezés. Szabályos testszögön olyan konvex testszöget értünk, melynek összes élszögei egymással, és összes lapszögei egymással egyenlők.

Legyen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ egy szabályos testszög; csúcsát jelöljük O -val. Az (a_1, a_2) lap középsíkján értjük az $\angle(a_1, a_2)$ szögfelezőjén átfektetett, az (a_1, a_2) lapra merőleges síkot.

A testszög a_1, a_2, a_3 élein felveszünk egy-egy olyan A_1, A_2, A_3 pontot, melyre $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Az A_1, A_2 és az A_2, A_3 pontpárok középsíkja rendre az (a_1, a_2) lapnak, és az (a_2, a_3) lapnak a középsík-jával azonos (107. és 152. tétel); jelöljük ezeket α_1 -gyel és α_2 -vel. Az α_1 és α_2 síkoknak van egy közös pontja, O , az 1. tétel szerint tehát van a két síknak egy közös l egyenese. — Jelöljük β_1 -vel az a_1 élen és az l egyenesen átfektetett síkot. A β_2 sík az A_1, A_3 pontpár középsíkja. Ugyanis a szabályos testszögre vonatkozó értelmezésünk szerint

$\sphericalangle(a_1, a_2) = \sphericalangle(a_2, a_3)$, s mert $OA_1 = OA_2 = OA_3$, tehát a 104. tétel szerint $A_1A_2 = A_2A_3$. Legyen továbbá L az l egyenesnek O -tól különböző pontja; mivel L az A_1, A_2 és az A_2, A_3 pontpárok középsíkjaiban fekszik, tehát $A_1L = A_2L = A_3L$; a fenti vonatkozások folytán: $A_1A_2OL \equiv A_2A_3OL$, s ezért A_1 és A_3 egymás tükröképei a $\beta_2 = A_2OL$ síkra vonatkozóan; ebből következik az is, hogy β_2 az (a_1, a_2, a_3) lapszög felezősíkjá.

Feitevésünk szerint a testszög (a_1, a_2, a_3) és (a_n, a_1, a_2) lapszögei egyenlők; az α_1 síkra vonatkozó tükrözésnél az a_1, a_2 élek egymásba mennek át, az (a_1, a_2) sík által meghatározott bármelyik térrész önmagába megy át, s ezért a testszög (a_2, a_3) lapjának képe



124. ábra.

az (a_n, a_1) lap. Ennél a tükrözésnél az (a_1, a_2, a_3) lapszög felező síkjának, β_2 -nek, a képe a β_1 sík; ebből következik, hogy β_1 az (a_n, a_1, a_2) lapszög felező síkjá. Hasonlóan β_3 az (a_2, a_3, a_4) lapszög felező síkjá. Eszerint az (a_1, a_2) és az (a_2, a_3) lapok középsíkjai és az a_1, a_2, a_3 élekhez tartozó

lapszögek felező síkjai egy l egyenesen mennek át. Az $(1, 2, \dots, n)$ indexek ciklikus felcserélésével adódik ebből, hogy egy szabályos testszög lapjainak középsíkjai és lapszögeinek felező síkjai egy l egyenesen mennek át. (A 124. ábrán, $n=6$ esetében, a szabályos testszög lapszögeinek felező síkjai vannak feltüntetve.)

Értelmezés. Egy szabályos testszög lapjainak középsíkjai és a testszög lapszögeinek felező síkjait a szabályos testszög szimmetriasíkjaiknak, a szimmetriasíkok közös vonalát a szabályos testszög tengelyének nevezzük.

A térnek egy szabályos testszög szimmetriasíkjaire vonatkozó tükrözéseinek a testszög önmagába, annak élei egymásba mennek át. — A szabályos testszög l tengelye és a testszög élei által bezárt $\sphericalangle(a_1, l), \sphericalangle(a_2, l), \dots, \sphericalangle(a_n, l)$ szögek egymással egyenlők, mivel $\sphericalangle(a_1, l) = \sphericalangle(a_2, l)$. A térnek az l tengely körül való forgásai, melyeknél az a_1 élnek rendre az $a_2, a_3, \dots, a_n$ élek felelnek meg, a testszöget önmagába viszik át.

A fenti tárgyalásból következik, hogy ha egy szabályos testszög mindegyik a_i élén felveszünk egy olyan A_i pontot, melyre $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$, akkor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok egy az l tengelyre merőleges síkban fekszenek, és egy szabályos sokszögnek a csúcsai. — A szabályos sokszögekre vonatkozó egybevágósági tételből (149. o.) és a 165., 166. tételekből adódik a következő:

Ha egy szabályos testszögnek élszöge egy másik szabályos testszög élszögével, s az egyiknek lapszöge a másiknak lapszögével egyenlő, akkor a két szabályos testszög egybevágó, azaz megadható a térnek olyan kongruens leképezése, mely egyiket a másikba viszi át. Ebből speciálisan adódik, hogy az egyik és a másik testszög éleinek száma egyenlő.

Megjegyzés. A szabályos testszögeknek a fentivel aequivalens értelmezése a következő: Az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ testszöget szabályosnak nevezzük, ha van a térnek olyan mozgása, mely az $a_1, a_2, \dots, a_n$ éleket rendre az $a_2, a_3, \dots, a_n, a_1$ élekbe viszi át. (Kizárjuk azt az esetet, hogy az összes a_i él egy síkban fekszenek.) A 175. tételből következik, hogy a térnek ez a mozgása egy forgás valamely a testszög csúcsán áthaladó l tengely (a szabályos testszög tengelye) körül. — Ha ebben az értelmezésben a tér mozgásait a tér kongruens leképezéseivel helyettesítjük, a fogalomkör lényeges bővítéséhez, mégpedig a fent tárgyaltakon kívül a „nem konvex szabályos testszögekhez” jutunk; a következőben ezt melőzzük.

A térnek azok a mozgásai, melyek egy konvex testszöget önmagába visznek át, ciklikus forgáscsoportot alkotnak. Legyen ugyanis $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ az adott konvex testszög, s legyenek $a_{v_1}, a_{v_2}, \dots, a_{v_k}$ ennek azok az élei, melyekbe az $a_{v_1} = a_1$ él a térnek a testszöget önmagába átvivő mozgásainál átmegy ($v_1 < v_2 < \dots < v_k$). Az $(a_{v_1}, a_{v_2}, \dots, a_{v_k})$ testszög konvex és szabályos testszög; ennek tengelye körül való ama forgások, melyek a_{v_1} -et rendre az $a_{v_2}, a_{v_3}, \dots, a_{v_k}$ élekbe viszik át, annak a forgásnak a hatványai, mely a_{v_1} -et a_{v_1} -be viszi át; ezeknek összessége alkotja az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ testszög önmagába való mozgásainak a csoportját.

Értelmezés. Szabályos poliéderen olyan konvex poliédert értünk, melynek minden lapját egy-egy szabályos sokszög határolja, s melynek minden testszöge szabályos.

Egy szabályos poliéder összes élei egymással egyenlők. Ha két él a poliédernek két szomszédos lapjához tartozik, akkor mind-



egyikük egyenlő a két lap közös élével, s ezért a két adott él egymással is egyenlő. Mivel a poliéder összefüggő (54. o.), ebből következik fenti állításunk.

Egy *konvex poliéder élszögén* értjük a poliéder egy csúcsából kiinduló s a poliédernek ugyanahhoz a lapjához tartozó két él által bezárt szöget. Egy szabályos poliéder összes élszögei egymással egyenlők. Ha k_1, k_2, k'_1, k'_2 a szabályos poliédernek egy csúcsából kiinduló élek, melyek közül k_1 és k_2 egy laphoz, s k'_1 és k'_2 ugyancsak egy laphoz tartoznak, akkor $\sphericalangle(k_1, k_2) = \sphericalangle(k'_1, k'_2)$, mivel feltevésünk szerint a poliédernek az illető csúcsához tartozó testszöge szabályos, s ezért ennek összes élszögei egymással egyenlők. Ha k_1, k_2, k'_1, k'_2 a poliédernek ugyanahhoz a lapjához tartoznak, továbbá k_1 és k_2 egy csúcsból, s ugyancsak k'_1 és k'_2 egy csúcsból indulnak ki, akkor szintén $\sphericalangle(k_1, k_2) = \sphericalangle(k'_1, k'_2)$, mivel ennek a lapnak a határa egy szabályos sokszög, s ennek összes szögei egyenlők. Ebből a két speciális esetből következik először, hogy két olyan élszög, melyek szomszédos lapon vannak, egyenlők; másodsor, tekintettel a poliéder összefüggő voltára, hogy bármely két laphoz tartozó élszögek egyenlők.

A fenti két állítás összefoglalásából adódik, a szabályos sokszögek egybevágósági tétele alapján (149. o.), hogy egy szabályos poliéder bármely két lapját határoló szabályos sokszögek egybevágók.

Megjegyzés. Téves a szabályos poliédereknek azzal a feltétellel való értelmezése, hogy összes lapjaikat egybevágó szabályos sokszögek határolják. Például egy szabályos tetraéder (lásd lent) s ennek valamely lapjára vonatkozó tükörképe együtt olyan konvex poliédert alkot, melynek összes lapjai egybevágó szabályos háromszögek s amely mégsem szabályos.

Egy szabályos poliéder összes lapszögei egymással egyenlők. Ha a poliéder k_1 és k_2 éleinek közös végpontja a poliéder valamely csúcsa, akkor a poliédernek az ehhez a csúcsához tartozó testszöge szabályos lévén, ennek a testszögnek a k_1 és k_2 éleihez tartozó lapszögei egyenlők. Mivel a poliéder összefüggő, két tetszőleges k és k' éléhez megadható éleinek olyan $k = k_1, k_2, \dots, k_r = k'$ sorozata, melyben bármely két egymásra következő élnek van egy közös végpontja; az előbbi speciális esetből következik eszerint a poliéder bármely két lapszögének egyenlősége.

A szabályos poliéder lapszögeinek egyenlőségéből és élszögeinek egyenlőségéből következik a szabályos testszögek egybe-

vágóságára vonatkozó fenti tételünk szerint (199. o.), hogy egy szabályos poliéder összes testszögei egybevágók.

Fenti eredményeink szerint minden szabályos poliéder hálózata szabályos (l. 64. o.), vagyis egyrészt a poliéder minden lapjához ugyanannyi csúcsa, másrészt a poliéder minden csúcsához ugyanannyi lapja tartozik; ezeket a számokat jelöljük n -nel és m -mel.

A 64. oldalon közölt táblázatnak megfelelően egy szabályos poliéder lapjainak száma l , s az egy lapot határoló élek száma n a következő lehet:

$$l = 4, 6, 8, 12, 20;$$

$$n = 3, 4, 3, 5, 3.$$

A megfelelő szabályos poliédereket l -lapúnak, vagy másként rendre így nevezzük: szabályos tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder, ikosaéder. (Létezésüket illetően l. 204. o.)

Értelmezés. Egy szabályos poliéder tengelyein a következő egyeneseket értjük: 1. a poliéder valamely lapjának középpontján áthaladó, az illető lapra merőleges egyenest; 2. a poliéder valamely élének középpontjában az illető élre a hozzátartozó lapszög felező-síkjában emelt merőleges egyenest; 3. a poliéder bármely csúcsához tartozó testszögének a tengelyét. Ezeket rendre az illető laphoz, élhez és csúcshoz tartozó tengelynek nevezzük. — Valamely tengelyhez tartozó *perioduson* értjük az 1. esetben a poliéder lapját határoló sokszög n oldalszámát, a 2. esetben a 2 számot, a 3. esetben a poliéder egy csúcsából kiinduló élek m számát.

A szabályos sokszögekre, és a szabályos testszögekre vonatkozó egybevágósági tételek alkalmazásával adódik, hogy a szabályos poliédert önmagába viszik át a térnek következő forgásai: 1. Valamely laphoz tartozó tengely körül való forgások, melyek az illető lap csúcsait egymással ciklikusan felcserélik; ezeknek a száma (az azonosságot nem számítva) $n-1$. 2. Valamely élhez tartozó tengely körül való félforgás, mely az él két végpontját felcseréli. 3. Valamely csúcshoz tartozó tengely körül való forgások, melyek az illető csúcshoz tartozó testszög éleit egymással ciklikusan felcserélik; ezeknek a forgásoknak a száma $m-1$.

A szabályos poliéder bármely tengelyének a poliéderrel két közös pontja van (mint az 54. tétel alkalmazásával belátható); ezek közül mindegyik a poliédernek vagy egy csúcsa, vagy egy élének, vagy egy lapjának a középpontja. A poliéder összes tengelyei körül

való forgásainak a száma, hozzászámítva az azonosságot is, ezek szerint a következő (l. a 62. és 63. tételt):

$$N = \frac{1}{2} [l(n-1) + \epsilon + c(m-1)] + 1 = ln - cm = 2\epsilon.$$

Tetraéder esetében $N=12$, hexaéder és oktaéder esetében $N=24$, dodekaéder és ikosaéder esetében $N=60$. — Az N fenti kifejezéséből (sőt közvetlenül is) nyilvánvaló, hogy a szabályos poliéder bármely lapját bármely más lapjába a poliédernek n forgása, minden csúcsát minden más csúcsába m forgása, és minden élét minden más élébe a poliédernek két forgása viszi át.

A szabályos poliéder valamely tengelyéhez tartozó periodusok lehetséges értékeit tekintve adódik, hogy a poliéder bármely éléhez tartozó tengelynek a poliéderrel való másik metszéspontja szintén egy élnek a középpontja, s a tetraédert kivéve, minden laphoz és minden csúcshoz tartozó tengelynek a poliéderrel való másik metszéspontja szintén egy lapnak a középpontja, illetve a poliédernek egy csúcsa (l. a 64. oldalon közölt táblázatot).

Egy szabályos poliéder összes tengelyei egy egyenes-nyalábhoz tartoznak (l. 29. §.). Legyen ugyanis k a poliéder valamely éle, C ennek középpontja, A_1 és A_2 k végpontjai, λ_1 és λ_2 a k élhez tartozó lapok. A poliédernek az A_1 , A_2 csúcsokhoz tartozó tengelyeit a_1 , a_2 -vel, a λ_1 és a λ_2 lapok középpontjain áthaladó tengelyeit b_1 , b_2 -vel, a k él középpontján áthaladó tengelyét c -vel jelöljük. A k élhez tartozó lapszög felező síkjában fekszenek az a_1 , a_2 és c tengelyek. A λ_1 lapra merőleges és a λ_1 lap középpontján átfektetett ama síkok, melyek rendre az A_1 , A_2 , C ponton mennek át, tartalmazzák a b_1 tengelyt és rendre az a_1 , a_2 , c tengelyt. Az A_1 , A_2 pontpár középsíkja tartalmazza a b_1 , b_2 és a c tengelyt. Eszerint az a_1 tengely a (b_1, A_1) és a (c, A_1) síkok metszészvonala, s így az értelmezés szerint az a_1 egyenes a (b_1, c) nyalábhoz, s hasonlóan a (b_2, c) nyalábhoz tartozik. Ennek a két nyalábnak a_1 és c két közös egyenese, s így a két nyaláb egymással azonos. Ebből a megfontolásból következik, hogy az a_2 egyenes is ugyanehhez a nyalábhoz tartozik. Ennek az eredménynek ismételt alkalmazásával adódik, hogy *először* a poliédernek mindazok a tengelyei, melyek a poliéder egy lapjának a középpontján, továbbá az ezt a lapot határoló élek középpontjain és ennek a csúcsain mennek át, egy nyalábhoz tartoznak; *másodszor*, hogy a poliéder két szomszédos

lapjának ebben az értelemben megfelelő tengelyek is egy nyalábhoz tartoznak; ebből adódik végül, tekintettel a poliéder összefüggő voltára, hogy a poliéder összes tengelyei egy nyalábhoz tartoznak.

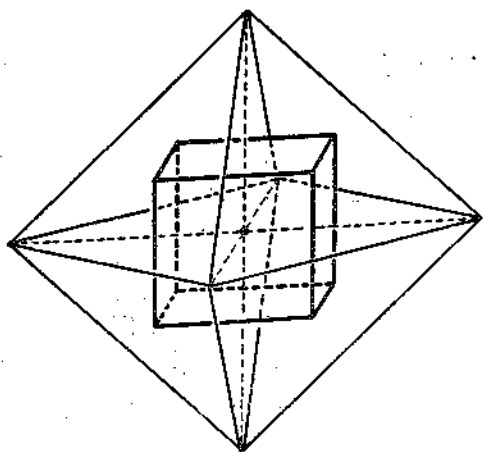
Legyen A a szabályos poliéder valamely csúcsa, k_1 és k_2 az A csúcshoz és a poliédernek ugyanahhoz a λ lapjához tartozó élék, C_1 és C_2 ezeknek a középpontjai, továbbá c_1 és c_2 a rajtuk áthaladó tengelyek. A 107. tételt a C_1C_2A egyenlőszárú háromszögre alkalmazva adódik: $\sphericalangle AC_1C_2 = \sphericalangle AC_2C_1$; a 124. tételeiből következik, hogy ezeknek a szögeknek a pótszögei is egyenlők, tehát, hogy c_1 -nek és c_2 -nek a λ síkra való vetületei a C_1C_2 egyenessel annak ugyanazon az oldalán egyenlő belső szögeket zárnak be. Ebből a 159. tétel szerint következik, hogy c_1 és c_2 a rajtuk átfektetett síkban a C_1C_2 egyenessel annak ugyanazon az oldalán egyenlő belső szögeket zárnak be, vagyis C_1 és C_2 a c_1 és c_2 egyenesek homolog pontjai. Mivel a poliéder bármely két k és k' éléhez megadható a poliéder éleinek olyan $k = k_1, k_2, \dots, k_r = k'$ sorozata, melyben bármely két egymásra következő él a poliédernek ugyanahhoz a lapjához és ugyanahhoz a csúcsához tartozik, az előbbi eredményünkből következik, mivel egy nyaláb egyenesein a homolog pontok megfeleltetése tranzitív, hogy ha k_1 és k_2 a poliédernek két tetszőleges éle, akkor ezeknek C_1 és C_2 középpontjai homolog pontok a szabályos poliédernek a C_1 -en és a C_2 -n áthaladó tengelyein. Jelöljük C_1 -vel a C_1 ponton áthaladó tengelynek a poliéderrel való másik metszéspontját. Mivel a c_1 tengelyhez tartozó periodus 2, mint fent már megjegyeztük, C_1 szintén a poliéder valamely élének a középpontja. Előbbi eredményünk szerint a c_2 egyenes C_2 pontjával homologok a c_1 egyenesen az egymástól különböző C_1 és C_1' pontok. Mivel pedig két egymást nem metsző egyenesen a homolog pontok megfeleltetése egyértelmű (l. 127. o.), ebből következik, hogy a c_1 és c_2 tengelyeknek van egy O közös pontja. A (c_1, c_2) nyaláb eszerint az O ponton áthaladó egyenesek összessége; az előbbi bekezdés szerint a poliéder összes tengelyei ehhez a nyalábhoz tartoznak. Az O pontot a *szabályos poliéder középpontjának* nevezzük. Eredményünket a következő tétel fejezi ki:

Egy szabályos poliéder összes tengelyei egy O ponton, a szabályos poliéder középpontján mennek át.

Egy szabályos poliéder összes lapjának középpontjai a poliéder O középpontjától egyenlő távolságban vannak, s így ezek a

pontok egy olyan gömbön fekszenek, melynek középpontja a szabályos poliédernek O középpontja; a poliéder lapjain átfektetett síkok ennek a gömbnek érintősfkjai. — Hasonlóan egy az O középponttal bíró gömbön fekszenek a szabályos poliéder összes csúcsai; a poliéder összes lapjai ennek a gömbnek a belsejében fekszenek (eltekintve a csúcsoktól).

Ha a térnek egy T mozgása valamely szabályos poliéder csúcsait egymásba viszi át, akkor ennek az A_1 csúcsához tartozó tengelyét a $T(A_1) = A_k$ csúcshoz tartozó tengelyébe viszi át. Mivel a poliéder O középpontjának az összes csúcstól való távolságai egyenlők, tehát a 165. tétel folytán $T(O) = O$. A 175. tételből következik, hogy T a térnek egy forgása valamely az O közép-ponton áthaladó tengely körül; ez a tengely szükségképen a szabályos poliéder valamely lapjához, éléhez, vagy csúcsához tartozó tengellyel azonos.



125. ábra.

Eddigi axiomáink alapján szerkeszthetünk szabályos tetraédert, hexaédert és oktaédert a következő módon.

Vegyünk fel két egymásra merőleges a, b egyenest, s a rajtuk átfektetett síkra merőleges c egyenest, mely a és b közös O pontján megy át. Az O ponttól az a, b, c egyenesekre mindkét irányban egymással egyenlő $OA, OA', OB, OB', OC,$

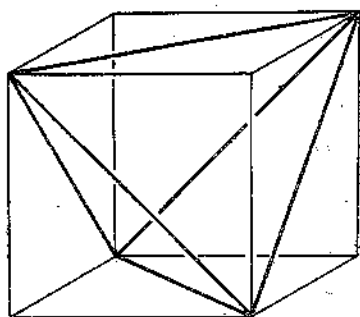
OC' szakaszokat mérünk fel. Ezeknek A, A', B, B', C, C' végpontjai egy szabályos oktaédernek a csúcsai; az oktaéder lapjai az $ABC, AB'C, ABC', AB'C', A'BC, A'B'C, A'BC', A'B'C'$ szabályos háromszögű lapok. — Ezeknek a szabályos háromszögeknek a középpontjai egy szabályos hexaédernek a csúcsai (125. ábra). A szabályos hexaédernek egyik csúcsa, s a hozzá tartozó lapoknak szemben fekvő csúcsai egy szabályos tetraéder csúcsait adják (126. ábra).

Megjegyzés. A szabályos poliéderek további két esetével

a IV. fejezetben fogunk foglalkozni. A párhuzamossági axioma alkalmazásával a hexaéder egyszerűbb szerkesztéséhez is eljutunk.

Ha egy konvex poliéder a térnek az a tengely körül való valamely forgásánál önmagába megy át, akkor az a tengelynek van a poliéderrel két közös pontja.

Ezt a tételt következőképpen bizonyítjuk be. Jelöljük T -vel a térnek az a tengely körül való olyan forgását, mely a Π konvex poliéder csúcsait egymásba viszi át. T valamely hatványánál a



126. ábra.

poliéder mindegyik csúcsa önmagába megy át (mivel a poliéder csúcsainak csak véges sok permutációja van) s így T -nek ez a hatványa az azonosság (l. a 165. tételt, vagy ennek a 184—185. oldalon felsorolt következményeit); eszerint T egy *periodikus* forgás. — Legyen P_1 egy a Π poliéder belsejében fekvő pont; ennek a T hatványainál származó $P_1, P_2, \dots, P_n$ képei egy az a tengelyre merőleges síkban fekszenek, s (ha $n > 2$) egy szabályos sokszögnek a csúcsai. Ennek a sokszögnek (illetve, ha $n = 2$, akkor a $P_1 P_2$ szakasznak) O középpontja a T forgás fixpontja, tehát az a tengelyhez tartozik. Mivel a T forgásnál a Π poliéder belseje önmagába megy át, a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok Π belsejében fekszenek, s mert Π konvex, tehát a P_i pontokat burkoló konvex sokszög is Π belsejéhez tartozik; eszerint O a Π poliéder belsejében fekszik. Az O ponton áthaladó a tengelynek az 54. tétel szerint van a Π poliéderrel két közös pontja.

A térnek azok a mozgásai, melyeknél egy konvex poliéder, s annak valamely P pontja önmagába megy át, ciklikus forgáscsoportot alkotnak. Ennek igazolására jegyezzük meg először, hogy a 175. tétel szerint ezek a mozgások a tér forgásai a P pont körül. Ha P a poliéder valamely λ lapjának belső pontja, akkor a λ lap minden olyan mozgásnál, mely a poliédert és a P pontot önmagába viszi át, önmagába megy át, s ezért ezek a mozgások forgások a λ lapra a P pontban emelt merőleges körül; ebből a sík véges mozgáscsoportjaira vonatkozó tételünk alapján (l. 153. o.) következik, hogy a poliédert és a P pontot önmagába átvivő mozgások csoportja ciklikus. Ha P a poliéder k élén fekszik; akkor

ennek az élnek a középpontjával azonos; a forgástengely a P pontban a k élhez tartozó lapszög felezősíkjában a k élre emelt merőleges; e körül a tengely körül való félforgás az egyedüli olyan mozgás, mely a poliédert és a P pontot önmagába viszi át. Ha pedig P a poliéder valamely csúcsa, akkor az ehhez a csúcs-hoz tartozó testszög önmagába megy át a nevezett mozgásoknál, s mivel egy konvex testszög önmagába való mozgásainak csoportja ciklikus (l. 199. o.) ebből következik, hogy a poliédert és a P csúcsot önmagába átvivő mozgások csoportja is ciklikus. — A most bebizonyított tételből következik, hogy *egy konvex poliéder bármely pontján a poliédernek legfeljebb egy tengelye megy át*, azaz legfeljebb egy olyan egyenes, amely körül való forgás a poliédert önmagába viszi át.

A tér minden periodikus kongruens leképezésének van legalább egy fixpontja.

Ha a T kongruens leképezés periodusa $n=2$, akkor egy tetszőleges A pontot az $A'=T(A)$ képponttal összekötő szakasz középpontja T -nek fixpontja. — Ha $n=3$, akkor az A pont, s ennek a T -nél és a T^2 -nél származó A', A'' képei T -nél ciklikusan egymásba mennek át; ezek tehát egy szabályos háromszög csúcsai, s a háromszög középpontja T -nek fixpontja. — Tegyük fel, hogy a fenti tételt igazoltuk már az $m(>1)$ periodusú leképezésekre, s ebből levezetjük az $n=m \cdot p$ periodusúakra ($p>1$). Ha $p=2$, akkor feltevésünk szerint az m -periodusú T^2 leképezésnek van egy A fixpontja; ha ez nem fixpontja T -nek, akkor T felcseréli egymással az A és az $A'=T(A)$ pontokat, s így az AA' szakasz középpontja T -nek fixpontja. Ha $p>2$, akkor az m -periodusú T^p leképezésnek van egy A fixpontja; az $A, A'=T(A), A''=T(A), \dots, A^{p-1}=T^{p-1}(A)$ pontok T -nél ciklikusan felcserélődnek, s így ezek valamennyien fixpontjai T^p -nek. Ha ez a p pont nem fekszik egy síkban, akkor a T^p leképezés az azonosság (l. a 165. tételt vagy ennek a 184–185. o. kimondott következményeit); ez ellentmond annak a feltételünknek, hogy T periodusa $n>p$. Ha az $A, A', A'', \dots, A^{p-1}$ pontok egy síkban fekszenek, akkor az ezeket burkoló konvex sokszög szabályos, s ennek középpontja fixpont a T leképezésnél. A fentiek szerint elegendő tehát a tételt primszámú periódusra vonatkozóan bebizonyítani.

Legyen T a térnek olyan kongruens leképezése, melynek periodusa a p primszám ($p>2$). Egy A pontnak a T hatványainál

származó képeit jelöljük $A, A', A'', \dots, A^{p-1}$ -gyel. Ha ezek a pontok nem fekszenek egy síkban, jelöljük az ezeket burkoló konvex poliédert Π -vel, s legyen AA^k a poliédernek egy az A pontból kiinduló éle. A T leképezésnek azt a T^k hatványát, mely A -t A^k -ba viszi át, jelöljük S -sel; mivel k és p legnagyobb közös osztója 1, tehát van két olyan m és n egész szám, melyre $km - pn = 1$; ebből $S^m = (T^k)^m = T^{1+pn} = T$. Eszerint T -nek minden hatványa S -nek is hatványa (és viszont). Az $A, S(A), S^2(A), \dots, S^{p-1}(A)$ pontokat jelöljük rendre $A_1, A_2, \dots, A_p$ -vel; ezek tehát az $A, A', A'', \dots, A^{p-1}$ pontok más elrendezésben. Az S leképezésnél a Π poliéder önmagába megy át, s ezért élei egymásba mennek át; így az A_1A_2 él képe Π -nek A_2A_3 éle, ennek képe az A_3A_4 él, stb. Az $A_1A_2\dots A_p$ egyszerű zárt törtvonal a Π konvex poliédert két q_1 és q_2 részre osztja fel (58. tétel); q_1 és q_2 egyszeresen összefüggő határolt poliéderfelületek (l. 65—66. o.). Mivel az S leképezésnél az $A_1A_2\dots A_p$ zárt törtvonal önmagába megy át, q_1 és q_2 vagy egymásba, vagy mindegyik önmagába megy át; az előbbi esetben azonban az S^p leképezésnél is, mivel p páratlan, q_1 és q_2 egymásba mennének át, holott S^p az azonosság. Ezért S -nél q_1 is, q_2 is önmagába megy át. Az A_1 csúcsból kiindul a Π poliédernek legalább egy az A_1A_2 -től és az A_1A_p -től különböző A_1A_ν éle; tegyük fel, hogy ez q_1 -hez tartozik, akkor ez q_1 -et két részre osztja fel, s nevezetesen elválasztja egymástól q_1 -en az A_2 és $A_{\nu+1}$ pontokat. Eszerint az A_1A_ν él képének, mely a szintén q_1 -hez tartozó $A_2A_{\nu+1}$ él, lenne az A_1A_ν éllel közös pontja; ez azonban ellentmond a poliéder értelmezésének (l. 53—54. o.). Ebből következik, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_p$ pontok egy síkban fekszenek; az A_i pontokat burkoló konvex sokszög szabályos, s ennek középpontja fixpont a T leképezésnél. Ezzel bebizonyítottuk a fent kimondott tételt, vagyis hogy a tér minden periodikus kongruens leképezésének van fixpontja. — Ebből a 175. tétel szerint következik, hogy a térnek minden periodikus mozgása a térnek egy forgása valamely tengely körül.

Következő tárgyalásunk célja a tér véges mozgáscsoportjainak a meghatározása.

A térnek egy egyenese körül való valamely periodikus forgása s ennek hatványai együtt ciklikus csoportot alkotnak.

A szabályos poliéderek mozgáscsoportjai szintén a tér véges csoportjai; ezeket fent általánosan tárgyaltuk, de eddig csak a tetraéder és az oktaéder (illetve a hexaéder) csoportjait határoztuk

meg, az illető szabályos poliéder megszerkesztésével. Ebből a szerkesztésünkből a sík primitív periodikus forgásaira vonatkozó eredmények alapján belátható az, hogy bármely két tetraéder-csoport egymással *aequivalens*, vagyis hogy megadható a térnek olyan T mozgása, mely az egyik csoport tengelyeit a másik csoport meg egyező periodusú tengelyeibe viszi át; az egyik csoport bármely S eleméből a másik csoport megfelelő S' elemét a T -vel való *transzformálással*, azaz balról T^{-1} -gyel s ugyanakkor jobbról T -vel való szorzással kapjuk: $S' = T^{-1}ST$. Ugyancsak a szabályos poliéderek fenti szerkesztéséből adódik az is, hogy az *oktaéder és a hexaéder csoportok aequivalensek egymással*; az oktaéder lapjaihoz tartozó tengelyek a hexaéder csúcsaihoz tartozó tengelyeknek felelnek meg, és megfordítva. Ugyanezt az összefüggést találjuk majd a dodekaéder és az ikosaéder között, melyeknek létezését a párhuzamossági axioma alapján fogjuk igazolni.

A térnek további véges mozgáscsoportja a *négycsoport* (mely egyébként bármely szabályos poliéder csoportjának is része); ez három páronként egymásra merőleges tengely körül való fél-forgásból és az azonosságból áll. Ez a csoport speciális esete a *diédercsoportnak*, melyet ($n > 2$ esetén) következőképen értelmezzünk. Legyen az α síkban $A_1A_2 \dots A_n$ egy szabályos sokszög; jelöljük szimmetriavonalait $a_1, a_2, \dots, a_n$ -nel és legyen l a sokszög O középpontjában az α síkra emelt merőleges; erre az O ponttól egymással egyenlő OB_1 és OB_2 szakaszokat mérünk rá. A $B_1A_iA_{i+1}$ és a $B_2A_iA_{i+1}$ háromszöglapok ($i = 1, 2, \dots, n$; $A_{n+1} = A_1$) együtt egy konvex poliédert alkotnak; ezt n -oldalú *diédernek* nevezzük. A B_1B_2 tengely a diéder főtengele, a sokszög $a_1, a_2, \dots, a_n$ szimmetriavonalai a diéder melléktengelyei. A főtengele körül való ama forgások, melyek az $A_1A_2 \dots A_n$ szabályos sokszög csúcsait egymásba viszik át, és a melléktengelyek körül való fél-forgások (melyek a főtengele B_1 és B_2 végpontjait felcserélik) együtt egy $2n$ -edrendű csoportot alkotnak; ezt nevezzük diédercsoportnak.

Be fogjuk bizonyítani, hogy a felsoroltakon kívül nincs a térnek más véges mozgáscsoportja. Mivel egy véges csoport minden eleme periodikus, s mint bebizonyítottuk, a térnek minden periodikus mozgása forgás valamely tengely körül, tehát állításunkat csak véges forgáscsoportokra nézve kell igazolni. Nem tehetjük fel azonban előre azt, hogy az összes forgástengelyek egy ponton mennek át.

Legyen a az adott G csoport valamely forgásának a tengelye. Ha a -nak valamennyi pontja fixpont a G csoport minden mozgásánál, akkor G egy az a tengely körül való periodikus forgás hatványaiból álló *ciklikus csoport*. Ha az a tengelynek van olyan A_1 pontja, mely nem fixpont G minden mozgásánál, akkor jelöljük $A_1, A_2, \dots, A_c$ -vel A_1 -nek a csoport mozgásainál származó összes képeit; ha N jelenti a G csoportnak, és ν az a tengely körül való forgásaiból álló g ciklikus csoportnak a rendszámát, akkor $N = c\nu$. — Ha $c = 2$, akkor a G csoport bármely mozgásánál A_1 és A_2 vagy önmagukba, vagy egymásba mennek át; az a tengely körül való forgásoknál A_1 fixpont, tehát A_2 is fixpont, vagyis A_2 az a tengelyen fekszik. Minden olyan forgásnak a tengelye, mely A_1 -et és A_2 -t felcseréli, az A_1A_2 szakasz O középpontján megy át, és merőleges az a tengelyre; egy ilyen forgással szorozva G -nek az a tengely körül való forgásait (melyek ciklikus csoportot alkotnak), megkapjuk tehát G összes elemét; eszerint G *diéder-csoport*, vagy speciálisan *négypescsoport*. — Ha $c > 2$, és ha az összes A_i pontok egy síkhoz tartoznak, ugyanerre az eredményre jutunk; ugyanis a sík véges mozgáscsoportjaira vonatkozó tételünk szerint a G csoportnak azok a mozgásai, melyek az $A_1A_2 \dots A_c$ síkot megmaradó irányítással önmagába viszik át, ciklikus csoportot alkotnak; az $A_1, A_2, \dots, A_c$ pontok egy szabályos sokszög csúcsai (l. 153. o.); a sokszög középpontjában a sokszög síkjára emelt merőleges a diéder fő tengelye, az a tengely s ennek a csoport mozgásainál származó képei a diéder melléktengelyei.

Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_c$ pontok nem fekszenek egy síkban; jelöljük Π -vel az ezeket a pontokat burkoló konvex poliédert. A G csoport minden mozgásánál az A_i pontok egymásba mennek át s mindegyik A_i pont minden más A_j pontba átmegy; ezért a G csoport valamennyi mozgásánál a Π poliéder önmagába megy át, s mindegyik A_i pont csúcsa a Π poliédernek. Ebből következik továbbá, hogy a poliéder összes testszögei egybevágók. Az a tengelyhez tartozó ν -edrendű g ciklikus csoportnál a poliédernek bármely az A_1 pontból kiinduló éle ν különböző az A_1 pontból kiinduló élbe megy át. Ha a Π poliédernek pontosan ν éle tartozik az A_1 csúcshoz, akkor tehát az A_1 csúcshoz tartozó testszöge szabályos, továbbá az összes az A_1 csúcshoz tartozó élei és élszögei egyenlők; mivel pedig a Π poliéder valamennyi testszöge egybevágó, ebből következik, hogy a poliéder összes élei egyenlők

és összes élszögei egyenlők, s ezért a poliéder lapjait szabályos sokszögek határolják; ebben az esetben tehát *II szabályos poliéder*.

Ha azonban az A_1 csúcsból kiinduló élek száma nagyobb mint ν , akkor a fentiek szerint ezeknek az éleknek a száma $k\nu$ ($k > 1$); *II* összes éleinek száma tehát $\epsilon = \frac{1}{2}ck\nu = \frac{1}{2}Nk$. Jelöljük l -el *II* lapjainak a számát; mivel minden lapnak legalább 3 éle van, s minden él 2 laphoz tartozik, tehát $3l \leq 2\epsilon$, vagyis $l \leq \frac{2}{3}\epsilon$; az EULER-féle poliéder-tételből (62. tétel) következik, hogy $\epsilon \leq 3c - 6$. Behelyettesítve az $\epsilon = \frac{1}{2}Nk$ és $c = \frac{N}{\nu}$ értékeket kapjuk ebből, hogy $\nu k < 6$, tehát $\nu = 2$, $k = 2$, $\epsilon = N$. A lapok száma az EULER-féle tétel szerint: $l = \frac{1}{2}N + 2 = c + 2$. — Mivel $l \leq \frac{2}{3}N < N$, tehát a poliéder minden lapjához tartozik a G csoportnak legalább egy olyan nem azonos forgása, mely az illető lapot önmagába viszi át. Az A_1 csúcshoz a poliédernek $k\nu = 4$ lapja tartozik, melyek közül kettő-kettő az a tengely körül való félforgásnál egymásba megy át; az egyik és a másik párhoz tartozó egy-egy lap oldalszámát jelöljük μ -vel és μ' -vel. A poliéder összes lapjainak száma tehát $l = 2c\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)$; ezt a fenti $l = c + 2$ kifejezéssel összehasonlítva, adódik:

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c}.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy μ és μ' közül legalább az egyik 3-mal egyenlő. Az illető háromszögű lapot önmagába átvivő forgás periodusa $\mu = 3$; ennek a forgásnak a háromszögű lap belsejéhez tartozó B_1 fixpontja, és B_1 -nek a G csoport mozgásainál származó képei együtt egy szabályos poliéder csúcsait adják előbbi eredményünk szerint; ennek a szabályos poliédernek a forgáscsoportja az adott G csoport.

Eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

A tér mozgásainak minden véges csoportja vagy ciklikus csoport, vagy diédercsoport (beleértve a négyescsoportot is), vagy egy szabályos test forgáscsoportja. A csoport összes forgásainak tengelyei egy ponton mennek át.

IV. Párhuzamosság.

31. §. Az euklidesi párhuzamossági axioma.

A párhuzamosság axiómáját a következő alakban vezetjük be:

IV. Legyen α egy tetszőleges egyenes, és A egy nem az α egyenesen fekvő pont; az α egyenesen és az A ponton átfektetett α síkban van egy és csak egy olyan α' egyenes, mely átmegy az A ponton, s melynek nincs α -val közös pontja.

Értelmezés. Két olyan egyenest, melyek egy síkban fektűszenek s melyeknek nincs közös pontjuk, egymással párhuzamosnak nevezünk.

Megjegyzés. Az I. 1–3, II, III axiómákból következik, hogy az α síkban bármely α egyeneshez, és bármely nem az α egyenesen fekvő A ponthoz megadható legalább egy olyan az α síkban fekvő α' egyenes, mely átmegy az A ponton, s amelynek nincs az α egyenessel közös pontja. Legyen ugyanis b az A ponton áthaladó és α -ra merőleges egyenes (92. tétel), továbbá α' az A ponton áthaladó, és b -re merőleges egyenes; a 92. tétel szerint α -nak és α' -nek nincs közös pontja.

Az I. 1–3, II, III axiómák alapján a IV axioma helyettesíthető a következővel:

IV* Van legalább egy olyan α sík s legalább egy olyan az α síkban fekvő a egyenes, hogy α bármely A pontján legfeljebb egy az α síkban fekvő és az a egyenest nem metsző egyenes megy át.

Ha ugyanis β egy másik sík, és b egy ebben fekvő egyenes, akkor megadható az α síknak a β síkra olyan kongruens leképezése, melynél az a egyenes b -be megy át (III. 2, III. 4 axioma és 89. tétel); ennél a leképezésnél minden az α síkban fekvő és az a -t nem metsző egyenesnek egy a β síkban fekvő és a b -t nem metsző egyenes felel meg, és megfordítva. Ha tehát a IV* axioma

teljesül az α síkra és az a egyenesre vonatkozóan, akkor ugyancsak teljesül a β síkra és a b egyenesre vonatkozóan is.

A IV* axioma nyilván *aequivalens* a következővel:

Ha az α síkban fekvő a, b, c egyenesek közül sem a -nak, sem b -nek nincs c -vel közös pontja, akkor a -nak és b -nek sincs közös pontja (kivéve, ha a és b azonosak).

A IV axiómából és a 109. tételből következik a

181. tétel. *Ha a, b, c egy síkban fekvő egyenesek, melyek közül a és b párhuzamosak, és c metszi a -t, akkor c metszi b -t is, és a megfelelő szögek egyenlők (ugyancsak egyenlők a belső, illetve a külső váltószögek). Megfordítva, ha a c egyenes metszi az a és b egyeneseket, és a megfelelő szögek egyenlők (vagy ha a belső, illetve a külső váltószögek egyenlők), akkor az a és b egyenesek párhuzamosak.*

Ennek a tételnek a következő, gyakran előforduló korolláriumát külön is megemlítjük:

Ha az egy síkban fekvő a, b, c egyenesek közül a és b párhuzamosak és c merőleges a -ra, akkor c merőleges b -re is. Megfordítva, ha a c egyenes merőleges a -ra és b -re, akkor a és b párhuzamosak.

A 181. tételből a 110. tétel alapján következik a *parallelaposztulátumnak* EUKLIDESTŐL származó eredeti fogalmazása:

Ha az α síkban fekvő a, b, c egyenesek közül a és b metszik a c egyenest, s ha a c egyenes egyik oldalán a belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor az a és b egyenesek metszik egymást a c egyenesnek azon az oldalán, melyen a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

Ez a kifejezés: két szög összege kisebb két derékszögnél, úgy értendő, hogy a két szög közül az egyik kisebb a másiknak a kiegészítő szögénél.

A párhuzamossági axiómával *aequivalens* tételek nagy sokaságából még a következőt említjük meg:

Bármely három nem egy egyenesen fekvő ponton átmegy egy kör.

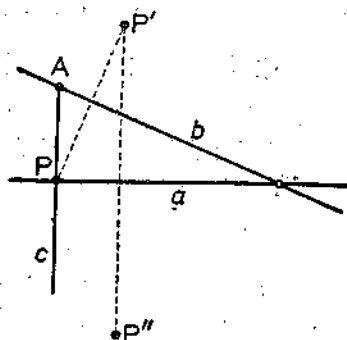
A 142. tétel bizonyítása szerint ez a tétel *aequivalens* a következővel:

Bármely háromszög három középmerőlegese egy ponton megy át.

Legyen ugyanis A, B, C három nem egy egyenesen fekvő pont; a B, C és a C, A pontpárok középvonalát jelöljük rendre

a -val és b -vel. Ha a és b párhuzamosak volnának, akkor, mivel a BC egyenes merőleges a -ra, a 181. tétel szerint merőleges volna b -re is; mivel pedig CA is merőleges b -re, tehát a C ponton át két a b -re merőleges egyenes menne át, ellentétben a 92. tétellel. Ebből adódik, hogy az ABC háromszög a és b középperőlegesei metszik egymást az O pontban, s így a 142. tétel szerint harmadik középperőlegese is átmegy az O ponton.

Viszont, ha bármely háromszög középperőlegesei metszik egymást, akkor érvényes a párhuzamossági axióma. Legyen ugyanis egy a síkban a egy egyenes, A egy nem az a -n fekvő pont; legyen továbbá b egy az a síkban fekvő és az A ponton átmenő egyenes, mely nem merőleges sem a -ra, sem az A pontból az a -ra bocsátott c merőlegesre. Az a és c egyenesek P metszéspontjának a b -re vonatkozó tükörképét jelöljük P' -vel, és P' -nek az a -ra vonatkozó tükörképét P'' -vel (127. ábra). Mivel a P, P', P'' pontok nem fekszenek egy egyenesen, feltevésünk szerint a P, P' pontpár b középvonala, és a P', P'' pontpár a középvonala metszik egymást.



127. ábra.

Megjegyzés. A IV axiómából a 181. tétel szerint következik, hogy minden egyenes-sereg vagy egy ponton áthaladó, vagy egy egyenesre merőleges egyenesek összessége (l. a 138. o. levő Megjegyzést); az epiciklusok tehát vagy körök, vagy egyenesek.

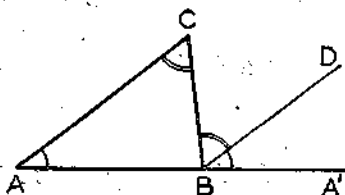
32. §. Háromszögek és négyszögek.

Következő tárgyalásunk alapját az I. 1–3, II, III, IV axiómák képezik. Feltesszük, hogy az összes pontok és egyenesek, melyek következő tárgyalásunkban előfordulnak, egy α síkban fekszenek;

A nevezett axiómákból a szokásos módon levezethető a következő.

182. tétel. Egy háromszög bármely külső szöge egyenlő a két szemben fekvő belső szög összegével.

Bizonyítás. (128. ábra). Az ABC háromszög AB oldalának B felől való meghosszabbításán felvesszünk egy A' pontot. Mivel



128. ábra.

a háromszögnek $\sphericalangle CBA'$ külső szöge nagyobb a $\sphericalangle CAB$ belső szögénél (110. tétel), van egy olyan a $\sphericalangle CBA'$ szög belsejében fekvő BD félsugár, melyre $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA'$. A 181. tétel szerint AC és BD párhuzamosak, s az $\sphericalangle ACB$ és a $\sphericalangle DBC$ belső váltó-

szögek egyenlők. Ebből következik, hogy

$$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB = \sphericalangle DBA' + \sphericalangle DBC = \sphericalangle CBA'.$$

A 182. tételt a következő szokásos alakban is kimondjuk:

Minden háromszög belső szögeinek összege két derékszöggel egyenlő. Ehhez a következőket jegyezzük meg. Két szögről akkor mondjuk, hogy összegük egyenes-szöggel egyenlő, ha a két szög közül az egyik a másinak a mellékszögeivel egyenlő. Mivel egy derékszög mellékszöge is derékszög (96 o.), az egyenes-szöget két derékszögnek, vagyis két derékszög összegének nevezzük és $2R$ -rel jelöljük. — Három adott szögről akkor mondjuk, hogy összegük $2R$ -rel egyenlő, ha közülök az egyiknek a mellékszöge a másik kettőnek az összegeivel egyenlő.

Megemlítjük a 182. tétel következő korolláriumát:

Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének az összege derékszöggel egyenlő; tehát ezek a szögek egymás pótszögei.

A 22. §. tárgyalásaiból, s ezért a IV axiómától függetlenül adódik a következő tétel:

Ha az a és a' egyeneseknek két közös merőlegese van, akkor minden az a -ra merőleges egyenes a' -re is merőleges.

Ha ugyanis b és b' az a és a' egyeneseknek két közös merőlegese, akkor minden az a -ra merőleges egyenes a (b, b') egyenes-sereghez tartozik, tehát a' -re is merőleges (138. tétel). Ebből következik az is, hogy bármely az a -ra merőleges b'' , és a b -re merőleges a'' egyenesek merőlegesek egymásra.

Tegyük fel, hogy van két olyan a és a' egyenes, melynek két b és b' közös merőlegese van. Ha c és c' két olyan egyenes, melynek van egy közös d merőlegese, akkor minden a c -re merőleges d' egyenes merőleges c' -re is.

Ugyanis a síknak egy kongruens leképezésével a c és d egyeneseket az a és b egyenesekbe vihetjük át (94. tétel); ennél a leképezésnél a c' egyenes egy a b -re merőleges a'' egyenesbe, és egy tetszőleges a c -re merőleges d' egyenes egy az a -ra merőleges b'' egyenesbe megy át (93. tétel). A fentiek szerint a'' és b'' merőlegesek egymásra, s így az alkalmazott leképezés inverzénél nekik megfelelő c' és d' egyenesek is merőlegesek egymásra.

A fenti eredmények alapján adódik a LEGENDRE-től származó következő

183. tétel. *Ha egy háromszögben a belső szögek összege egyenlő két derékszöggel, akkor minden más háromszögben is.*

Bizonyítás. A 145. tétel bizonyításánál alkalmazott eljárás szerint (l. 142. o., és 101. ábra), egy tetszőleges ABC háromszöghöz megadhatunk egy olyan $ABED$ négyszöget, melynek D -nél és E -nél fekvő szögei derékszögek, A -nál és B -nél fekvő szögei egymással egyenlők, s ennek a két utóbbi szögnek az összege egyenlő a háromszög három belső szögének az összegével. Ha tehát az ABC háromszög belső szögeinek összege két derékszög, akkor a hozzárendelt $ABED$ négyszögnek az A -nál és a B -nél fekvő szögei is derékszögek, s így az AB és DE egyeneseknek két közös merőlegesük van: AD és BE . Ha $A_1B_1C_1$ egy tetszőleges más háromszög, és $A_1B_1E_1D_1$ a hozzárendelt négyszög, akkor az A_1B_1 és a D_1E_1 oldalak középpontjait összekötő $C_1'G_1$ egyenes közös merőlegese A_1B_1 -nek és D_1E_1 -nek (145. tétel), s ezért előbbi eredményeink értelmében a D_1E_1 -re merőleges D_1A_1 és E_1B_1 egyenesek is merőlegesek A_1B_1 -re. Eszerint az $A_1B_1E_1D_1$ négyszögnek az A_1 -nél és a B_1 -nél fekvő szögei is derékszögek; mivel ennek a két szögnek az összege egyenlő az $A_1B_1C_1$ háromszög belső szögeinek az összegével, tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög belső szögeinek az összege két derékszög. — A LEGENDRE-féle tételnek ez az egyszerű bebizonyítása HJELMSLEV-től származik.

Megjegyzés. Ábból a feltételből, hogy egy háromszögben a belső szögek összege $2R$, az I, II, III axiómák alapján nem vezethető le a IV axióma; erre a kérdésre visszatérünk a 43.§-ban.

További tárgyalásunkban ismét feltesszük a IV axiómát.

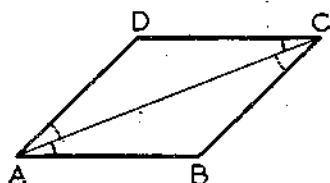
Értelmezés. *Parallelogramm* olyan négyszöget értünk, melynek két-két szemben fekvő oldala (vagyis oldalvonala) párhuzamos. Az értelmezésből következik, hogy minden parallelogramma egyszerű konvex négyszög.

Az a szög, melyet az $ABCD$ paralelogramma CD oldalának D felől való meghosszabbítása és a $\vec{DA}$ télsugar egyenessel bezárnak, megfelelő szöge a paralelogramma C -nél fekvő szögének, és belső váltószöge az A -nál fekvő szögének; a 181. tétel szerint ezek a szögek egymással egyenlők. Ebből következik, hogy *egy paralelogramma szemben fekvő szögei egymással egyenlők*; továbbá, hogy egy paralelogramma két szomszédos csúcsához tartozó szögek közül egyik a másiknak a mellékszögével egyenlő, vagy más szóval: két szomszédos szög összege $2R$.

A paralelogramma szemben fekvő szögeinek egyenlőségéből következik a 156. oldalon levezetett eredményeink szerint, hogy *egy paralelogramma szemben fekvő oldalai egymással egyenlők*. Viszont, ha egy egyszerű négyszög két-két szemben fekvő oldala egyenlő, akkor a négyszög konvex, és szemben fekvő szögei egymással egyenlők (156. o.); ebből a 181. és a 99. tétel szerint adódik, hogy a négyszögnek két-két szemben fekvő oldala párhuzamos, tehát a négyszög paralelogramma.

Ha egy egyszerű négyszög két szemben fekvő oldala párhuzamos és egyenlő, akkor a másik két szemben fekvő oldal is párhuzamos, tehát az illető négyszög paralelogramma.

Legyen $ABCD$ egy egyszerű négyszög, melyről feltesszük, hogy AB és CD oldalai párhuzamosak és egymással egyenlők.



129. ábra.

A 28. tétel szerint van ennek a négyszögnek legalább egy átlója; tegyük fel, például, hogy AC a négyszögnek átlója (129. ábra).

A 181. tétel szerint $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$, továbbá $AB = CD$ és $AC = CA$, tehát a 104. tétel szerint az ABC és CDA háromszögek

egybevágók; ebből következik: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$, s ezért a 181. tétel szerint AD és BC párhuzamosak, tehát az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

Az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlóinak O metszéspontja a *paralelogramma középpontja*; ez az AC és BD átlók középpontja (l. a 82. tétel bizonyítását). A síknak az O pont körül való félforgásánál az A és C csúcsok, továbbá a B és D csúcsok egymásba mennek át.

Értelmezés. Ha egy paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor a fentiek szerint minden szöge is derékszög; ebben az esetben a paralelogrammát *derékszögű paralelogrammnak* nevezzük. Derékszögű paralelogramma átlói egymással egyenlők, és megfordítva: ha egy paralelogramma átlói egyenlők, akkor a paralelogramma derékszögű.

Értelmezés. Ha egy derékszögű paralelogramma két szomszédos oldala egyenlő, akkor a paralelogrammát *négyszetnek* nevezzük. — A IV axioma alapján a szabályos négyszög és a négyszet fogalma aequivalens.

A paralelogrammákra vonatkozó tételeinkből következik, hogy egy egyenes aequidistans vonalai a vele párhuzamos egyenesek (l. erre vonatkozóan még a 43. §. tárgyalásait is).

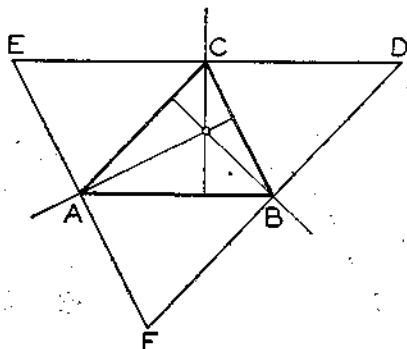
A párhuzamossági axioma alkalmazásával a szokásos módon bebizonyítjuk a következő tételeket (l. ehhez a 23. §-ban adott bizonyításokat is).

184. tétel. *Egy háromszög három középperőlegese egy ponton megy át s ennek a pontnak a három csúctól való távolsága egyenlő.* (l. 142. tételt és 212. o.).

Bizonyítás. Ha A, B, C nem egy egyenesen fekvő pontok, akkor a B, C pontpár a középvonalának és a C, A pontpár b középvonalának van egy O közös pontja (l. 213. o.). Mivel az O pont a B, C pontpár középvonalán fekszik, tehát $OB = OC$, s hasonlóan $OC = OA$, ebből $OA = OB$, ez utóbbi egyenlőség azt fejezi ki, hogy az O pont rajta fekszik az A, B pontpár középvonalán is (például a 118. tétel folytán).

185. tétel. *Egy háromszög három magassági vonala egy ponton megy át* (l. a 144. tételt.)

Bizonyítás. Az ABC háromszög A, B, C csúcsain átfektetünk a szemben fekvő oldallal párhuzamos egyeneseket; e közül a három egyenes közül kettő-kettő nem párhuzamos egymással tehát metszi egymást egy-egy D, E, F pontban (130. ábra). Az $ABDC$ paralelogramma szemben fekvő AC és BD oldalai egyenlők, hasonlóan, az



130. ábra.

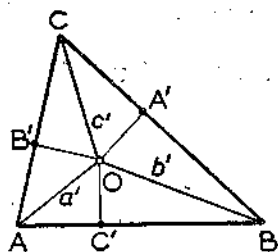
$ACBF$ parallelogramma szemben fekvő AC és FB oldalai egyenlők; ebből $FB=BD$, tehát B az FD szakasz középpontja. Hasonlóan A és C az EF illetve a DE szakasz középpontja. Tehát az ABC háromszög magassági vonalai a 181. tétel szerint a DEF háromszögnek a középpáröllegesek; ezek a 184. tétel szerint egy ponton mennek át.

186. tétel. Egy háromszög két oldalának középpontját összekötő szakasz párhuzamos a háromszög harmadik oldalával és annak felével egyenlő (l. a 145. tételt).

Bizonyítás. Legyen DEF az adott háromszög (130. ábra); jelöljük A -val az EF oldal középpontját. Az A ponton áthaladó és az ED -vel, illetve DF -fel párhuzamos egyeneseknek a DF , illetve az ED oldallal való metszéspontját jelöljük B -vel és C -vel. Mivel az $ABDC$ négyszög parallelogramma, tehát $AB=CD$ és $AC=BD$. Az ECA és az ABF háromszögek egybevágók a 105. tétel szerint, mivel $EA=AF$, $\sphericalangle CEA=\sphericalangle BAF$ és $\sphericalangle ECA=\sphericalangle EDF=\sphericalangle ABF$ (megfelelő szögek). Ezért $EC=AB$ és $AC=FB$; ebből következik, hogy B és C rendre az FD és a DE oldalnak a középpontja.

187. tétel. Egy háromszög három belső szögfelezője egy ponton megy át (l. a 143. tételt).

Bizonyítás. (Ebben a bizonyításban nem használjuk fel sem az egyenes-sereg fogalmát, sem a IV axiomát.) A 37. és a 9. tételből következik, hogy az ABC háromszög A -hoz és C -hez tartozó a' és c' szögfelezőjének van egy O közös pontja. Az O pontból az AB , BC , CA oldalvonalakra bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek C' , A' , B' (131. ábra). Mivel a 101. tétel folytán az $\sphericalangle ACB$ szög fele hegyesszög, a 110. tételből következik, hogy B' a $\vec{CA}$ félsugáron és A' a $\vec{CB}$ félsugáron fekszik; hasonlóan a B' az $\vec{AC}$, és

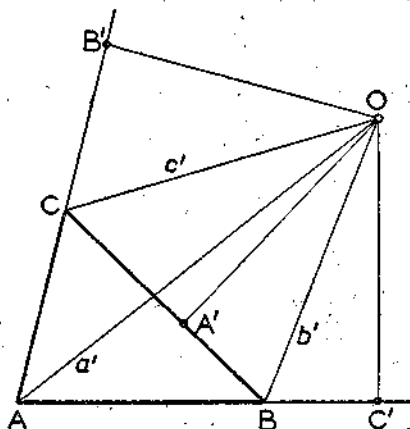


131. ábra.

C' az $\vec{AB}$ félsugáron fekszik. A 122. tételből következik, hogy az OCA' és az OCB' derékszögű háromszögek egybevágók, mivel OC átfogójuk közös, és $\sphericalangle OCA'=\sphericalangle OCB'$; ezért $OA'=OB'$. Hasonló megfontolás szerint adódik az OAB' és az OAC' derékszögű háromszögek egybevágósága, s ebből $OB'=OC'$. Az OBA'

és az OBC' derékszögű háromszögekben $OB = OB$ és $OA' = OC'$, s ezért a 122. tétel szerint $\sphericalangle OBA' = \sphericalangle OBC'$, s mivel O az $\sphericalangle ABC$ szög belsejében fekszik, tehát a $\overline{BO}$ félsugár az $\sphericalangle ABC$ szögfelezője.

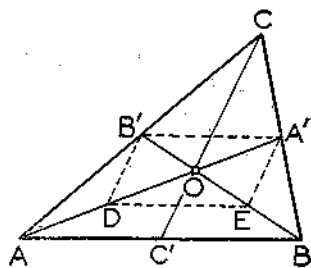
A IV axioma alapján bebizonyítjuk, hogy egy háromszög egyik csúcsához tartozó belső, és másik két csúcsához tartozó külső szögfelezője egy ponton megy át. Jelöljük az ABC háromszögnek az A -hoz tartozó belső szögfelezőjét a' -vel, a B -hez és a C -hez tartozó külső szögfelezőit b' -vel, illetve c' -vel. A b' és c' egyenesek BC -vel a BC egyenesnek az A pontot nem tartalmazó oldalán R -nél kisebb belső szögeket zárnak be, s így a IV axioma szerint metszik egymást a BC egyenesnek ezen az oldalán egy O pontban. Az O pontból az ABC háromszög oldalvonalaira bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek A', B', C' (132. ábra). Ugyanúgy, mint a 187. tétel bizonyításában adódik, hogy $OA' = OB' = OC'$, s ebből következik, hogy az O pont az a' szögfelezőnek is pontja.



132. ábra.

Értelmezés. Az ABC háromszög középvonalain értjük a háromszög egy-egy csúcsát a szemben fekvő oldal középpontjával összekötő egyeneseket.

188. tétel. Egy háromszög három középvonala egy ponton megy át.



133. ábra.

Bizonyítás. Legyen A', B', C' rendre az ABC háromszög BC , CA , AB oldalának középpontja; az AA' és a BB' szakaszoknak van a 9. tétel szerint egy O közös pontja. A 186. tétel szerint $B'A'$ párhuzamos AB -vel, és $B'A' = AC'$. Az ABO háromszög AO és BO oldalainak D és E középpontjait összekötő DE szakasz párhuzamos $B'A'$ -vel és $DE = B'A'$ (133. ábra).

A paralelogrammákra vonatkozó fenti eredményeink szerint adódik ebből, hogy az $A'B'DE$ egyszerű négyszög paralelogramma, s hogy O ennek a középpontja. Eszerint $OD = OA'$, s mivel D az AO szakasz középpontja, ugyancsak $OD = AD$, tehát $OA = 2 \cdot OA'$, vagyis $AA' = 3 \cdot OA'$. — A fenti megfontolást a BB' középvonal helyett a CC' középvonalra alkalmazva, adódik ugyanúgy, hogy a CC' középvonal az AA' szakaszt egy olyan O' pontban metszi, melyre $AA' = 3 \cdot O'A'$. A szakaszok nagysági vonatkozását illető eredményeinkből adódik, hogy az AA' szakasznak legfeljebb egy olyan O pontja van, melyre az AA' szakasz az OA' szakasznak háromszorosa; ezért $O = O'$. Tehát a háromszög három középvonala egy O ponton megy át.

33. §. Középponti és kerületi szögek.

A következő tárgyalás alapja az I. 1—3, II, III, IV axiómák. Az összes pontok egy síkban fekszenek.

Értelmezés. A kör pontjaira megadott ciklikus rendezés értelmében a kört bármely két A és B pontja két *körívre* osztja fel; a kör két másik C és D pontja akkor és csak akkor tartozik ugyanahhoz az A, B pontok által meghatározott körívhez, ha az A, B pontok nem választják el egymástól a C, D pontokat.

Ha A és B az O középponttal bíró k körnek két *diametrális* pontja, azaz egy átmérőnek a két végpontja, akkor az A, B pontok által meghatározott két körív a k kör ama pontjainak az összessége, melyek az AB egyenesnek egyik, illetőleg másik oldalán fekszenek; ezeket az A, B diametrális pontok által meghatározott *félkörív*eknek nevezzük.

Ha A és B két nem diametrális pont, akkor az általuk meghatározott két körív közül az egyik az $\sphericalangle AOB$ szög belsejében, a másik az $\sphericalangle AOB$ szög külsejében fekvő pontoknak az összessége; ezek közül az előbbi félkörívnél kisebbnek, az utóbbit félkörívnél nagyobbnek nevezzük. A félkörívnél kisebb ív bármely pontjának a diametrálisa a félkörívnél nagyobb ívhez tartozik (mivel bármely az $\sphericalangle AOB$ szög belsejében fekvő $\vec{OC}$ félsugárnak az O csúcs felől való meghosszabbítása a szög külsejéhez tartozik (I. 39. oldalt). — Ha röviden AB *körívről* beszélünk, ezen az $\sphericalangle AOB$ szög belsejében fekvő, vagyis a félkörívnél kisebb körívet értjük; ha A, B diametrális pontok, akkor AB körív jelenti bármelyiket az A, B pontok által meghatározott két félkörív közül.

Értelmezés. Az O középponttal bíró k kör két tetszőleges nem diametrális A, B pontja által meghatározott *középponti szögön* értjük az $\sphericalangle AOB$ szöget; erről azt mondjuk, hogy az AB körívhez tartozik. Ha A, B diametrális pontpár, akkor az $\sphericalangle AOB$ középponti szögön az egyenes-szöget értjük; ez az A, B pontok által meghatározott bármelyik félkörívhez tartozik.

A k körnek két A és B pontja által meghatározott két íve megegyezik azoknak a pontoknak az összességével, melyek az AB egyenes egyik, vagy másik oldalán fekszenek.

Állításunk nyilvánvaló abban az esetben, ha A és B diametrális pontok (lásd fent). Ha A és B nem diametrális pontok, legyenek C és D a k körnek olyan pontjai, melyek az AB egyenesnek különböző oldalán fekszenek. A kör CD húrjának van tehát az AB egyenessel egy P közös pontja (12. tétel); mivel a kör húrjának pontjai a kör belsejében, s a húr meghosszabbításán fekvő pontok a kör külsejében fekszenek (l. 143. o.), tehát a P pont a k kör belsejében és az AB húron fekszik. A CD egyenes metszi tehát az AOB háromszög AB oldalát a P pontban, s ezért metszi valamely másik oldalát, például OA -t egy Q pontban (II. 4.); mivel Q az OA sugáron, tehát a kör belsejében fekszik, Q szükségképen a CD húrnak a pontja. Eszerint a C, D pontok közül az egyik az $\sphericalangle AOB$ szög belsejében, a másik a külsejében fekszik, s így az értelmezés szerint fennáll az $(ACBD)$ ciklikus elrendezés. — Viszont, ha C és D a körnek két olyan pontja, melyek közül C az $\sphericalangle AOB$ szög belsejében, D ennek külsejében fekszik, akkor az OC félsugár és az AB szakasz metszéspontjának (37. tétel) az O ponttól való távolsága kisebb mint OA (115. tétel); tehát a C pont és az O pont az AB egyenesnek különböző oldalán fekszenek. Hasonló megfontolás szerint D és O az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek.

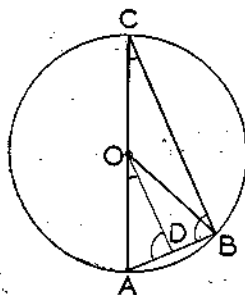
Értelmezés. A, B, C a k kör három tetszőleges pontja, akkor az $\sphericalangle ACB$ szöget a k kör *kerületi szögének* nevezzük.

Fenti eredményünk szerint a k körnek a C pontot nem tartalmazó AB íve az $\sphericalangle ACB$ kerületi szögnek a belsejéhez tartozik (ugyanis, ha D ennek az ívnek valamely pontja, akkor a CD szakasz metszi az AB szakaszt, s az utóbbi a 36. tétel szerint az $\sphericalangle ABC$ belsejéhez tartozik); az $\sphericalangle ACB$ szöget az ehhez az AB ívhez tartozó kerületi szögnek nevezzük.

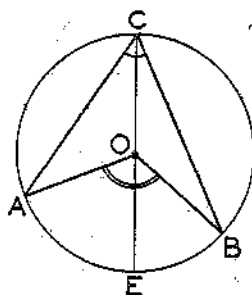
189. tétel. *A k körnek a félkörívnél kisebb AB körívéhez tartozó középponti szöge bármely ehhez a körívhez tartozó kerületi*

szögének a kétszerese (vagyis a kerületi szög a középponti szögnek a fele).

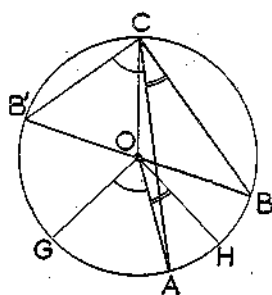
Bizonyítás. 1. eset. Ha a k kör középpontja az $\sphericalangle ACB$ kerületi szögnek egyik szárán, például a $\overrightarrow{CA}$ száron fekszik, jelöljük D -vel az AB húr középpontját (134. ábra). Az OD szakasz merőleges az AB húrra és felezi az $\sphericalangle AOB$ középponti szöget (107. tétel); továbbá, mivel D és O az ABC háromszög AB , illetve AC oldalának a középpontja, a DO egyenes párhuzamos a BC egyenessel (186. tétel); eszerint az $\sphericalangle AOB$ középponti szög fele, vagyis az $\sphericalangle AOD$ szög egyenlő az $\sphericalangle ACB$ kerületi szöggel (mint megfelelő szögek; 1. 181. tételt). Ebben az értelemben az $\sphericalangle AOB$ középponti szög egyenlő az $\sphericalangle ACB$ kerületi szögnek a kétszeresével. — A fenti megfontolásból adódott továbbá, hogy az $\sphericalangle ABC$ kerületi szög egyenlő az $\sphericalangle ADO$ derékszöggel.



134. ábra.



135. ábra.



136. ábra.

2. eset. Ha a k kör középpontja az $\sphericalangle ACB$ szög belsejében fekszik, jelöljük E -vel C diametrális pontját (135. ábra). Az 1. eset szerint az $\sphericalangle EOA$ és az $\sphericalangle EOB$ középponti szög rendre egyenlő az $\sphericalangle ECA$, illetve az $\sphericalangle ECB$ kerületi szög kétszeresével. Mivel ezek a középponti szögek a közös $\overrightarrow{OE}$ szárnak, s a kerületi szögek a közös $\overrightarrow{CE}$ szárnak különböző oldalán fekszenek, az értelmezés szerint $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOE + \sphericalangle EOB$, és $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECB$. A szögek összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonsága alapján (1. 96. o.) adódik a fenti egyenlőségekből, hogy az $\sphericalangle AOB$ középponti szög az $\sphericalangle ACB$ kerületi szögnek a kétszerese.

3. eset. Ha a k kör középpontja az $\sphericalangle ACB$ szög külsejében fekszik, akkor a C pont az $\sphericalangle AOB$ középponti szög szárai közül az egyiknek, például $\overrightarrow{OB}$ -nek, a negatív oldalán fekszik; jelöljük B' -vel B diametrális pontját (136. ábra). Mint könnyen belátható,

az $\angle AOB'$ középponti és az $\angle ACB'$ kerületi szögre a 2. eset feltételei teljesülnek, s ezért $\angle AOB'$ az $\angle ACB'$ szögnek a kétszerese. Jelöljük $\overline{OG}$ -vel és $\overline{OH}$ -val a $\angle B'OA$ és az $\angle AOB$ középponti szögeket felező fésűsugarakat; a 101. tétel szerint $\angle GOH$ derékszög; mint fent megjegyeztük, a BB' félkörívhez tartozó $\angle BCB'$ kerületi szög ugyancsak derékszög, s mint láttuk, a $\angle B'OA$ szög fele, vagyis a $\angle GOA$ szög egyenlő a $\angle B'CA$ szöggel; a 93. (vagy a 124.) tételből következik, hogy ezeknek a szögeknek a pótszögei is egyenlők egymással, tehát $\angle AOH = \angle ACB$; eszerint az $\angle AOB$ középponti szög fele, az $\angle AOH$ szög egyenlő az $\angle ACB$ kerületi szöggel. — (A fenti megfontolás azért bonyolultabb kissé a szokásosnál, mivel nem akartuk bevezetni általánosan szögek különbségének a fogalmát, s az erre vonatkozó tételeket; ezek egyébként a szögek összeadására, és a szögek nagysági vonatkozására adott tárgyalásunkból minden nehézség nélkül levezethetők; 194—96. o., és 124. tétel.)

A 189. tétel korolláriumaként kimondjuk a következő tételt:

190. tétel. *A k körnek a félkörívnél kisebb AB körívhez tartozó összes kerületi szögei egymással egyenlők.*

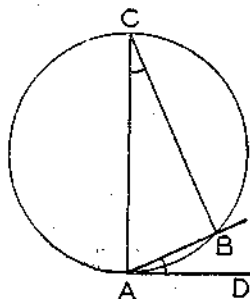
A 189. tétel bizonyítása során (1. eset) kaptuk a következőt:

191. tétel. *Minden félkörívhez tartozó kerületi szög derékszög.*

A 190. tétel alapján levezetjük a következő tételt:

192. tétel. *Ha $\angle ACB$ a félkörívnél kisebb AB ívhez tartozó kerületi szög, s ha AD jelenti az A pontban a körhöz húzott érintőnek azt a fésűsugarát, mely az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik mint a B pont, akkor a $\angle BAD$ szög egyenlő az $\angle ACB$ kerületi szöggel.*

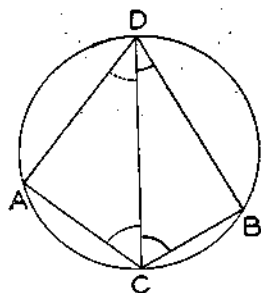
Bizonyítás (137. ábra). A 190. tétel alapján feltehetjük, hogy A és C diametrális pontok; az ABC háromszög B -nél fekvő szöge ebben az esetben derékszög (191. tétel), s így az $\angle ACB$ szög a $\angle CAB$ szögnek a pótszögével egyenlő (182. tétel korollárium). A $\angle BAD$ szög épen a $\angle CAB$ szögnek a pótszöge, mivel CA merőleges AD -re, és AB a $\angle CAD$ derékszög belsejében fekszik.



137. ábra.

193. tétel. *Ha A, B, C, D a k körnek olyan pontjai, melyeknek ciklikus elrendezése $(ACBD)$, akkor az $\angle ACB$ és az $\angle ADB$ szögek egymás mellékszögével egyenlők.*

Bizonyítás. Ha A és B diametrális pontok, akkor az $\sphericalangle ACB$ és az $\sphericalangle ADB$ kerületi szögek derékszögek (191. tétel); ebben az esetben állításunk nyilvánvaló.



138. ábra.

— Ha A és B nem diametrális pontok, jelöléseinket válasszuk úgy, hogy a C pont a félkörívnél kisebb AB körívhez tartozzék. $\sphericalangle ADB$ ehhez a körívhez tartozó kerületi szög; ez a 190. tétel szerint egyenlő bármely más az AB körívhez tartozó kerületi szöggel, így például azzal, melynek csúcsa a C pont diametrálisa; ezért feltehetjük, hogy C és D diametrális pontok (138. ábra). Ebben az esetben a CAD

és a CBD háromszögek derékszögei és így a 182. tétel korolláriuma szerint:

$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = R \quad \text{és} \quad \sphericalangle CDB + \sphericalangle DCB = R.$$

Mivel A és B a CD egyenesnek különböző oldalán fekszenek (tekintettel az $(ACBD)$ ciklikus elrendezésre), tehát

$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle CDB = \sphericalangle ADB \quad \text{és} \quad \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB.$$

A fenti vonatkozásokból a 214. oldalon adott értelmezés szerint következik tehát, tekintettel a szögek összeadásának asszociatív és kommutatív tulajdonságára:

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB = 2R.$$

A 190. és 193. tétel összefoglalása a következő

194. tétel. Ha A, B, C, D a k kör négy pontja, akkor az $\sphericalangle ACB$ és az $\sphericalangle ADB$ kerületi szögek vagy egymással, vagy egymás mellékszögével egyenlők, aszerint, hogy a C és D pontokat a körön megadott ciklikus rendezés értelmében nem választják el, vagy elválasztják egymástól az A és B pontok.

A 191. tétel megfordítása a következő

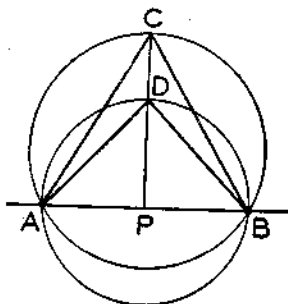
195. tétel. Ha az ABC háromszög C -nél fekvő szöge derékszög, akkor az AB átmérővel bíró k kör átmegy a C ponton. (A k kör középpontja az AB szakasz O középpontja és sugara OA .)

Bizonyítás. Az AC és BC befogók középpontját jelöljük rendre B' -vel és A' -vel. Az $A'O$ egyenes párhuzamos AC -vel, $B'O$ párhuzamos BC -vel (186. tétel), s mivel AC merőleges BC -re, tehát $A'O$ és $B'O$ az ABC háromszög két oldalának középmerő-

legesei (l. a 181. tétel korolláriumát); ezeknek O metszéspontja a háromszög három csúcsától egyenlő távolságban van.

196. tétel. Ha a C és D pontok az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, s az $\sphericalangle ACB$ és az $\sphericalangle ADB$ szögek egymással egyenlők, vagy ha C és D az AB egyenesnek különböző oldalán fekszenek, és $\sphericalangle ACB$ egyenlő $\sphericalangle ADB$ mellékszögével, akkor az A, B, C, D pontok egy k körön fekszenek.

Bizonyítás. A 193. tétel alapján elég a tételt arra az esetre bebizonyítani, midőn C és D az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek. Mivel az A, B, C pontok nem fekszenek egy egyenesen, van egy olyan k kör, mely átmegy az A, B, C pontokon (184. tétel). Ha a D pont is a k körön fekszik, tételünk állítása nyilvánvaló. Ellenkező esetben legyen k' az a kör, mely átmegy az A, B, D pontokon. Az AB szakaszra P középpontjában merőlegest emelünk, s ennek a k -val és a k' -vel való ama metszéspontjait, melyek az AB egyenesnek a C és D pontokat tartalmazó oldalán fekszenek, jelöljük C' -vel, illetve D' -vel. A 194. tétel szerint $\sphericalangle AC'B = \sphericalangle ACB$ és $\sphericalangle AD'B = \sphericalangle ADB$; feltehetjük tehát, hogy C és D rendre C' -vel, illetve D' -vel azonos (139. ábra). Ha a P, C, D pontok elrendezése például PDC , akkor a 110. tétel szerint $\sphericalangle ADP > \sphericalangle ACP$ és $\sphericalangle PDB > \sphericalangle PCB$; ebből összeadással kapjuk, hogy $\sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB$, feltevésünkkel ellentétben.



139. ábra.

Értelmezés. A k körhöz tartozó húrnégyszögon olyan $ABCD$ egyszerű négyszöget értünk, melynek A, B, C, D csúcsai a k körön fekszenek.

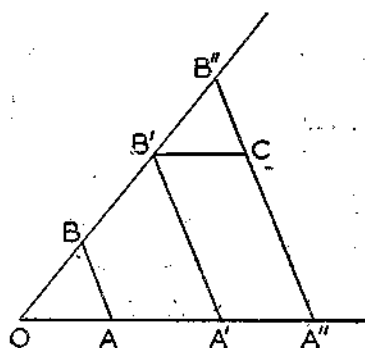
A 221. oldalon adott tárgyalásunkból következik, hogy az $ABCD$ húrnégyszög csúcsainak a körön való ciklikus elrendezése ($ABCD$), továbbá az is, hogy a húrnégyszög konvex. A 193. tételből következik, hogy egy húrnégyszög két szemben fekvő szöge közül egyik a másiknak mellékszögével egyenlő. A 196. tételből következik viszont, hogy ha egy négyszög két szemben fekvő konvex csúcsához tartozó szögei közül az egyik a másiknak a mellékszögével egyenlő, akkor az illető négyszög húrnégyszög.

34. §. Arányos szakaszok.

Az euklidesi arányos szakaszok elméletének az I. 1—3, II, III, IV axiómák alapján való következő tárgyalása HILBERT-től származik.

Feltesszük, hogy az összes pontok egy síkban fekszenek.

197. tétel. Ha az O pontból kiinduló, és nem egy egyenesen fekvő a és b félsugarakon rendre A, A', A'' és B, B', B'' olyan pontok, melyekre az $AB, A'B'$ és $A''B''$ egyenesek párhuzamosak, akkor az OA és $A'A''$ szakaszok egyenlőségéből következik az OB és $B'B''$ szakaszok egyenlősége. — Viszont, ha $OA = A'A''$ és $OB = B'B''$, ha továbbá az O, A, A', A'' pontok elrendezése megegyező az O, B, B', B'' pontok elrendezésével, akkor az AB és $A'B'$ egyenesek párhuzamos-ságából következik, hogy az $A''B''$ egyenes is párhuzamos AB -vel.



140. ábra.

Bizonyítás. A tétel első állításának bebizonyítására tegyük fel, hogy az $OAA'A''$, s ennek megfelelően (II. 4) az $OB B'B''$ elrendezés áll fenn. Jelöljük C -vel a B' ponton át az OA -val párhuzamosan fektetett egyenesnek az $A''B''$ szakasszal való metszéspontját (II. 4) (140. ábra). Az $A'A''CB'$ parallelogramma szemben fekvő oldalai egyenlők, ezért $A'A'' = B'C$, s feltevés szerint $OA = A'A''$, tehát

$OA = B'C$. Mivel továbbá $\sphericalangle BOA = \sphericalangle B'B'C$ és $\sphericalangle OBA = \sphericalangle B'B''C$ (megfelelő szögek), tehát a 111. tétel szerint az OAB és a $B'CB''$ háromszögek egybevágók; ebből $OB = B'B''$.

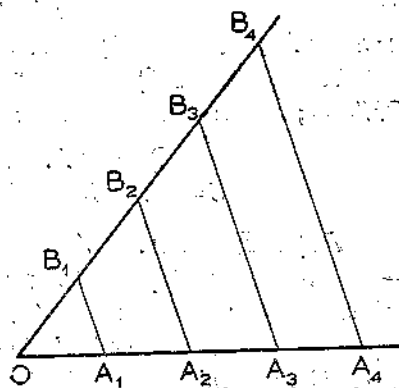
A tétel második állításának igazolására jelöljük $\bar{B}'$ -vel az A'' ponton átmenő és az $A'B'$ egyenessel párhuzamos egyenesnek az OB egyenessel közös pontját. A tételnek már bebizonyított első állítása szerint fennáll az $OB = B'B''$ egyenlőség, s mivel feltevés szerint $OB = B'B''$, tehát az OB egyenesen $\bar{B}'$ -nek ugyanazon az oldalán fekvő $\bar{B}'$ és B'' pontok azonosak.

197. tétel akkor is érvényes, ha AB egybeesik $A'B'$ -vel; ennek alkalmazásával közvetlenül adódik a következő két tétel.

198. tétel. Ha az O pontból kiinduló és nem egy egyeneshez tartozó a és b félsugarakon $A_1, A_2, \dots, A_n$ és $B_1, B_2, \dots, B_n$ olyan pontok, melyeknek elrendezése $OA_1A_2\dots A_n$ és $OB_1B_2\dots B_n$, s

melyekre fennállanak az $OA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ és az $OB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B_n$ egyenlőségek, akkor az $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ egyenesek párhuzamosak (141. ábra).

199. tétel. Ha az OA egyenesen fekvő $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokra az $OA_1A_2 \dots A_n$ elrendezés és az $OA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ egyenlőségek állanak fenn, s ha b egy az O ponton áthaladó más egyenes, akkor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokon átfektetett egymással párhuzamos, de b -vel nem párhuzamos egyenesek a b egyenest olyan $B_1, B_2, \dots, B_n$ pontokban metszik, melyekre az $OB_1B_2 \dots B_n$ elrendezés és az $OB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B_n$ egyenlőségek állanak fenn (141. ábra).



141. ábra.

Ennek a tételnek az alapján meghatározhatjuk egy tetszőleges OB szakasz n -edrészét, vagyis egy olyan OB_1 szakaszt, melynek n -szerese az OB szakasz. Ennek meghatározására felvesszünk egy az O pontból kiinduló a felsőugarat, mely nem tartozik az OB egyeneshez, s ezen olyan $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontokat, melyekre az $OA_1A_2 \dots A_n$ elrendezés és az $OA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ egyenlőségek állanak fenn (III. 2). Az A_nB egyenessel párhuzamos egyeneseket fektetünk az $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ pontokon át; ezeknek az OB szakasszal való metszéspontjai legyenek $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$; a 199. tétel szerint ezeknek a pontoknak az elrendezése $OB_1B_2 \dots B_{n-1}B$, s fennállanak az $OB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B$ egyenlőségek; tehát OB az OB_1 szakasz n -szerese, vagyis OB_1 az OB szakasz n -edrésze. A szakaszok nagysági vonatkozásaira megállapított tételeinkből következik (I. 76–77. o.), hogy egy szakasz n -edrésze nagyságát illetően egyértelműen meg van határozva a szakasz nagysága és n által.

Értelmezés. Ha a PQ szakasz valamely OE szakasz m -szerese, és az RS szakasz az OE szakasznak n -szerese, akkor azt mondjuk, hogy a PQ és RS szakaszok aránya egyenlő az m és n egész számok arányával. Ha a $P'Q'$ szakasz egy $O'E'$ szakasznak m -szerese, és $R'S'$ az $O'E'$ szakasznak n -szerese, vagyis ha a $P'Q'$ és $R'S'$ szakaszok aránya szintén egyenlő m és n arányával,

akkor azt mondjuk, hogy a PQ és RS szakaszok aránya egyenlő a $P'Q'$ és $R'S'$ szakaszok arányával.

Ha a PQ és RS szakaszok aránya egyenlő az m és n egész számok arányával, és ha m', n' olyan egész számok, melyekre $m:n = m':n'$, akkor PQ és RS aránya egyenlő m' és n' arányával. Jelöljük ugyanis a PQ szakasz m -edrészt OE -vel, és $m m'$ -edrészt OE' -vel; az értelmezés szerint:

$$PQ = m m' \cdot OE' = m' (m \cdot OE'),$$

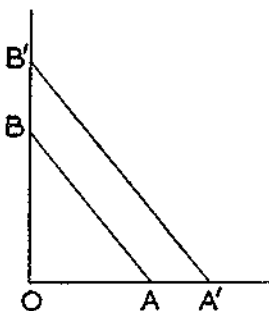
$$RS = n \cdot OE = n m' \cdot OE' = n' (m \cdot OE'),$$

tehát PQ és RS az $m \cdot OE'$ szakasznak m' -szerese, illetve n' -szerese. — Ha viszont a PQ és RS szakaszok aránya az m és n egész számoknak, s ugyancsak az m' és n' egész számoknak az arányával egyenlő, akkor $m:n = m':n'$. Jelöljük ugyanis a PQ szakasz m -edrészt OE -vel, m' -edrészt OE' -vel; ezek rendre az RS szakasznak n -edrésze, illetve n' -edrésze, tehát $m \cdot OE = m' \cdot OE'$ és $n \cdot OE = n' \cdot OE'$; az első egyenletet n' -vel, a másodikat m' -vel szorozva kapjuk, hogy $n'm \cdot OE = m'n \cdot OE'$, tehát $n'm = m'n$.

Ha a PQ és RS szakaszok aránya is, és a $P'Q'$ és $R'S'$ szakaszok aránya is egyenlő az m, n egész számok arányával, akkor jelöljük a PQ szakasz m -edrészt OE -vel, a $P'Q'$ szakasz m -edrészt $O'E'$ -vel, s mérjük rá két az O pontból kiinduló egymásra merőleges félsugár közül az egyikre az $OA = OE$, $OA' = PQ$, $OA'' = RS$, a másikra az $OB = O'E'$, $OB' = P'Q'$, $OB'' = R'S'$ szakaszokat. A 198. tétel szerint az $AB, A'B', A''B''$ egyenesek párhuzamosak. Viszont, ha az O pontból kiinduló és egymásra merőleges a és b félsugarakon A', A'' és B', B'' olyan pontok, melyekre $A'B'$ párhuzamos $A''B''$ -vel, akkor feltéve azt, hogy az OA' és OA'' szakaszok aránya egyenlő valamely m és n egész számok arányával, az OB' és OB'' szakaszok aránya is egyenlő az m és n számok arányával, tehát az OA' és OA'' szakaszok arányával is; ez a 199. tételből a fenti értelmezés szerint következik. Ennek az utóbbi tulajdonságnak alapján értelmezzük a szakaszok arányosságát olyan esetben is, midőn két adott szakasz aránya nem jellemezhető két egész szám arányával, vagyis midőn nincs olyan szakasz, melynek a két adott szakasz közül mindegyik egészszámszoros.

Értelmezés. Legyenek OA és OB egymásra merőleges félsugarak. Ha A, A' és B, B' az OA , illetve az OB félsugáron fekvő

olyan pontok, melyekre az AB és az $A'B'$ egyenesek párhuzamosak, vagy azonosak, akkor azt mondjuk, hogy az OA és OA' szakaszok aránya egyenlő az OB és OB' szakaszok arányával; jelben: $OA : OA' = OB : OB'$ (142. ábra). — Ha általánosabban, PQ és RS , illetve $P'Q'$ és $R'S'$ olyan szakaszok, melyek rendre egyenlők a fenti OA és OA' , illetve OB és OB' szakaszokkal, akkor ugyancsak azt mondjuk, hogy a PQ és RS szakaszok aránya egyenlő a $P'Q'$ és $R'S'$ szakaszok arányával: $PQ : RS = P'Q' : R'S'$.



142. ábra.

Szakaszok arányosságának elméletét HILBERT tárgyalásának megfelelően a következő, ú. n. PASCAL-félé (vagy PAPPUS-féle) tételre alapítjuk; ez a tétel a kúpszeletek elméletéből ismert PASCAL-féle tételnek egyenes-párra vonatkozó speciális esete; ezt is előbb csak egymásra merőleges egyenesekre vonatkozóan mondjuk ki, s ebben az alakban speciális PASCAL-féle tételnek nevezzük.

200. tétel. Ha két az O pontból kiinduló egymásra merőleges a és b félsugáron A, B, C illetve A', B', C' olyan pontok, melyekre az AB' és a BA' egyenesek párhuzamosak, s ugyancsak az AC' és CA' egyenesek párhuzamosak, akkor a BC' és a CB' egyenesek is párhuzamosak.

Bizonyítás (143. ábra). A C' pontból bocsássunk merőlegest az AB' egyenesre, ez nem párhuzamos az AO egyenessel (92. tétel és 181. tétel korolláriuma), tehát azt egy D pontban metszi. Az $AB'D$ háromszögnek két magassági vonala, $B'O$ és DC' , átmegy a C' ponton, a 185. tétel szerint tehát az AC' egyenes ennek a háromszögnek a harmadik magassági vonala, s ezért AC' merőleges a DB' egyenesre. Mivel AC' és CA' feltevésünk szerint párhuzamosak, tehát DB' merőleges a CA' egyenesre is. Mivel AB' és BA' párhuzamosak, és a DC' egyenes meghatározása szerint merőleges AB' -re, tehát DC' merőleges BA' -re is; ebből következik, hogy a C' pont az $A'BD$ háromszög magassági vonalainak közös pontja, s ezért a BC' egyenes merőleges DA' -re. Mint fent megállapítottuk, DB' merőleges CA' -re, s így a B' pont az $A'CD$ háromszög $A'O$ és DB' magassági vonalainak közös pontja; tehát ennek a háromszögnek

harmadik magassági vonala a CB' egyenes, s így a CB' egyenes merőleges DA' -re. Mivel tehát a DA' egyenes a BC' és a CB' egyenesek közös merőlegese, ez a két egyenes párhuzamos egymással (181. tétel).

A speciális PASCAL-féle tételnek ez az egyszerű bebizonyítása SCHUR-tól származik.

A továbbiakban jobb áttekinthetőség kedvéért a szakaszokat egy betűvel (latin kis betűvel) fogjuk jelölni; így például az OA , OA' szakaszt a -val, a' -vel, stb.

A fent adott értelmezésből közvetlenül adódnak a szakaszok arányosságára vonatkozó alábbi tulajdonságok:

Minden a, b -re $a:a = b:b$.

Ha $a:a' = b:b'$, akkor $a':a = b':b$ és $b:b' = a:a'$.

Ha $a:a' = b:b'$ és $a:a'' = b:b''$, akkor $a':a'' = b':b''$.

Ha az a, a', b, b' szakaszok

közül három meg van adva, akkor meghatározható a negyedik szakasz; nagyságát illetően egy és csak egyféleképpen, úgy, hogy $a:a' = b:b'$ legyen; vagyis ha a és $\bar{a}$ két olyan szakasz, melyekre $a:a' = b:b'$ és $\bar{a}:a' = b:b'$, akkor $a = \bar{a}$.

Ha $a = b$ és $a' = b'$, akkor $a:a' = b:b'$. Ennek igazolására mérjük rá az egymásra merőleges $\vec{OA}$ és $\vec{OB}$ félsugarakra az $OA = OB$ és az $OA' = OB'$ szakaszokat; az $\angle AOB$ derékszög szögfelezője közös merőlegese AB -nek és $A'B'$ -nek (107. tétel) s ezért AB és $A'B'$ párhuzamosak (181. tétel).

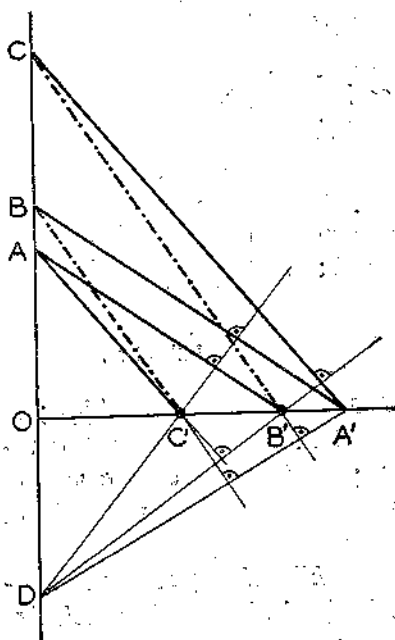
A 197. tétel alkalmazásával közvetlenül adódik a következő két állítás:

Ha $a:a' = b:b'$, akkor $(a+a'):a' = (b+b'):b'$.

Ha $a:a'' = b:b''$ és $a':a'' = b':b''$, akkor $(a+a'):a'' = (b+b'):b''$.

A PASCAL-féle tétel a szakaszok arányosságára vonatkozóan a következőt állapítja meg:

Ha $a:b = b':a'$, és $a:c = c':a'$, akkor $b:c = c':b'$.



143. ábra.

Alkalmazzuk ezt a tételt a következő két arányosságra:

$$a : a' = b : b' \text{ és } a : b' = a' : b; \text{ ebből: } a' : b' = a : b.$$

Eszerint az $a : a' = b : b'$ arányosságból következik az $a : b = a' : b'$ arányosság, vagyis az arányosságban a belső tagok egymással felcserélhetők. (A PASCAL-féle tételnek ez az alkalmazása megfelel annak a speciális feltételnek, hogy $OA = OB'$ és $OB = OA'$.)

Ebből következik továbbá:

$$\text{Ha } a : a' = b : b' \text{ és } b : b' = c : c', \text{ akkor } a : a' = c : c'.$$

Értelmezés. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögeket *hasonló háromszögeknek* nevezzük, ha szögeikre fennállanak a következő egyenlőségek:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B', \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C', \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C';$$

ezek közül bármely kettőből következik a harmadik a 182. és 99. tétel szerint.

Háromszögek hasonlósága *reflexív, szimmetrikus és tranzitív* vonatkozás, mivel ugyanilyen a szögek egyenlőségi vonatkozása (95. tétel).

201. tétel. Ha ABC és $A'B'C'$ hasonló háromszögek, akkor megfelelő oldalai arányosak, vagyis $AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy ABC és $A'B'C'$ derékszögű háromszögek, mégpedig $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' = R$. Legyen A'' és C'' a $\overline{BA}$, illetve a $\overline{BC}$ félsugárnak az a pontja, melyre $BA'' = B'A'$ és $BC'' = B'C'$. A 104. (vagy a 122.) tétel szerint az $A'B'C'$ háromszög egybevágó az $A''BC''$ háromszöggel; ebből következik, hogy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA''C''$, tehát AC és $A''C''$ párhuzamosak (181. tétel). Ebben az esetben tehát az értelmezés szerint $AB : A''B = CB : C''B$, s mivel $A''B = A'B'$, $C''B = C'B'$ tehát ugyancsak az értelmezés szerint $AB : A'B' = CB : C'B'$. Eszerint két egymással hasonló derékszögű háromszög megfelelő befogói arányosak.

Legyen másodszor ABC és $A'B'C'$ két tetszőleges háromszög. Jelöljük az ABC háromszög belső szögfelezőinek közös pontját O -val (l. 187. tétel); az O pontból a háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai legyenek D, E, F ; ezek a pontok rendre a $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ oldalak belső pontjai, és $OD = OE = OF$ (l. a 187. tétel bizonyítását). Az $A'B'C'$ háromszögnél megfelelően szerkesztett pontokat jelöljük rendre O', D', E', F' -vel. Az AFO és

$A'F'O'$ derékszögű háromszögek hasonlóak, mivel feltevésünk szerint $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, s így ezeknek a szögeknek a fele: $\sphericalangle OAF = \sphericalangle O'A'F'$. A fenti speciális eset alapján tehát ennek a két háromszögnek megfelelő befogói arányosak: $AF:OF = A'F':O'F'$ s hasonlóan $FB:OF = F'B':O'F'$; ebből az arányosságokra vonatkozó fenti szabályok alkalmazásával adódik $(AF+FB):OF = (A'F'+F'B'):O'F'$; mivel pedig F az AB oldalnak pontja, s ezért $AF+FB=AB$, s hasonlóan $A'F'+F'B'=A'B'$, tehát

$$AB:OF = A'B':O'F'.$$

Hasonló megfontolás szerint adódik a másik két-két oldalra vonatkozóan:

$$BC:OD = B'C':O'D' \text{ és } CA:OE = C'A':O'E'.$$

Tekintettel az $OD=OE=OF$ és $O'D'=O'E'=O'F'$ egyenlőségekre, a fenti arányosságokból a belső tagok felcserélésével következik:

$$OF:O'F' = AB:A'B' = BC:B'C' = CA:C'A'.$$

202. tétel. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ és $AB:A'B' = AC:A'C'$, akkor a két háromszög hasonló.

Bizonyítás. Legyen B'' az $\vec{AB}$ félsugárnak az a pontja, melyre $AB'' = A'B'$, s legyen C'' az AC egyenesnek a B'' ponton átmenő és BC -vel párhuzamos egyenessel közös pontja. Az ABC és $AB''C''$ háromszögek hasonlóak, mivel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B''AC''$ és $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB''C''$ (megfelelő szögek); tehát a 201. tétel szerint $AB:AB'' = AC:AC''$. Feltételeink szerint: $AB:A'B' = AC:A'C'$. Mivel ebben a két arányosságban a három-három első tag rendre egyenlő, következik, hogy a negyedik tagok is egyenlők, tehát $AC'' = A'C'$. A 104. tétel szerint tehát az $AB''C''$ háromszög egybevágó az $A'B'C'$ háromszöggel, s mivel ABC és $AB''C''$ hasonlóak, tehát az ABC és $A'B'C'$ háromszögek is hasonlóak.

203. tétel. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögek megfelelő oldalai arányosak, vagyis ha $AB:A'B' = BC:B'C' = CA:C'A'$, akkor a két háromszög hasonló.

Bizonyítás. Legyen B'' és C'' rendre az $\vec{AB}$ és az $\vec{AC}$ félsugárnak az a pontja, melyre $AB'' = A'B'$ és $AC'' = A'C'$. A 202. tétel szerint az ABC és $AB''C''$ háromszögek hasonlóak, s ezért a 201. tétel szerint $AB:AB'' = BC:B''C''$; feltevésünk sze-

rint $AB:A'B'=BC:B'C'$. Mivel ebben a két arányosságban a három-három első tag egyenlő, a negyedik tagok is egyenlők: $B'C'=B''C'$. Ebből következik a 106. tétel szerint, hogy az $AB''C''$ háromszög egybevágó az $A'B'C'$ háromszöggel, s mert ABC és $AB''C''$ hasonló, tehát az ABC és $A'B'C'$ háromszögek is hasonló.

A háromszögek hasonlóságára vonatkozó fenti tételeinkből következik a PASCAL-féle tételnek következő általánosabb alakja:

204. tétel. Ha A, B, C az a egyenesnek, A', B', C' az a' egyenesnek olyan pontjai, melyekre az AB' és BA' egyenesek párhuzamosak, s ugyancsak az AC' és CA' egyenesek párhuzamosak, akkor a BC' és CB' egyenesek is párhuzamosak.

Bizonyítás.

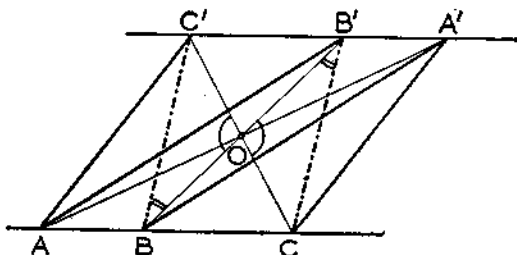
Tegyükfelélsőször, hogy a és a' párhuzamosak (144. ábra). Feltételeinkből következik ekkor, hogy az $ABA'B'$ négyszög s ugyancsak az $ACA'C'$ négyszög parallelogramma.

Mindkettőnek közép-

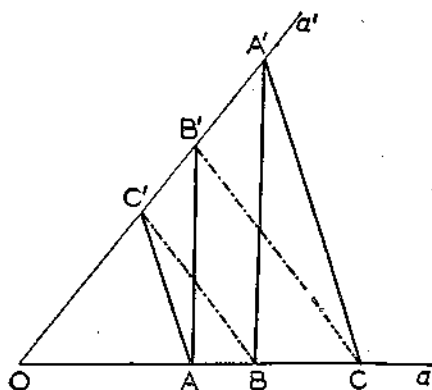
pontja az AA' szakasz O középpontjával azonos; tehát az AA', BB', CC' szakaszoknak középpontja az O pont. Az $OB'C$ és OBC' háromszögek a 104. tétel szerint egybevágók, mivel $OB'=OB$,

$OC=OC'$ és $\sphericalangle BOC'=\sphericalangle B'OC$ (csúcsszögek); ebből következik, hogy a BB' egyenest a $B'C$ és BC' egyenesek az egymással egyenlő $\sphericalangle BB'C=\sphericalangle B'BC'$ váltószögek alatt metszik, s így a 181. tétel folytán a BC' és CB' egyenesek párhuzamosak.

Tegyük fel másodszer, hogy az a és a' egyeneseknek van egy O közös pontja (145. ábra). Ha az A és B pontokat nem választja el



144. ábra.



145. ábra.

egymástól az a egyenesen az O pont; tegyük fel például, hogy elrendezésük OAB , akkor az a' egyenesen az A', B', O' pontokra fennáll az $OB'A'$ elrendezés (alkalmazzuk a II. 4. axiomát az OBA' háromszögre és az AB' egyenesre); ekkor tehát az A', B' pontok is egy az O pont által meghatározott félsugáron fekszenek, és megfordítva; ugyanez érvényes az A, C és az A', C' pontokra vonatkozóan. Ha tehát B és C egy az O pont által meghatározott félsugáron fekszenek, akkor B' és C' is, ha pedig az O pont az a egyenesen elválasztja a B és C pontokat, akkor az a' egyenesen elválasztja egymástól a B' és C' pontokat. Mivel AB' párhuzamos BA' -vel, a 181. tétel folytán tehát az OAB' és az OBA' háromszögek hasonlóak, s ezért a 201. tétel szerint oldalaira fennáll az $OA:OB=OB':OA'$ arányosság. Jelöljük röviden az OA szakaszt a -val, OA' -t a' -vel stb.; eszerint $a:b=b':a'$. Hasonlóan, az OAC' és OCA' háromszögek hasonlóságából adódik a 201. tétel szerint, hogy $a:c=c':a'$. Ebből a két arányosságból a speciális PASCAL-féle tétel (200. tétel) alapján következik a $b:c=c':b'$ arányosság. Tehát az OBC' és OCB' háromszögek oldalaira fennáll az $OB:OC'=OC':OB'$ arányosság, s azonkívül $\sphericalangle BOC'=\sphericalangle COB'$, mivel a fentiek szerint ezek a szögek vagy egybeesnek egymással, vagy csúcsszögek. A 202. tétel szerint tehát az OBC' és OCB' háromszögek hasonlóak, s ezért $\sphericalangle OBC'=\sphericalangle OCB'$. Aszerint, hogy az a egyenesen a B és C pontok az O pontnak ugyanazon az oldalán, vagy különböző oldalon fekszenek, ez a szögegyenlőség azt jelenti, hogy az a egyenest a BC' és CB' egyenesek egyenlő megfelelő, illetve egyenlő váltószögekben metszik; mindkét esetben következik a 181. tételből, hogy BC' párhuzamos CB' -vel.

A háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételek alapján bebizonyítjuk a következő DESARGUES-féle tételt (mely speciális esete a projektív geometriából ismert általános DESARGUES-féle tételnek):

205. tétel. *Ha az egymástól különböző AA', BB', CC' egyenesek egy O ponton mennek át, vagy ha ez a három egyenes egymással párhuzamos, ha továbbá az AB és $A'B'$ egyenesek, s ugyancsak az AC és $A'C'$ egyenesek párhuzamosak, akkor a BC és $B'C'$ egyenesek is párhuzamosak.*

Bizonyítás. Ha az AA', BB', CC' egyenesek egy O ponton mennek át (146. ábra), s ha az A' pont az $\vec{OA}$ félsugáron, akkor B' az $\vec{OB}$ félsugáron fekszik, s így az $\sphericalangle OAB$ és $\sphericalangle OA'B'$ szögek mint megfelelő szögek egyenlők; ha pedig O az AA' szaka-

szon és ezért a BB' szakaszon fekszik, akkor az $\sphericalangle OAB$ és az $\sphericalangle OA'B'$ szögek mint váltószögek egyenlők; mivel továbbá $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$ (egymással azonos, illetve csúcsszögek), tehát az OAB és az $OA'B'$ háromszögek hasonlóak. Ugyanígy az OAC és az $OA'C'$ háromszögek hasonlóak. A 201. tétel szerint fennállnak tehát a következő arányosságok:

$$OA : OA' = OB : OB'$$

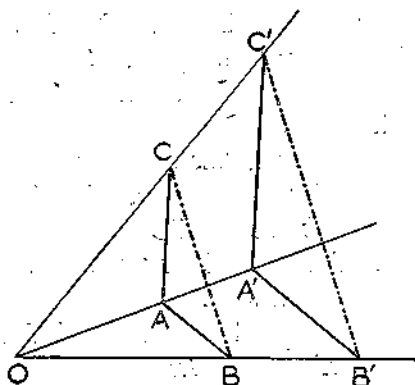
$$\text{és } OA : OA' = OC : OC'.$$

Ebből az arányosságra vonatkozó tételeink szerint következik:

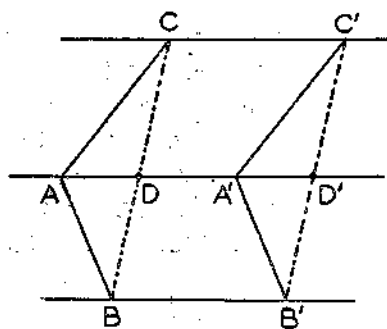
$$OB : OB' = OC : OC';$$

miel pedig $\sphericalangle BOC = \sphericalangle B'OC'$, tehát a 202. tétel szerint az OBC

és az $OB'C'$ háromszögek hasonlóak. Az $\sphericalangle OBC$ és $\sphericalangle OB'C'$ megfelelő, illetve váltószögek egyenlőségéből következik, hogy a BC és $B'C'$ egyenesek párhuzamosak (181. tétel).



146. ábra.



147. ábra.

Ha az AA' , BB' , CC' egyenesek párhuzamosak (147. ábra), akkor az $AA'B'B$ és az $AA'C'C$ négyszögek parallelogrammák, s ezért $AB = A'B'$ és $AC = A'C'$. Jelöljük D -vel a BC egyenesnek az AA' egyenessel közös pontját; feltéve, hogy A, B, C nem fekszenek egy egyenesen (különben a tétel állítása nyilvánvaló volna), a D pont különböző A -tól.

Legyen D' az AA' egyenesnek

az a pontja, melyre az AD és $A'D'$ szakaszok egyenlők és meg-
egyező irányúak az AA' egyenesre nézve. Mivel az $\vec{AB}$ és az $\vec{A'B'}$ félsugarak az AA' egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, $\sphericalangle DAB$ és $\sphericalangle D'A'B'$ mint megfelelő szögek egyenlők: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle D'A'B'$; ebből és a fenti $AB = A'B'$, $AD = A'D'$ egyenlőségekből következik, hogy az ABD és az $A'B'D'$ háromszögek egybevágók (104. tétel), s ezért $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. Ennek a két szögnek az egyenlőségéből következik, a 181. tétel szerint, hogy a

DB és a $D'B'$ egyenesek párhuzamosak. Hasonlóan adódik, hogy az ACD és az $A'C'D'$ háromszögek egybevágók, az $\sphericalangle ADC$ és az $\sphericalangle A'D'C'$ szögek egyenlők, s ezért a DC és a $D'C'$ egyenesek párhuzamosak. De mert D a BC egyenesen fekszik, a IV axiómából következik, hogy a BC egyenessel párhuzamos $D'B'$ és $D'C'$ egyenesek azonosak, tehát D' a $B'C'$ egyenesen fekszik, és $B'C'$ párhuzamos BC -vel.

A DESARGUES-féle tétel megfordítása a következő

206. tétel. *Ha az AB és $A'B'$ egyenesek párhuzamosak, s ugyancsak AC és $A'C'$, továbbá BC és $B'C'$ párhuzamosak, akkor az AA' , BB' , CC' egyenesek vagy párhuzamosak, vagy egy O ponton mennek át.*

Bizonyítás. Ha az AA' , BB' és CC' közül kettőnek, például AA' -nak és BB' -nek van egy O közös pontja, akkor jelöljük C'' -vel az OC egyenesnek az $A'C'$ egyenessel közös pontját. A 205. tétel szerint $B'C''$ párhuzamos BC -vel, s feltevésünk szerint $B'C'$ is párhuzamos BC -vel; ebből a IV axióma szerint következik, hogy a $B'C''$ egyenes azonos $B'C'$ -vel, és a C'' pont egybeesik C' -vel.

Megjegyzés. A fenti HILBERT-féle tárgyalás gondolatmenete röviden a következő. Szakaszok arányosságát egymásra merőleges egyenesekre vonatkozóan értelmeztük; ugyancsak merőleges egyenesek esetében bebizonyítottuk a PASCAL-féle tételt, s ennek alapján levezettük a háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételeket, előbb derékszögű háromszögek befogóira, s ebből tetszőleges háromszögek oldalaira vonatkozóan. A háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételekből levezettük a PASCAL-féle tételt nem merőleges egyenesekre is, továbbá a DESARGUES-féle tételt. — Ha a DESARGUES-féle tételt a háromszögek hasonlóságára vonatkozó tételektől függetlenül bebizonyítjuk, akkor az arányos szakaszok értelmezését nem szükséges merőleges egyenesekre korlátozni. A következőben szakaszok arányosságának és háromszögek hasonlóságának ezt a másik tárgyalási módját ismertetjük: bebizonyítjuk előbb a PASCAL-féle tételt tetszőleges egyenesekre, s ebből levezetjük a DESARGUES-féle tételt. A következő bizonyítások HESSENBERGTől származnak.

Értelmezés. Legyenek $a = AB$ és $a' = A'B'$ egymástól különböző egyenesek. Az AB' és BA' egyeneseket az a , b alapvonalakra vonatkozóan *antiparallelnak* nevezzük, ha az A , B , A' , B' pontok különbözők és egy körön fekszenek, vagy ha az

A és B pontok egybeesnek és az a alapvonal az A, A', B' pontokon áthaladó körnek érintője (illetve, ha A' és B' egybeesnek és a' az A, B, A' pontokon áthaladó körnek érintője). A következő tárgyalásban az alapvonalak mindig ugyanazok az a és a' egyenesek.

Az értelmezésből következik, hogy ha AB' és BA' antiparallelák, akkor AA' és BB' is antiparallelák. A kör és egyenes metszéspontjaira vonatkozó tételünkéből (143. o.) következik, hogy ha A és B az a egyenesnek egymástól különböző, és a' -höz nem tartozó pontjai, akkor van az a' egyenesen egy és csak egy olyan B' pont, melyre AB' és BA' antiparallelák.

A kerületi szögekre vonatkozó tételekből levezetjük a következő tételt:

Ha AB' és BA' antiparallelák s ha C és D' rendre az a és a' egyenesnek olyan pontjai, melyekre CD' párhuzamos AB' -vel, akkor BA' és CD' is antiparallelák.

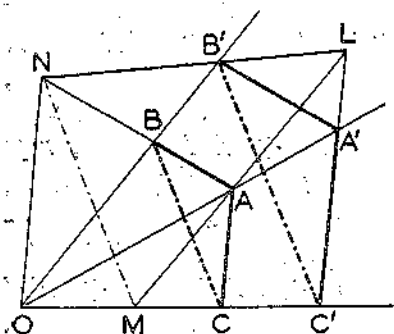
A sík irányítására vonatkozó eredményeink (122. o.) szerint a 194. tétel következőképpen fogalmazható: ha az A, B, A', B' pontok egy k körön fekszenek, akkor az $\sphericalangle ABA'$ és az $\sphericalangle AB'A'$ szögek vagy egymással, vagy egymás mellékszögével egyenlők, aszerint, hogy a síknak (ABA') és ($AB'A'$) irányításai megegyezők, vagy ellenkezők. A $\sphericalangle CBA'$ szög egyenlő az $\sphericalangle ABA'$ szöggel, vagy ennek mellékszögével, aszerint, hogy a C pont a $\vec{BA}$ félsugáron, vagy ennek meghosszabbításán fekszik; az első esetben megegyezők, a második esetben ellenkezők a (CBA') és az (ABA') síkirányítások. Végül a 181. tétel szerint a $\sphericalangle CD'A'$ és az $\sphericalangle AB'A'$ szögek egyenlők, vagy egyik a másiknak a mellékszögével egyenlő, aszerint, hogy a ($CD'A'$) és az ($AB'A'$) síkirányítások megegyezők, vagy ellenkezők. A fentiek összefoglalásából következik, hogy a $\sphericalangle CD'A'$ szög a $\sphericalangle CBA'$ szöggel, vagy ennek a mellékszögével egyenlő, aszerint, hogy megegyezők, vagy ellenkezők a ($CD'A'$) és a (CBA') síkirányítások; az első esetben a D' és B pontok az $A'C$ egyenesnek ugyanazon az oldalán, a második esetben különböző oldalán fekszenek, s így a 196. tétel szerint az A', B, C, D' pontok egy körön fekszenek, tehát BA' és CD' antiparallelák a fenti értelmezés szerint. — Ugyanezzel a megfontolással adódik a fenti tétel következő megfordítása:

Ha A, B, C az a egyenesnek, A', B', D' az a' egyenesnek olyan pontjai, melyekre AB' és BA' antiparallelák, s ugyancsak CD' és BA' antiparallelák, akkor az AB' és CD' egyenesek párhuzamosak.

Ezeknek az eredményeknek az alapján a PASCAL-féle (204.) tételt következőképen bizonyítjuk be. (A bizonyítást könnyebb egészen formálisan, ábra nélkül, követni.)

Legyenek A, B, C az a egyenesnek, és A', B', C' az a' egyenesnek olyan pontjai, melyekre AB' párhuzamos BA' -vel, és AC' párhuzamos CA' -vel. Jelöljük D' -vel az a' egyenesnek azt a pontját, melyre AC' és BD' antiparallelák; a fentiek szerint AD' és BC' is antiparallelák. Továbbá, mert AC' és CA' párhuzamosak, tehát CA' és BD' , s ezért BA' és CD' is antiparallelák. Fejtévésünk szerint BA' és AB' párhuzamosak; a fentiekből következik tehát, hogy AB' és CD' antiparallelák, s ezért AD' és CB' is antiparallelák. Az antiparallelákra vonatkozó fenti tételünkéből adódik, hogy BC' és CB' párhuzamosak.

A PASCAL-féle tételből levezetjük a DESARGUES-féle (205.) tételt. Legyenek AA', BB', CC' egy O ponton áthaladó, egymástól különböző egyenesek; tegyük fel, hogy AB párhuzamos $A'B'$ -vel



148. ábra.

és AC párhuzamos $A'C'$ -vel. Tegyük fel először, hogy OB nem párhuzamos AC -vel; Az A ponton át fektessünk az OB egyenessel párhuzamos egyenest, s ennek az $A'C'$ egyenessel való metszéspontját jelöljük L -el; legyen M az AL és OC egyenesek közös pontja, N pedig az LB' és AB egyenesek közös pontja. (148. ábra). Az $A, A', O; B', N, L$ pontokra teljesülnek a PASCAL-féle tétel feltételei;

ugyanis AN párhuzamos $A'B'$ -vel, és AL párhuzamos OB' -vel, tehát $A'L$, vagyis $A'C'$ párhuzamos ON -nel. — Hasonlóan, az $A, B, N; O, M, C$ pontokra: AM párhuzamos BO -val, és előbbi eredményünk szerint AC párhuzamos NO -val; ebből következik, hogy BC párhuzamos NM -mel. — Végül az $O, M, C; L, B', N$ pontokra: OB' párhuzamos ML -el és ON párhuzamos $C'L$ -el, tehát MN párhuzamos $C'B'$ -vel. A fentiekből következik, hogy BC párhuzamos $B'C'$ -vel. — Ha OB párhuzamos AC -vel, felvesszünk az AB szakaszon egy D pontot; jelöljük D' -vel az OD egyenesnek $A'B'$ -vel való közös pontját. A fenti bizonyításból következik, ha B -t és B' -t D -vel és D' -vel helyettesítjük, hogy DC párhuzamos

$D'C'$ -vel; a fenti bizonyítást ismét alkalmazva a $D, B, C; D', B', C'$ pontokra adódik, hogy BC párhuzamos $B'C'$ -vel.

A DESARGUES-féle tételből indirekt megfontolással adódik a tétel megfordítása (l. a 206. tételt és bizonyítását). Ebből levezetjük a DESARGUES-féle tételt arra az esetre, ha az AA', BB', CC' egyenesek párhuzamosak. Tegyük fel, hogy AB párhuzamos $A'B'$ -vel és AC párhuzamos $A'C'$ -vel. A B' ponton át BC -vel párhuzamos egyenest fektetünk, s ennek az $A'C'$ egyenessel közös pontját jelöljük C'' -vel. Az $A, B, C; A', B', C''$ pontokra fennállanak a DESARGUES-féle tétel megfordításának feltételei, s mert AA' párhuzamos BB' -vel, tehát AA' párhuzamos CC'' -vel. Feltévéstünk szerint AA' párhuzamos CC' -vel is; tehát a CC'' egyenes a CC' egyenessel, s ezért a C'' pont a C' ponttal azonos; vagyis a BC egyenes párhuzamos $B'C'$ -vel.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban a PASCAL-féle tételen kívül csak síkra vonatkozó összetartozási, rendezési és párhuzamossági tételeket használtunk fel; ez a fontos eredmény, hogy a DESARGUES-féle tétel levezethető az I. 1–3, II, IV axiómákból és a PASCAL-féle tételből, s a fenti bizonyítás, HESSENBERGTől származik.

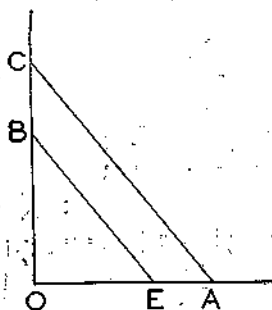
35. §. Szakaszok szorzása.

Értelmezés. Felveszünk egy tetszőleges szakaszt, ezt *egységszakasznak* nevezzük, és e -vel (vagy I-gyel) jelöljük. A c szakasz az a és b szakaszok szorzatának nevezzük (az e egységszakaszra vonatkozóan), ha fennáll a $c:b = a:e$ arányosság.

Emlékeztetünk itt ennek az arányosságnak az értelmezésére. Legyenek $\vec{OA}$ és $\vec{OB}$ egymásra merőleges

félsugarak, s legyenek E és A az $\vec{OA}$ -nek, B és C az $\vec{OB}$ -nek olyan pontjai, melyekre $OE = e, OA = a, OB = b, OC = c$. Ha az EB és AC egyenesek párhuzamosak, vagy egybeesnek, akkor $c:b = a:e$ (149. ábra).

Mivel az e egységszakasz megválasztását a következő tárgyalásban nem változtatjuk, az egységszakasz említése nélkül, a c szakaszt az a és b szakaszok szorzatának nevezzük és $c = ab$ -vel jelöljük.



149. ábra.

Bármely két a és b szakasz egyértelműen meghatározza nagyságát illetően a $c = ab$ szakaszt.

A szakaszok arányosságára vonatkozó tételeinkből (230—231. o.) közvetlenül adódnak a szakaszok szorzására vonatkozó következő tételek.

Minden a szakaszra $ae = ea = a$.

Ha $ab = ab'$, akkor $b = b'$. Ugyanis, ha az ab szakaszt d -vel jelöljük, az értelmezés szerint $d:b = a:e$ és $d:b' = a:e$; ebből, mivel az arány három tagja egyértelműen meghatározza a negyedik tag nagyságát, tehát $b = b'$.

Szakaszok szorzása kommutatív művelet, vagyis $ab = ba$. Ugyanis, ha $c = ab$, akkor $c:b = a:e$, ebből az arány belső tagjainak felcserélésével következik: $c:a = b:e$, s így az értelmezés szerint $c = ba$, tehát $ab = ba$.

Ha $ba = b'a$, akkor $b = b'$. Ez az előbbi két eredmény összefoglalásából következik.

Ha $a:b = c:d$, akkor $ad = bc$, és megfordítva. Jelöljük az ad szorzatot f -fel; az értelmezés szerint $f:d = a:e$, vagyis $a:e = f:d$; ebből és az $a:b = c:d$ arányosságból következik a PASCAL-féle tétel szerint (l. 230. o.), a $b:e = f:c$ arányosság; tehát $f:c = b:e$, s így az értelmezés szerint $f = bc$, vagyis $ad = bc$. — Megfordítva, ha $ad = bc = f$, akkor $f:c = b:e$ és $f:d = a:e$, ebből a PASCAL-féle tétel szerint $a:b = c:d$.

Szakaszok szorzása asszociatív művelet, vagyis $(ab)c = a(bc)$. Jelöljük az $ab = ba$ szakaszt d -vel, a bc szakaszt f -fel; a $d = ba$ egyenlőségből $d:a = b:e$; az $f = bc$ egyenlőségből: $f:c = b:e$; a két utóbbi arányból következik: $d:a = f:c$, s így előbbi eredményünk szerint $dc = af$, vagyis $(ab)c = a(bc)$.

Szakaszok szorzása disztributív a szakaszok összeadására vonatkozóan, vagyis $(a+b)c = ac + bc$ és $c(a+b) = ca + cb$. Tekintettel a szorzás kommutatív voltára elég az első állítást bizonyítani. Legyen $ac = d$ és $bc = f$; az értelmezés szerint $d:c = a:e$ és $f:c = b:e$; az arányosságokra vonatkozó szabályaink szerint ezekből adódik: $(d+f):c = (a+b):e$, tehát $d+f = (a+b)c$, vagyis $ac + bc = (a+b)c$.

Ha n tetszőleges pozitív egész szám, akkor $(na)b = a(nb) = n(ab)$ (na jelenti az a szakasz n -szeresét, l. 76. o.). Ha $n = 2$, akkor a szorzat disztributív tulajdonsága alapján $(a+a)b = ab + ab$,

tehát $(2a)b=2(ab)$, s hasonlóan $a(2b)=2(ab)$. Teljes indukcióval következik állításunk minden n -re.

Jelöljük $\frac{1}{n}a$ -val az a szakasz n -edrészét, vagyis azt a szakaszt, melynek n -szerese az a szakasz (l. 227. o.). A fentiekből következik, hogy $a\left(\frac{1}{n}e\right)=\frac{1}{n}a$ és $a\left(\frac{1}{n}b\right)=\left(\frac{1}{n}a\right)b=\frac{1}{n}(ab)$.

Értelmezés. Az a szakasz inverzén (vagy reciprok szakaszon) értjük azt az a^{-1} szakaszt, melyre $a:e=e:a^{-1}$; előbbi eredményünk szerint az $a:b=c:d$ arányosság aequivalens az $ad=bc$ egyenlőséggel, tehát az a szakaszra és inverzére, a^{-1} -re, fennáll az $aa^{-1}=a^{-1}a=e$ egyenlőség.

Értelmezés. Az a és b szakaszok hányadosán értjük azt a szakaszt, mely az a szakasznak a b szakasz inverzével való szorzata: jelben $\frac{a}{b}=ab^{-1}$.

Ennek az értelmzésnek alapján az $a:b=c:d$ arányosság aequivalens azzal a feltétellel, hogy az a és b szakaszok hányadosa egyenlő legyen a c és d szakaszok hányadosával. Hangsúlyozzuk, hogy ezek a hányadosok minden esetben szakaszok; például a $2a$ és az a szakasz hányadosa a $2e$ szakasz.

Értelmezés. Az a szakasznak az a szakasszal való szorzatát az a szakasz négyzetének nevezzük és a^2 -tel jelöljük. Az a szakaszt az a^2 szakasz négyzetgyökének nevezzük.

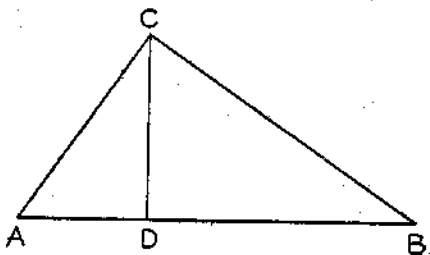
207. tétel. Ha az ABC háromszög C -nél fekvő szöge derékszög, s ha D jelenti a C -ből az AB átfogóra bocsátott merőlegesnek a talppontját, akkor $AC^2=AD \cdot AB$ és $BC^2=DB \cdot AB$, továbbá $CD^2=AD \cdot DB$.

Bizonyítás (150. ábra).

A 110. tételből következik, hogy a D pont az AB szakaszon fekszik. Az ABC és az ACD derékszögű háromszögek hasonlóak, mivel A -nál fekvő belső szögük ugyanaz, s így a 201. tétel szerint

$AC:AB=AD:AC$; ebből

$AC^2=AD \cdot AB$; ugyanígy $BC^2=DB \cdot AB$. Az ADC és CDB derékszögű háromszögek hasonlóak, mivel mindkettő hasonló az ACB három-



150. ábra.

szöggel. Ebből a 201. tétel szerint következik $AD:CD=CD:DB$, s ezért $CD^2=AD \cdot DB$.

A fenti $AC^2=AD \cdot AB$ és $BC^2=DB \cdot AB$ egyenletekből összeadással és a disztributív szabály alkalmazásával kapjuk a következőt: $AC^2+BC^2=(AD+DB)AB$; mivel a D pont az AB szakaszon fekszik, tehát $AD+DB=AB$, s így $AC^2+BC^2=AB^2$. Ezt a következő tételben mondjuk ki:

208. tétel (PYTHAGORAS-féle tétel). *Egy derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.*

Ha a és b két tetszőleges szakasz, van olyan derékszögű háromszög, melynek befogói rendre a -val és b -vel egyenlők; a PYTHAGORAS-féle tételből következik, hogy van olyan c szakasz, t. i. ennek a háromszögnek az átfogója, mely egyenlő a két adott szakasz négyzetösszegének a négyzetgyökével. Ha $a=b$, ebből következik, hogy van olyan szakasz, melynek négyzete $2a^2$ -tel egyenlő. Hasonlóan minden n pozitív egész számra, létezik olyan szakasz, melynek négyzete na^2 -tel egyenlő; ezt a szakaszt $\sqrt{n} \cdot a$ -val jelöljük.

A PYTHAGORAS-féle tételből a III. 4 axioma alapján levezetjük a tétel következő megfordítását:

Ha az ABC háromszög oldalaira fennáll az $AC^2+BC^2=AB^2$ egyenlőség, akkor az $\sphericalangle ACB$ szög derékszög. Legyen ugyanis a C pontban az AC egyenesre emelt merőlegesen B' az a pont, melyre $CB=CB'$, s mely az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, mint B . A PYTHAGORAS-féle tétel szerint $AB'^2=AC^2+B'C^2$, tehát $AB'=AB$, s ezért $ABC \equiv AB'C$; mivel B és B' az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, ebből következik, hogy B és B' azonosak (III. 4).

209. tétel (MENELAUS-féle tétel). *Ha ABC valamely háromszög, s ha a olyan egyenes, mely nem halad át a háromszög egyik csúcán sem, s amelynek van az AB, BC, CA oldaltvonallakkal egy-egy C', A', B' közös pontja, akkor a következő szakasz-szorzatok egyenlők: $AB' \cdot BC' \cdot CA' = CB' \cdot BA' \cdot AC'$.*

Bizonyítás (151. ábra). Jelöljük L, M, N -nel az A, B, C pontokból az a egyenesre bocsátott merőlegesek talppontjait. Ha L és N különbözők, akkor az $AB'L$ és a $CB'N$ derékszögű háromszögek hasonlóak, s ezért $AB':CB'=AL:CN$; ha pedig L és N egybeesnek, akkor L és N a B' ponttal azonosak, tehát ekkor is fennáll ugyanez az arányosság. Hasonlóan adódnak a következő

arányosságok: $BC':AC' = BM:AL$,
 $CA':BA' = CN:BM$. Ezek az arányosságok sorban a következő szorzat-egyenlőségekkel aequivalensek:

$$AB' \cdot CN = CB' \cdot AL, BC' \cdot AL = AC' \cdot BM, CA' \cdot BM = BA' \cdot CN.$$

A baloldalak szorzatát és a jobb-oldalak szorzatát képezve, s figyelembe véve a szorzat kommutatív és asszociatív tulajdonságát, kapjuk, hogy

$AB' \cdot BC' \cdot CA' (AL \cdot BM \cdot CN) = CB' \cdot BA' \cdot AC' (AL \cdot BM \cdot CN)$,
s ebből a zárójelben álló szakasszal való osztással a tételben kimondott egyenlőséget.

210. tétel (CEVA-féle tétel). Ha az ABC háromszög AB , BC , CA oldalvonalain rendre C' , A' , B' a háromszög csúcsaitól különböző olyan pontok, melyekre az AA' , BB' , CC' egyenesek egy O ponton mennek át, akkor $AB' \cdot BC' \cdot CA' = CB' \cdot BA' \cdot AC'$.

Bizonyítás (152. ábra). Alkalmazzuk a 209. tételt az $AC'C$ háromszögre és a BB' egyenesre, majd a $BC'C$ háromszögre és az AA' egyenesre; így kapjuk a következő egyenlőségeket:

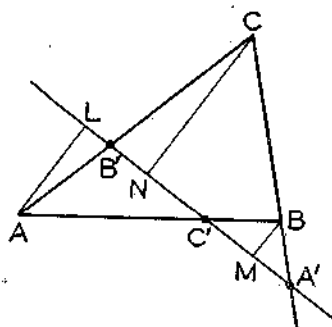
$$AB' \cdot C'B \cdot CO = CB' \cdot C'O \cdot AB \\ \text{és } BA' \cdot C'A \cdot CO = CA' \cdot C'O \cdot BA;$$

az egyik egyenlőség baloldalát a másik jobboldalával szorozva kapjuk, hogy

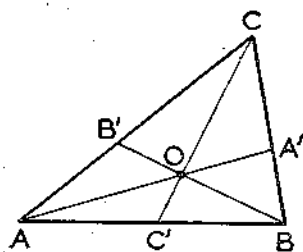
$AB' \cdot BC' \cdot CA' (CO \cdot C'O \cdot AB) = CB' \cdot BA' \cdot AC' (CO \cdot C'O \cdot AB)$,
s ebből a zárójelben álló szakasszal való osztással a tételben kimondott egyenlőséget.

36. §. Szakaszkoordináták a síkban.

A következő tárgyalás alapjául az I. 1–3, II, III, IV axiómákat vesszük; megjegyezzük azonban, hogy ha az egybevágósági axiómák helyett csak a PASCAL-féle tételt vennénk fel, amelyből az I. 1–3, II, IV axiómák alapján a DESARGUES-féle tétel levezethető.



151. ábra.



152. ábra.

(l. 238. o.), ez is elegendő lenne a következő eredmények levezetésére. Erre a kérdésre : az axiomarendszer redukálására később fogunk rátérni.

Az összes pontok, melyek tárgyalásunkban előfordulnak, egy síkhoz tartoznak.

Értelmezés. $\vec{AB}$ vektoron értjük az AB irányított szakaszt; A a vektor kezdőpontja, B a vektor végpontja. Az $\vec{AB}$ és $\vec{BA}$ vektorokat egymással ellentettnek nevezzük, s így jelöljük: $\vec{AB} = -\vec{BA}$, $\vec{BA} = -\vec{AB}$. — Ha $A = B$, akkor az $\vec{AB}$ vektort nullavektornak nevezzük és 0-val jelöljük: $\vec{AA} = 0$.

Értelmezés. Az $\vec{AB}$ és $\vec{BC}$ vektorok összegén értjük az $\vec{AC}$ vektort: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Értelmezés. A nem egy egyeneshez tartozó $\vec{AB}$ és $\vec{A'B'}$ vektorokat *aequivalens*nek nevezzük, ha az AB egyenes párhuzamos $A'B'$ -vel és AA' párhuzamos BB' -vel; jelölése $\vec{AB} = \vec{A'B'}$. — Az értelmzésből közvetlenül következik, hogy az $\vec{AA'}$ és $\vec{BB'}$ vektorok is *aequivalens*ek.

A DESARGUES-féle tételből következik, hogy ha az AB , $A'B'$, $A''B''$ egyenesek különbözők, s ha $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ és $\vec{A'B'} = \vec{A''B''}$, akkor $\vec{AB} = \vec{A''B''}$.

Értelmezés. Az a egyenesen fekvő $\vec{AB}$ és $\vec{A'B'}$ vektorokat *aequivalens*nek nevezzük, ha mindketten *aequivalens*ek valamely az a egyeneshez nem tartozó $\vec{A''B''}$ vektorral. A DESARGUES-féle tételből következik, hogy ha az a egyenesen fekvő $\vec{AB}$ és $\vec{A'B'}$ vektorok *aequivalens*ek valamely nem az a egyenesen fekvő $\vec{A''B''}$ vektorral, akkor minden az $\vec{AB}$ -vel *aequivalens* vektor az $\vec{A'B'}$ -vel is *aequivalens*, és megfordítva.

A fentiekből következik, hogy ha $\vec{AB}$ tetszőleges vektor, akkor minden A' ponthoz tartozik egy és csak egy olyan B' pont, melyre az $\vec{AB}$ és az $\vec{A'B'}$ vektorok *aequivalens*ek.

A vektorokra vonatkozóan értelmezett *aequivalencia* reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

A parallelogrammákra vonatkozó tételeinkből következik, hogy ha az $\vec{AB}$ és $\vec{A'B'}$ vektorok *aequivalens*ek, akkor az AB és $A'B'$ szakaszok egyenlők. — Ha az $\vec{AB}$ vektor *aequivalens* az $\vec{A'B'}$ vek-

torral, akkor az AB és $A'B'$ egyeneseknek azt az irányítását, melyet az $A \subset B$, illetve az $A' \subset B'$ sorrend határoz meg, a *párhuzamos egyeneseken megegyező irányításnak* nevezzük.

A DESARGUES-féle tételből következik, hogy ha $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ és $\vec{BC} = \vec{B'C'}$ akkor $\vec{AC} = \vec{A'C'}$, tehát $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{A'B'} + \vec{B'C'}$.

Értelmezés. Két tetszőleges $\vec{AB}$ és $\vec{CD}$ vektor összegét úgy képezzük, hogy az $\vec{AB}$ vektorhoz hozzáadjuk azt a $\vec{CD}$ -vel *aequivalens* $\vec{BD'}$ vektort, melynek kezdőpontja B ; tehát $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BD'} = \vec{AD'}$. — Az $\vec{AB}$ és $\vec{CD}$ vektorok különbségén értjük az $\vec{AB}$ és $-\vec{CD} = \vec{DC}$ vektorok összegét.

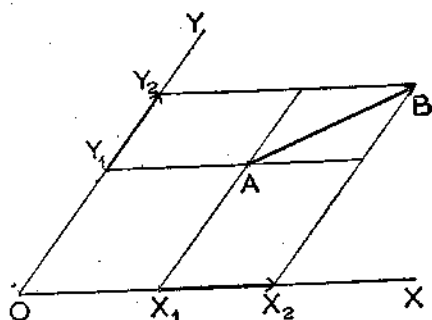
Az értelmzésből következik, hogy három tetszőleges $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ vektorra: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$ és $\vec{AB} + (\vec{CD} + \vec{EF}) = (\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{EF}$. Ha ugyanis $\vec{AA'}$ és $\vec{BB'}$ a $\vec{CD}$ -vel *aequivalens* vektorok, akkor $\vec{AB}$ is *aequivalens* $\vec{A'B'}$ -vel, s így $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BB'} = \vec{AB'} = \vec{AA'} + \vec{A'B'} = \vec{CD} + \vec{AB}$; ha továbbá $\vec{B'B''}$ *aequivalens* $\vec{EF}$ -fel, akkor $\vec{AB} + (\vec{CD} + \vec{EF}) = \vec{AB} + (\vec{BB'} + \vec{B'B''}) = \vec{AB} + \vec{BB''} = \vec{AB''}$; és $(\vec{AB} + \vec{CD}) + \vec{EF} = (\vec{AB} + \vec{BB'}) + \vec{B'B''} = \vec{AB'} + \vec{B'B''} = \vec{AB''}$. Tehát a vektorok összeadása *kommutatív és asszociatív*.

Értelmezés. A síknak az $\vec{AB}$ vektorral való *eltolásán* azt a leképezést értjük, mely a sík minden P pontjához a síknak azt a P' pontját rendeli hozzá, melyre a $\vec{PP'}$ vektor az $\vec{AB}$ vektorral *aequivalens*. A síknak az $\vec{AB}$ vektorral való eltolása a sík önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Az $\vec{AB}$ vektorral való eltolásnak az inverze a $\vec{BA}$ vektorral való eltolás, az $\vec{AB}$ és a $\vec{CD}$ vektorokkal való eltolások szorzata az $\vec{AB} + \vec{CD}$ vektorral való eltolás.

Tekintettel a vektorok összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonságára adódik, hogy a síknak az összes vektorokkal való eltolásai *kommutatív csoportot* alkotnak.

Bevezetünk a síkban egy *koordinátarendszert*; felvesszünk a síkban egy O pontot, és két az O ponton áthaladó OX és OY egyenest; az O pontot a *koordinátarendszer kezdőpontjának*, az OX , OY egyeneseket a *koordinátarendszer tengelyeinek* nevezzük. Az OX és az OY tengelyen felvesszünk egy-egy irányítást, melyet az illető tengelyre vonatkozó *pozitív irányításnak* nevezzünk.

Értelmezés. Valamely $\vec{AB}$ vektornak az OX, OY tengelyekre vonatkozó komponensein értjük az X_1X_2 és Y_1Y_2 irányított szakaszokat, melyek rendre az OX és az OY tengelyhez tartoznak,



153. ábra.

s melyekre az X_1A és X_2B egyenesek párhuzamosak az OY tengellyel, s hasonlóan Y_1A és Y_2B párhuzamosak az OX tengellyel (153. ábra). Az $\vec{AB}$ vektor az $\vec{X_1X_2}$ és $\vec{Y_1Y_2}$ vektorok összege. — Ha az AB egyenes párhuzamos például OX tengellyel, akkor az $\vec{AB}$ vektornak az OY tengelyre vonatkozó komponensén a nullaszakaszt értjük.

A sík valamely P pontjának az OX, OY rendszerre vonatkozó koordinátáin értjük az $\vec{OP}$ vektornak rendre az OX és az OY tengelyre vonatkozó x és y komponenseit; a P pontot koordinátaival jelölve (x, y) pontnak fogjuk nevezni.

Az értelmzésekből következik, hogy ha a P pont koordinátái (x, y) és a Q pont koordinátái (x', y') , akkor az $\vec{OP} + \vec{OQ}$ vektornak az OX és az OY tengelyre vonatkozó komponensei rendre $x + x'$, és $y + y'$; ezek a sík ama R pontjának koordinátái, melyre a $\vec{PR}$ vektor aequivalens az $\vec{OQ}$ vektorral.

A következő tárgyalásban már lényegesen felhasználjuk az egybevágósági axiómákat.

Értelmezés. Ha az OX és OY egyenesek merőlegesek egymásra, akkor a koordinátarendszert derékszögű koordinátarendszernek nevezzük. A következőben feltesszük, egyszerűség céljából, hogy a koordinátarendszer derékszögű.

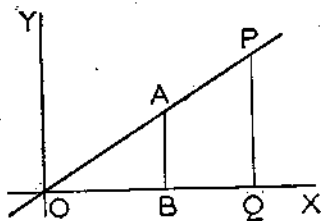
Értelmezés. Irányított szakaszok szorzását következőképpen értelmezzük. Legyen a és b két irányított szakasz; az ab szorzat nagysága értelmezés szerint egyenlő a nem irányított a, b szakaszok szorzatával (l. 239. o.), s a szorzat pozitív, vagy negatív előjelű aszerint, hogy a és b előjele megegyező, vagy ellenkező.

Értelmezés. A nullaszakasszal való szorzás értelmezése a következő: bármely a szakaszra nézve $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha $A = (a, b)$ és $P = (x, y)$ egy az O ponton áthaladó egyenes pontjai, akkor $bx = ay$.

Ha a P pont az $\vec{OA}$ félsugáron fekszik, akkor a és x előjele megegyező, s ugyanúgy b és y előjele; ha P az $\vec{OA}$ félsugar meghosszabbításán fekszik, akkor a és x előjele ellenkező, s ugyanúgy b és y előjele; tehát mindkét esetben megegyező bx és ay előjele. A megfelelő nem irányított szakaszokra vonatkozóan fennáll az $x:a=y:b$ arányosság; jelöljük ugyanis B -vel és Q -val az A illetve a P pontból az OX tengelyre bocsátott merőlegesek talpontiát (154. ábra); az OBA és az OQP derékszögű háromszögek hasonlók, s ezért a 201. tétel szerint befogóikra fennáll az $x:a=y:b$ arányosság; ebből az arányosságra vonatkozó tételeink (l. 230–231. o.) szerint következik a $bx = ay$ egyenlőség.



154. ábra.

A fenti megfontolásból következik az is, hogy ha az a, b, x, y irányított szakaszokra fennáll a $bx = ay$ egyenlőség, akkor az OBA és OQP háromszögek hasonlóak, tehát $\sphericalangle BOA = \sphericalangle QOP$, s így a 98. tétel folytán az $A = (a, b)$ és $P = (x, y)$ pontok egy az O ponton áthaladó egyenesen fekszenek. Ebben az értelemben a $bx = ay$ egyenletet az O és az $A = (a, b)$ ponton áthaladó egyenes egyenletének nevezzük.

Ha e' olyan egyenes, mely átmegy az OX tengelynek valamely az O -tól különböző O' pontján, jelöljük e -vel azt az O ponton áthaladó egyenest, mely párhuzamos e' -vel. Az e egyenes egyenlete a fentiek szerint $bx = ay$, hol (a, b) az e egyenes valamely pontjának, és (x, y) az e egyenes változó pontjának a koordinátáit jelöli. Jelöljük $(c, 0)$ -val az O' pontnak, és (a', b') -vel az e' egyenes ama A' pontjának a koordinátáit, melyben az $A = (a, b)$ ponton át az OX tengellyel párhuzamosan fektetett egyenes metszi az e' egyenest. Mivel $\vec{OO'} = \vec{AA'}$, s így $\vec{OA'} = \vec{OO'} + \vec{OA}$, tehát $a' = a + c$, $b' = b$. Jelöljük P' -vel az e egyenes valamely P pontján át az OX tengellyel párhuzamosan fektetett egyenesnek az e' egyenessel való metszéspontját. A $P' = (x', y')$ pont koordinátái $x' = x + c$, $y' = y$. Behelyettesítjük az e egyenes egyenletébe az $x = x' - c$, $y' = y$ s az $a = a' - c$, $b' = b$ kifejezéseket, kapjuk az e' egyenes következő egyenletét: $b(x' - c) = (a' - c)y$. A nem irányított szakaszokra

vonatkozó disztributív szabály az irányított szakaszok szorzásának fenti értelmezése alapján közvetlenül átvihető irányított szakaszok szorzására is; ennek alkalmazásával adódik: $bx' - (a' - c)y = bc$. Ha az e' egyenes párhuzamos az OX tengellyel, akkor egyenlete $y = b$. — Jelöljük ismét az egyenes változó pontjának a koordinátáit (x, y) -nal, s az előbbi egyenlet együtthatóit u, v, w -vel; az egyenes egyenlete a fentiek szerint $ux + vy = w$ alakban írható, hol u, v, w bizonyos az egyenes megválasztásától függő, s viszont az egyenest meghatározó irányított szakaszokat, (x, y) pedig az egyenes egy változó pontjának az OX, OY tengelyekre vonatkozó szakaszkoordinátáit jelentik. Eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

A fenti előírással bevezetett koordinátarendszerben minden egyenes lineáris (azaz $ux + vy = w$ alakú) egyenlettel jellemezhető, abban az értelemben, hogy az egyenes minden pontjának (x, y) szakaszkoordinátái eleget tesznek ennek az egyenletnek, s megfordítva, ha az x, y irányított szakaszok eleget tesznek az egyenletnek, akkor az (x, y) szakaszkoordinátákkal bíró pont az egyenesen fekszik.

A PYTHAGORAS-féle tételből következik, hogy a $P = (x, y)$ és a $P' = (x', y')$ pontok által meghatározott PP' szakasz négyzete egyenlő $(x - x')^2 + (y - y')^2$ -tel.

37. §. Párhuzamos egyenesek és síkok.

Feltesszük az I. 1–7, II, IV axiomákat.

Értelmezés. Az α síkot és az a egyenest párhuzamosnak nevezzük, ha nincs közös pontjuk. Az α és β síkot párhuzamosnak nevezzük, ha nincs közös pontjuk. (Emlékeztetünk arra, hogy az a és b egyenest akkor nevezzük párhuzamosnak, ha egy síkban fekszenek, s ha nincs közös pontjuk.)

Az értelmezésekből az I, II axiomák alapján közvetlenül adódnak a következő állítások.

Ha az α sík párhuzamos a β síkkal, minden az α síkban fekvő a egyenes párhuzamos a β síkkal.

Ha az α sík párhuzamos a b egyenessel, bármely a b egyenesen átfektetett β sík vagy párhuzamos α -val, vagy β az α síkot egy a -vel párhuzamos a egyenesben metszi.

Ha az a és b egyenesek párhuzamosak, és ha α egy az a egyenesen átfektetett sík, akkor α vagy párhuzamos b -vel, vagy tartalmazza a b egyenest.

Ha α és β párhuzamos síkok, s ha a γ sík az α és a β síkokat rendre az a és a b egyenesekben metszi, akkor az a és b egyenesek párhuzamosak.

Ha az a és b egyenesek párhuzamosak, s ha α az a egyenesen és β a b egyenesen átfektetett sík, akkor az α és β síkok vagy azonosak, vagy párhuzamosak, vagy egy olyan c egyenesben metszik egymást, mely párhuzamos a -val és b -vel.

Az I, II, IV axiómák alapján bebizonyítjuk a következő állításokat.

Ha a és b egymást metsző és az α síkkal párhuzamos egyenesek, akkor a rajtuk átfektetett (a , b) sík párhuzamos az α síkkal.

Ha ugyanis az (a , b) síknak volna α -val közös pontja, akkor az 1. tétel szerint volna egy közös c egyenesük, s ez párhuzamos volna az (a , b) síkban fekvő és egymást metsző a és b egyenesekkel, ellentétben a IV axiómával.

Ha az α és a β sík párhuzamos a γ síkkal, akkor az α és β síkok párhuzamosak egymással (vagy azonosak).

Tegyük fel ugyanis, hogy az α és a β síknak van egy A közös pontja; legyen a egy az A ponton áthaladó és az α síkban fekvő tetszőleges egyenes, legyen továbbá δ az a egyenesen és a γ sík valamely pontján átfektetett sík; ennek a β és a γ síkkal való metszésvonalát jelöljük rendre b -vel és c -vel. Mivel az α és γ síkok párhuzamosak, tehát a δ síkkal való a és c metszésvonalai is párhuzamosak, hasonlóan b és c párhuzamosak, s így a IV axióma folytán a és b vagy párhuzamosak, vagy azonosak egymással; mivel a -nak és b -nek van közös pontja, A , tehát a és b azonosak, vagyis az a egyenes a β síkhoz tartozik. Mivel pedig a egy tetszőleges az α síkban fekvő és az A ponton áthaladó egyenes, tehát ebből következik, hogy az α és a β síkok azonosak.

Ebből az eredményünkből közvetlenül adódik a következő tétel:

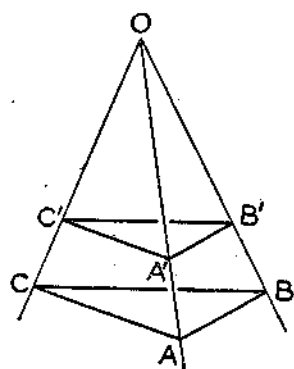
Ha α valamely sík, és P nem az α síkban fekvő pont, akkor van egy csak egy P ponton átmenő és az α síkkal párhuzamos α' sík. Legyen ugyanis a és b két az α síkban fekvő, egymást metsző egyenes; a P ponton és az a , illetve a b egyenesen átfektetett síkokban legyen a' , illetve b' rendre az a -val, illetve a b -vel párhuzamos, a P ponton áthaladó egyenes; az $\alpha' = (a', b')$ sík párhuzamos az α síkkal.

Minden a P ponton áthaladó és az α síkkal párhuzamos e egyenes hozzátartozik a P ponton át az α síkkal párhuzamosan fektetett α' síkhoz. Jelöljük ugyanis egy az e egyenesen és α valamely

pontján átfektetett δ síknak az α és az α' síkkal való metszetét rendre a -val és a' -vel. Mivel az a és a' egyenesek párhuzamosak, s feltevésünk folytán a és e is párhuzamosak, tehát a IV axioma szerint a δ síkban fekvő és a P ponton áthaladó a' és e egyenesek egybeesnek, vagyis e az α' síkban fekszik.

Bebizonyítjuk a következő tételt, melynek a síkra vonatkozó speciális esete a DESARGUES-féle (205.) tétel:

Ha az AA' , BB' , CC' egymástól különböző egyenesek egy O ponton mennek át, vagy egymással párhuzamosak, s ha az AB és az $A'B'$ egyenesek, valamint az AC és az $A'C'$ egyenesek párhuzamosak, akkor a BC és a $B'C'$ egyenesek is párhuzamosak.



155. ábra.

Tegyük fel először, hogy a BB' egyenes nem fekszik benne az AA' és CC' (egymást metsző, vagy párhuzamos) egyeneseken átfektetett síkban. Mivel az $A'B'C'$ síkban fekvő $A'B'$ és $A'C'$ egymástól különböző egyenesek feltevésünk szerint párhuzamosak rendre az ABC síkban fekvő AB és AC egyenesekkel, tehát az $A'B'C'$ sík párhuzamos az ABC síkkal. Mivel a BB' és a CC' egyenesek metszik egymást, vagy párhuzamosak, tehát egy síkban fekszenek; ennek a síknak az ABC és az $A'B'C'$

síkkal való metszéspontjai rendre a BC és a $B'C'$ egyenesek; ezek tehát párhuzamosak egymással.

Tegyük fel másodszor, hogy az A, B, C, A', B', C' pontok egy α síkban fekszenek. Legyen e egy nem az α síkban fekvő egyenes, mely átmegy az AA', BB', CC' egyenesek közös O pontján, illetve párhuzamos ezekkel az egyenesekkel. Az e egyenes valamely az α síkhoz nem tartozó P pontját összekötjük A -val, s az AP egyenessel párhuzamos $A'P'$ egyenest fektetünk az A' ponton át. Az $A'P'$ egyenes az APA' síkban fekszik, s mert az $A'P'$ -vel párhuzamos AP egyenes metszi az e egyenest, tehát $A'P'$ -nek is van e -vel közös pontja; ezt jelöljük P' -vel. — Az A, B, P és az A', B', P' pontokra nézve teljesülnek az első eset feltételei; nevezetesen az AA', BB', PP' egyenesek egy ponton mennek át, vagy egymással párhuzamosak, továbbá AB párhuzamos $A'B'$ -vel és AP párhuzamos $A'P'$ -vel, és a PP' egyenes nem fekszik az $ABA'B'$ síkban;

ebből tehát következik, hogy BP és $B'P'$ párhuzamosak. Ugyanezt a megfontolást B, B' helyett C, C' -re alkalmazva kapjuk, hogy CP párhuzamos $C'P'$ -vel. Tehát a B, C, P és a B', C', P' pontokra fennállanak az első eset feltételei, mégpedig BP párhuzamos $B'P'$ -vel és CP párhuzamos $C'P'$ -vel; ebből következik, hogy BC párhuzamos $B'C'$ -vel. — Ezzel a síkra vonatkozó DESARGUES-féle tételt a III axiómák nélkül, de a térre vonatkozó I. 1—7 axiómák alapján, bebizonyítottuk.

Tegyük fel a fentiekén kívül a III axiómákat is.

A 181. tétel korolláriumának (212. o.) alkalmazásával adódnak a következő tételek:

Ha az a és az a' egyenesek merőlegesek az α síkra, akkor a és a' párhuzamosak (l. 151. tételt); viszont ha a és a' párhuzamos egyenesek és az α sík merőleges a -ra, akkor merőleges a' -re is.

Ha az a egyenes merőleges az α és α' síkokra, akkor α és α' párhuzamosak; viszont, ha α és α' párhuzamos síkok, és az a egyenes merőleges α -ra, akkor merőleges α' -re is.

Ha az a és a' egyenesek párhuzamosak, és a merőleges az α síkra, a' pedig merőleges az α' síkra, akkor az α és α' síkok párhuzamosak.

Ha az α sík párhuzamos az α' síkkal, és a β sík merőleges az α síkra, akkor merőleges az α' síkra is.

Bebizonyítjuk még a következő tételt:

Ha a és b nem egy síkban fekvő egyenesek, akkor van egy és csak egy közös merőlegesük.

Az a egyenes tetszőleges pontján átfektettünk egy a b -vel párhuzamos b' egyenest; az $\alpha = (a, b')$ síkkal párhuzamos a b egyenes. A b egyenesen átfektettünk az α síkra merőleges síkot (154. tétel), jelöljük ennek és az α síknak a metszésvonalát b'' -vel. Mivel b'' párhuzamos b -vel, tehát b'' nem párhuzamos a -val; legyen A az a és b'' egyenesek metszéspontja; legyen c az α síkra az A pontban emelt merőleges. Mivel b és b'' párhuzamosak, és a b'' -re merőleges c egyenes a (b, b'') síkban fekszik, tehát c merőleges b -re is. Eszerint c közös merőlegese a -nak és b -nek.

Jelöljük az a és b nem egy síkban fekvő egyenesek c közös merőlegesének a -val és b -vel közös pontját rendre A -val és B vel. Ha A' és B' ezeknek az egyeneseknek egy-egy tetszőleges, A -tól és B -től különböző pontja, akkor az $A'B'$ szakasz nagyobb az AB szakasznál. Jelöljük ugyanis B'' -vel a B' pontnak az α síkra való

merőleges vetületét. Az $ABB'B''$ négyszög paralelogramma, s így $AB = B'B''$; az $A'B''B'$ derékszögű háromszögből pedig $B'B'' < A'B'$ (120. tétel). Tehát $AB < A'B'$. Az AB szakaszt az a és b egyenesek távolságának nevezzük.

38. §. Szakaszkoordináták a térben.

Feltesszük az I. 1—7, II, IV axiomákat; az előző paragrafusban levezettük ezekből a DESARGUES-féle tételt. Ennek alapján a 36. §. tárgyalásával megegyező módon értelmezhetjük a *térbeli vektorokat*, ezeknek aequivalenciáját, összeadását, továbbá a térnek valamely vektorral való eltolását. Mivel a vektorok összeadása kommutatív és asszociatív művelet, adódik, hogy a térnek az összes vektorokkal való eltolásai kommutatív csoportot alkotnak.

Bevezetünk a térben egy koordinátarendszert, azaz felvesszünk valamely O ponton áthaladó három nem egy síkban fekvő OX, OY, OZ egyenest; az O pontot a koordinátarendszer kezdőpontjának, az OX, OY, OZ egyeneseket a koordinátarendszer tengelyeinek nevezzük. Az OX, OY, OZ tengelyeken felvesszünk egy-egy irányítást, melyet az illető tengelyre vonatkozó pozitív irányításnak nevezünk.

Értelmezés. Az $\vec{AB}$ vektornak az OX tengelyre vonatkozó komponensét következőképpen értelmezzük: az A és B ponton át az OYZ síkkal párhuzamos síkokat fektetünk, s jelöljük ezeknek az OX tengellyel közös pontjait rendre X_1 -gyel és X_2 -vel; az X_1X_2 irányított szakaszt nevezzük az $\vec{AB}$ vektornak az OX tengelyre vonatkozó komponensének. Hasonlóan értelmezzük a vektornak az OY , és az OZ tengelyre vonatkozó komponenseit. — A tér valamely P pontjának az OX, OY, OZ rendszerre vonatkozó koordinátáin értjük az $\vec{OP}$ vektornak az illető tengelyekre vonatkozó x, y, z komponenseit; a P pontot koordinátaival jelölve (x, y, z) pontnak fogjuk nevezni.

Tegyük fel a fentiekén kívül a III axiomákat is.

Értelmezés. Ha az OX, OY, OZ egyenesek páronként merőlegesek egymásra, a rendszert derékszögű koordinátarendszernek nevezzük. A továbbiakban, egyszerűség kedvéért a koordinátarendszert derékszögűnek tesszük fel.

Ha az $A = (a, b, c)$ és a $P = (x, y, z)$ pontok egy az O ponton áthaladó egyenesen fekszenek, akkor fennállanak a $cx = az, cy = bz$ egyenlőségek.

Ha a P pont az $\vec{OA}$ félsugáron fekszik, akkor rendre megegyező előjelűek a és x , b és y , c és z ; ha P az $\vec{OA}$ félsugár meghosszabbításán fekszik, akkor rendre ellenkező előjelűek a és x , b és y , c és z ; tehát mindkét esetben megegyezők egyrészt a cx és az , másrészt a cy és bz szorzatok előjelei. A nem irányított szakaszokra fennáll az $x:a=y:b=z:c$ arányosság; jelöljük ugyanis B -vel és Q -val az A illetve a P pontból az OX tengelyre bocsátott merőlegesek talppontját; az OBA és az OQP derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy megfelelő befogók aránya egyenlő átfogók arányával, tehát $OQ:OB=OP:OA$; mivel pedig OQ és OB rendre x -szel és a -val egyenlő, tehát $x:a=OP:OA$. Hasonlóan adódik a másik két-két koordinátára az $y:b=OP:OA$ és a $z:c=OP:OA$ arányosság, s ezekből az arányosságra vonatkozó tételeink szerint következik, hogy $x:a=y:b=z:c$, és $cx=az$, $cy=bz$.

A fenti megfontolásból hasonlóan, mint a sík esetiére, következik tételünk megfordítása, vagyis az, hogy ha az a, b, c, x, y, z irányított szakaszokra fennállanak a $cx=az$, $cy=bz$ egyenlőségek, akkor az (a, b, c) és az (x, y, z) koordinátákkal bíró pontok egy az O ponton áthaladó egyenesen fekszenek. Ebben az értelemben azt mondjuk, hogy az O és az $A=(a, b, c)$ ponton áthaladó *egyes egyenletrendszere* a fenti két egyenlet.

Ha AA' tetszőleges egyenes és P ennek valamely pontja, jelöljük ezeket a pontokat koordinátáikkal rendre következőképen: $A=(a, b, c)$, $A'=(a', b', c')$, $P=(x, y, z)$. Előbbi eredményünk szerint az $(x-a', y-b', z-c')$ és $(a-a', b-b', c-c')$ koordinátakülönbségekre fennáll a $(c-c')(x-a')=(a-a')(z-c')$, $(c-c')(y-b')=(b-b')(z-c')$ egyenletrendszer, s viszont ha x, y, z olyan irányított szakaszok, melyek kielégítik ezt az egyenletrendszert, akkor az (x, y, z) pont az AA' egyenesen fekszik. A fenti egyenleteket a szakaszok szorzására vonatkozó szabályok szerint átalakíthatjuk a következő alakra: $ux+vy=w$, $u'y+v'z=w'$. Eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

Az OX, OY, OZ koordinátarendszerben minden egyenes lineáris, azaz $ux+vy=w$, $u'y+v'z=w'$ alakú, egyenletrendszerrel jellemezhető abban az értelemben, hogy az egyenes minden pontjának (x, y, z) szakaszkoordinátái kielégítik ezt az egyenletrendszert, s megfordítva, ha az x, y, z irányított szakaszok kielégítik az egyenletrendszert, akkor az (x, y, z) szakaszkoordinátákkal bíró pont az adott egyenesen fekszik.

A $P = (x, y, z)$ és az $O = (0, 0, 0)$ pontok által meghatározott szakasz négyzetét a következő kifejezés adja:

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Jelöljük ugyanis Q -val a P pontnak az OXY síkra, és R -rel Q -nak az OX tengelyre való merőleges vetületét; a PYTHAGORAS-féle tételt az ORQ és az OQP derékszögű háromszögekre alkalmazva, adódik: $OP^2 = OQ^2 + QP^2$ és $OQ^2 = OR^2 + RQ^2$, tehát $OP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2$. Mivel pedig OR, RQ, QP előjeltől eltekintve egyenlők rendre x, y, z -vel, tehát OP négyzete egyenlő x, y, z négyzetösszegével. — Ebből két tetszőleges $P = (x, y, z)$ és $P' = (x', y', z')$ pontra adódik:

$$PP'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Ha P és P' olyan pontok, hogy az OP és OP' egyenesek merőlegesek egymásra ugyancsak a PYTHAGORAS-féle tétel szerint:

$$PP'^2 = OP^2 + OP'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

a fenti két kifejezés összehasonlításából:

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

A PYTHAGORAS-féle tétel megfordításából a fentihez hasonló megfontolással következik, hogy ha a $P = (x, y, z)$ és $P' = (x', y', z')$ pontokra fennáll az $xx' + yy' + zz' = 0$ egyenlőség, akkor az OP és OP' egyenesek merőlegesek. — Ebből közvetlenül adódik, hogy ha $A = (a, b, c)$ tetszőleges pont, akkor az OA egyenesre az O pontban emelt merőleges sík összes (x, y, z) pontjaira és csakis ezekre fennáll az $ax + by + cz = 0$ egyenlőség. Ha α tetszőleges sík, (x_0, y_0, z_0) az O pontból az α síkra bocsátott merőleges talppontja, és (x_1, y_1, z_1) ennek az egyenesnek valamely más pontja, akkor az α sík minden (x, y, z) pontjára, és csakis ezekre fennáll az

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = 0$$

egyenlőség, melyet a szakaszok szorzására vonatkozó szabályok alkalmazásával átalakíthatunk a következő alakúra:

$$ux + vy + wz + t = 0.$$

Ezt az eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

Az OX, OY, OZ koordinátarendszerben minden sík $ux + vy + w + t = 0$ alakú lineáris egyenlettel jellemezhető abban az értelemben, hogy a sík minden pontjának (x, y, z) szakaszkoordinátái

kielégítik ezt az egyenletet, s viszont, ha az (x, y, z) irányított szakaszok kielégítik ezt az egyenletet, akkor az (x, y, z) szakaszkoordinátákkal bíró pont az adott síkban fekszik.

39. §. Az euklidesi sík és tér mozgáscsoportja.

Értelmezés. Ha a sík pontjaira és egyenesekre teljesülnek az I. 1–3, II, III, IV axiómák, akkor a síkot *euklidesi síknak*, ha a tér pontjaira, egyenesekre és síkjaira teljesülnek az I. 1–7, II, III, IV axiómák, akkor a teret *euklidesi térnek* nevezzük.

211. tétel. Az euklidesi sík minden mozgása forgás vagy eltolás.

Bizonyítás. Ha a mozgásnak van egy A fixpontja, akkor a mozgás az A pont körül való forgás (132. tétel). Ha A nem fixpont, jelöljük A képét A' -vel, és A' képét A'' -vel. Ha A'' egybeesik A -val, akkor a mozgás egy félforgás az AA' szakasz középpontja körül (133. tétel). Ha az A, A', A'' pontok nem fekszenek egy egyenesen, akkor az A, A' pontpár és az A', A'' pontpár középvonalának van egy közös pontja (184. tétel) s ez az adott mozgásnak fixpontja. Ha tehát a mozgásnak nincs fixpontja, akkor az A, A', A'' pontok egymástól különbözők és egy egyenesen, fekszenek; a síknak az $\vec{AA'}$ vektorral való eltolása megegyezik az adott mozgással az A és A' pontokban, ezért a két mozgás azonos (131. tétel); tehát az adott mozgás a síknak $\vec{AA'}$ vektorral való eltolása.

Értelmezés. Valamely G csoport *alcsoportján* olyan G' csoportot értünk, melynek elemei a G csoporthoz tartoznak. — A G csoport valamely T elemének a csoport S elemével való *transzformáltján* értjük a csoport $S^{-1}TS$ elemét. Ha a G csoport G' alcsoportjához tartozó elemeknek a G elemeivel való transzformáltjai valamennyien a G' alcsoporthoz tartoznak, akkor a G' csoportot a G csoport *invariáns alcsoportjának* nevezzük.

212. tétel. Az euklidesi sík eltolásai kommutatív csoportot alkotnak; ez a csoport az euklidesi sík összes mozgásaiból álló csoportnak invariáns alcsoportja.

Bizonyítás. A tétel első állítása következik a vektorok összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonságából (I. 245. o.). Ha T a síknak valamely eltolása, és S egy forgása, akkor az $S^{-1}TS$ mozgásnak nincs fixpontja; ha ugyanis az A pont az

$S^{-1}TS$ mozgásnak fixpontja lenne, akkor az $A' = S^{-1}(A)$ pont fixpont lenne a T eltolásnál, ami ellenmondás. A 211. tételből következik tehát, hogy $S^{-1}TS$ a síknak valamely eltolása.

213. tétel. Az euklidesi térnek minden mozgása vagy eltolás, vagy forgás, vagy csavarmozgás.

Bizonyítás. Legyen A a tér valamely pontja; ha ez fixpont az adott T mozgásnál, akkor a 175. tétel szerint T egy az A ponton áthaladó tengely körül való forgás. Ha A különböző $A' = T(A)$ -tól, jelöljük T' -vel a térnek az $\overrightarrow{AA'}$ vektorral való eltolását. A $T^{-1}T'$ leképezés a 175. tétel szerint a térnek egy az A' ponton átmenő a' tengely körül való forgása. Jelöljük a -val a' -nek a T^{-1} mozgásnál származó képét; a T és a T' leképezések megegyezők az a egyenes minden pontjában, s mivel T' a térnek egy eltolása, ebből következik, hogy a és a' párhuzamosak vagy egybeesnek, s hogy a T mozgás az a egyenest megmaradó irányítással viszi át az a' egyenesbe. Ha a egybeesik a' -vel, akkor mivel a irányítása megmarad, tehát T eltolás, vagy csavarmozgás az a tengelyre vonatkozóan. Ha a és a' különbözők, jelöljünk α -val egy az a egyenesre merőleges síkot, és a' -vel ennek T -nél származó képét. Mivel α és α' merőlegesek az egymással párhuzamos a és a' egyenesekre, tehát az α és α' síkok párhuzamosak (l. 251. o.). Jelöljük az a egyenesnek az α és az α' síkkal való metszéspontját rendre B -vel és C -vel; jelöljük T'' -vel a térnek a $\overrightarrow{CB}$ vektorral való eltolását, mely az α' síkot az α síkba viszi át. A TT'' mozgás az α síkot megmaradó irányítással önmagába viszi át, s ezért a 211. tétel szerint az α síkban annak egy forgásával vagy önmagában való eltolásával megegyezik. Az első esetben TT'' a térnek forgása egy az α síkra merőleges l tengely körül; mivel l és a párhuzamosak, vagyis a T'' eltolás vektora párhuzamos a TT'' forgás tengelyével, tehát $T = (TT'')(T')^{-1}$ az l tengelyre vonatkozó csavarmozgás. A második esetben a TT'' leképezés a térnek egy eltolása valamely az α síkkal párhuzamos vektorral; ezt az eltolást szorozva a T'' eltolás inverzével a térnek egy eltolását kapjuk, s ez azonos az adott T mozgással. Ezzel a fenti tételt bebizonyítottuk.

214. tétel. Az euklidesi tér eltolásaiból álló kommutatív csoport az euklidesi tér összes mozgásaiból álló csoportnak invariáns alcsőportja.

Bizonyítás. Legyen T a tér valamely eltolása, és S egy tetszőleges mozgása; mivel T -nek nincs fixpontja, tehát $S^{-1}TS$ -nek

sincs fixpontja (l. a 212. tétel bizonyítását). A 178., vagy a 213. tétel szerint S előállítható mint egy T_0 eltolásnak és egy R forgásnak a szorzata: $S = T_0 R$; ezért $S^{-1} T S = R^{-1} (T_0^{-1} T T_0) R$; mivel a tér eltolásai csoportot alkotnak, $T_0^{-1} T T_0 = T'$ a térnek valamely AB vektorral való eltolása. Az AB vektort állítsuk elő mint egy az R forgás l tengelyével párhuzamos $A_1 B_1$ vektornak és egy az l -re merőleges $A_2 B_2$ vektornak az összegét (l. 252. o.), s jelöljük T_1 -gyel és T_2 -vel a térnek az $A_1 B_1$, illetve az $A_2 B_2$ vektorral való eltolását; a T' eltolás ennek a két eltolásnak a szorzata: $T' = T_1 T_2$. Ennek az R forgással való transzformáltja tehát

$$R^{-1} T' R = (R^{-1} T_1 R) (R^{-1} T_2 R).$$

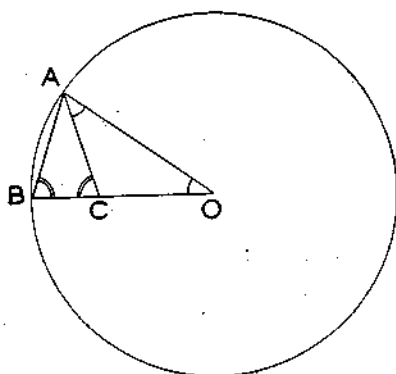
Mivel a T_1 eltolás vektora párhuzamos az R forgás tengelyével, a 169. tétel szerint R és T_1 felcserélhetők, s így $R^{-1} T_1 R = T_1$. Bármely az l forgástengelyre merőleges α sík az R forgásnál is, az α -val párhuzamos $A_2 B_2$ vektorral való T_2 eltolásnál is önmagába megy át, s ezért a 211. tétel szerint az α síkban $R^{-1} T_2 R$ a síknak egy eltolásával megegyezik; ennek az eltolásnak a vektora legyen $A'_2 B'_2$. A térnek az $A'_2 B'_2$ vektorral való T'_2 eltolása az α síkban megegyezik az $R^{-1} T_2 R$ mozgással, s mert mindkét leképezés megtartja a tér irányítását, tehát T'_2 azonos $R^{-1} T_2 R$ -rel. Eszerint az $S^{-1} T S$ leképezés mint a T_1 és T'_2 eltolások szorzata maga is a térnek egy eltolása.

A sík és a tér forgáscsoportjait a párhuzamossági axioma felhasználása nélkül tárgyaltuk (24. és 30. §.); ott nyíltan maradt az a kérdés, mely n pozitív egész számokra létezik n -edrendű ciklikus forgáscsoport; ugyancsak nyíltan hagytuk a dodekaéder-csoport létezésének a kérdését. Ezeket fogjuk most tovább tárgyalni a IV axioma (és részben a III. k kör-axioma) alapján.

A IV axiómából és a síkra vonatkozó egybevágósági axiómákból (III. k alkalmazása nélkül) következik szabályos háromszög létezése. A szerkesztés módjának megállapítása céljából tegyük fel, hogy ABC szabályos háromszög; az AB oldal D középpontját a C csúccsal összekötő CD egyenes merőleges AB -re (107. tétel). Az ADC derékszögű háromszög AC átfogóját jelöljük a -val; az AD befogó egyenlő $a/2$ -vel, a $DC = x$ befogó meghatározására adódik a PYTHAGORAS-féle tétel szerint $x^2 + \frac{1}{4} a^2 = a^2$; tehát

$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. A PYTHAGORAS-féle tétellel kapcsolatban megjegyeztük, hogy ha c tetszőleges szakasz, és n valamely pozitív egész szám, akkor van $c\sqrt{n}$ nagyságú szakasz; tehát van olyan szakasz is, melynek nagysága $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Az a -val egyenlő AB szakasz D középpontjában merőlegest emelünk AB -re, erre rámérjük az $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ -mal egyenlő DC szakaszt; a fentiek szerint az ABC háromszög szabályos.

A IV és a III. k axioma alapján bebizonyítjuk szabályos ötszög és tízszög létezését. Induljunk ki ismét abból a feltevésből, hogy van egy szabályos tízszög; legyen O ennek a középpontja, és AB az egyik oldala. Mivel az $\sphericalangle AOB$ szög egyenlő $\frac{2}{5}R$ -rel, s mert ABO egyenlőszárú háromszög, tehát a 107. és a 182. tétel szerint $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = \frac{4}{5}R$. A $\sphericalangle BAO$ szögfelezőjének az



156. ábra.

OB szakasszal való metszéspontját (37. tétel) jelöljük C vel (156. ábra). Mivel $\sphericalangle BAC = \frac{2}{5}R$, és $\sphericalangle ABC = \frac{4}{5}R$, tehát a BCA és az ABO háromszögek hasonló; a 201. tétel szerint tehát BCA is egyenlőszárú háromszög, mégpedig $AB = AC$; hasonlóan, mert az AOC háromszögnek A -nál és O -nál levő belső szögei egyenlők, a 108. tétel szerint $AC = OC$.

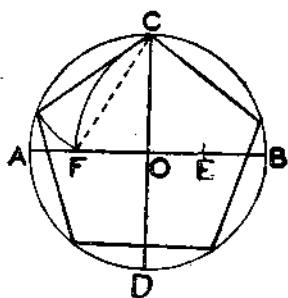
Jelöljük az AB szakaszt a -val, az OA szakaszt r -rel. A fentiek szerint tehát $a : r = (r - a) : a$; ebből $a^2 + ra - r^2 = 0$, s így

$$a = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

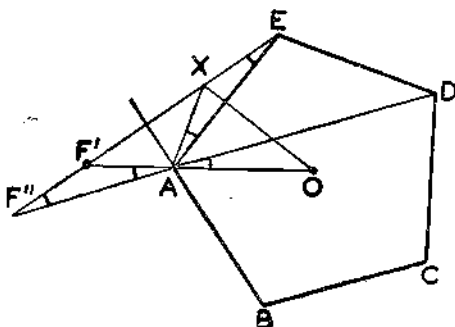
— Ha r tetszőleges szakasz, akkor a PYTHAGORAS-féle tétel folytán van olyan a szakasz, mely $\frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ -tel egyenlő. A szabályos tízszög ennek alapján következőképen szerkeszthető meg. Valamely

O pont körül r sugárral kört veszünk fel, ezt jelöljük k -val; legyen k' az a kör, melynek középpontja a k kör valamely A pontja, sugara pedig egyenlő $\frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$ -tel; mivel k' sugara nyilván kisebb mint r , tehát k' -nek van k belsejében és külsejében legalább egy-egy pontja. Ha tehát feltesszük a III. k axiomát, abból következik, hogy a k és k' körnek van közös pontja: B . A síknak az O pont körül $\angle AOB$ szöggel való forgásánál, s ennek hatványainál az A pont képei egy szabályos tízszög csúcsait adják.

Ha a szabályos tízszög csúcsai közül minden másodikat vesszük, ezek egy szabályos ötszög csúcsait adják. A szabályos ötszög oldala egyenlő $a' = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ -tel; ennek ismert levezetését itt nem részletezzük, csupán rámutatunk arra, hogy ennek a kifejezésnek megfelelően az r sugarú körbe írt szabályos ötszög oldalát a következő, EUKLIDESTŐL származó szerkesztéssel határozhatjuk meg. Legyen AB és CD a k körnek két egymásra merőleges átmérője (157. ábra); az OB sugár középpontját jelöljük E -vel; legyen F az OA sugárnak az a pontja, melyre $EF = EC$.



157. ábra.



158. ábra.

A CF és az FO szakasz egyenlő a k körbe írt szabályos ötszög, illetve tízszög oldalával. A CF szakasz nagyságát a III. k axioma felhasználása nélkül határoztuk ugyan meg, de ezzel az oldallal a k körben szabályos ötszöget ismét csak a III. k axioma felhasználásával szerkeszthetünk. A PYTHAGORAS-féle tételt az OCF derékszögű háromszögre alkalmazva kapjuk, hogy $a^2 + r^2 = a'^2$.

A szabályos dodekaéder meghatározását készíti elő a következő megfontolás. Legyen $ABCDE$ egy szabályos ötszög, legyen

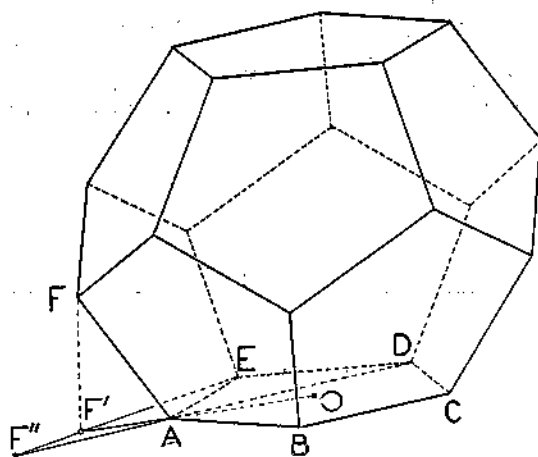
O ennek a középpontja; jelöljük F'' -vel E -nek az AB egyenesre vonatkozó tükörképét, és F' -vel az EF'' egyenesnek az OA -val közös pontját; legyen továbbá X az $\sphericalangle AOE$ szögfelezőjének az EF'' -vel közös pontja (158. ábra). Az $\sphericalangle AOE$ szög egyenlő $\frac{4}{5}R$ -rel; ebből a 107. és a 182. tétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sphericalangle DAO = \sphericalangle F'AF'' = \sphericalangle F'F''A = \sphericalangle XEA = \sphericalangle XAE = \frac{1}{5}R,$$

tehát F'' a DA egyenesen fekszik; továbbá, mivel $AF'' = AE$, tehát a 105. tétel szerint az $AF''F'$ és AEX háromszögek egybevágók, s ezért

$$AF' = AX.$$

Ugyanúgy kapjuk, hogy $\sphericalangle XAO = \sphericalangle AXO = \frac{4}{5}R$, s így a 108. szerint $OA = OX$; tehát AX az OA sugarú körbe írt szabályos tízszög oldala.



159. ábra.

Valamely szabályos dodekaéder egyik lapja legyen az $ABCDE$ szabályos ötszögű lap; jelöljük F -fel a dodekaédernek az A -val szomszédos, és a B -től és E -től különböző csúcsát (159. ábra). Az F pont az E, B csúcsok középsíkjában, vagyis az OA egyenesen át az $ABCDE = \alpha$ síkra merőlegesen emelt síkban fekszik. Mivel a $\sphericalangle BAF$ élszög egyenlő $\sphericalangle BAE$ -vel és $\sphericalangle BAF''$ -vel, és $AE = AF'' = AF$, tehát az AB tengely körül való alkalmas forgásokkal átvihetjük az F pontot E -be is, F'' -be is. Mivel az AB

tengely körül való forgásoknál az F ponton áthaladó és az AB tengelyre merőleges sík önmagába megy át, tehát az E, F, F'' pontok egy az AB tengelyre s ezért (l. 152. tétel) az α síkra merőleges síkban fekszenek. Eszerint F az EF'' és az OA egyeneseken át az α -ra merőlegesen emelt síkok metszésvonalán fekszik, s mert ez az egyenes merőleges az α síkra (153. tétel), tehát F az F' pontban az α síkra emelt merőleges egyenesen fekszik. — Az FF' szakasz az $AF'F$ derékszögű háromszög egyik befogója; ennek másik befogója egyenlő a fentiek szerint az $r = OA$ sugarú körbe írt szabályos ötszögnek, és átfogója az ugyanabba a körbe írt szabályos ötszögnek az oldalával; tehát

$$AF' = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1); \quad AF = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

A PITHAGORAS-féle tételből következik, mint már fent megjegyeztük, hogy

$$FF' = r = OA.$$

Eszerint az F pont meghatározására a következő eljárás szolgál: $ABCDE$ szabályos ötszög O középpontját összekötjük A -val, s meghatározzuk ennek az egyenesnek az E -ből az AB oldalvonalra bocsátott merőlegessel való F' metszéspontját; az F' pontban merőleges egyenest emelünk az $ABCDE$ ötszög síkjára, s erre rámérjük az OA -val egyenlő $F'F$ szakaszt.

Miután az F pontot meghatároztuk, a dodekaéder meghatározása nyilvánvaló. Az AB tengely körül való forgással az E csúcsot az F csúcsba visszük át; ennél az $ABCDE$ lap a dodekaédernek egy λ lapjába megy át. Az $ABCDE$ lap tengelye (vagyis a középpontján át a síkjára emelt merőleges) körül való 5-periodusú forgásoknál a λ lap a dodekaédernek további négy lapjába megy át. A λ tengelye körül való 5-periodusú forgásoknál a már meghatározott lapokból a dodekaéder további öt lapját kapjuk; ezeknek szabad (azaz még csak egy-egy laphoz tartozó) élei együtt egy szabályos ötszöget alkotnak; az általa határolt lap a dodekaéder tizenkettedik lapja.

A dodekaéder lapjainak középpontjai egy szabályos ikosaéder csúcsait adják.

V. Folytonosság.

40. §. Az egyenes folytonossága a lineáris rendezés alapján.

Értelmezés. *Lineáris pontthalmazon* egy egyenesen fekvő pontok bizonyos összességét értjük; *síkbeli és térbeli pontthalmazon* a síkban, illetve a térben fekvő pontok bizonyos összességét értjük. Az A halmaz *részthalmazán* értünk minden olyan B halmazt, melynek pontjai az A halmazhoz tartoznak.

Értelmezés. Valamely M halmazon *környezeteket* következőképpen értelmeztünk: az M halmaz minden A pontjához hozzárendeljük az M halmaz bizonyos részthalmazait, melyek közül mindegyikhez hozzátartozik az A pont; ezeket a részthalmazokat az A pont *környezeteinek* nevezzük az M halmazra vonatkozóan.

Értelmezés. Legyen N egy M halmaznak részthalmaza; az M halmaz valamely A pontját az N halmaz *sűrűsödési helyének* nevezzük az M halmazra vonatkozóan, ha A -nak minden az M halmazra vonatkozó környezete tartalmazza N -nek legalább egy az A -tól különböző pontját; az A pont hozzátartozhatik az N halmazhoz, vagy nem.

Értelmezés. Az M halmazt *összefüggőnek* nevezzük, ha a következő feltétel teljesül: ha N_1 és N_2 az M halmaz két tetszőleges olyan részthalmaza, melyek közül mindegyikhez tartozik legalább egy-egy pont, és M -nek minden pontja az N_1, N_2 részthalmazok közül egyikhez és csak egyikhez tartozik, akkor van az M halmaznak legalább egy olyan az egyik részthalmazhoz tartozó pontja, mely a másik részthalmaznak sűrűsödési helye.

Megjegyzés. A sűrűsödési helynek és az összefüggő halmaznak az értelmezése függ az M halmazon való környezetek értelmezésétől.

Feltesszük az I. 1, II. 1, 2, 3, a, b, c lineáris axiómákat.

Értelmezés. Legyen a egy egyenes és A ennek valamely pontja; az A pontnak az a egyenesen való környezetén értjük az a egyenes bármely olyan szakaszát, mely tartalmazza az A pontot. (Emlékeztetünk a szakasz értelmezésére, mely szerint a BC szakasz a B és C közötti fekvő pontok összessége, tehát B és C nem tartoznak a BC szakaszhoz.)

A környezeteknek ez az értelmezése eleget tesz a következő feltételeknek (HAUSDORFF-féle környezet-axiómák):

1. Az A pont két tetszőleges környezetéhez megadható az A pontnak olyan környezete, mely mindkettőnek része (I. a 4. tételt).

2. Ha a B pont az A pontnak valamely környezetéhez tartozik, akkor van B -nek olyan környezete, mely A megadott környezetének része.

3. Ha A és B két különböző pont, megadható ezeknek egy-egy olyan környezete, melyeknek nincs egymással közös pontja (a II. c axióma folytán).

Értelmezés. Az N lineáris halmaz sűrűsödési pontjain értjük az N halmaznak az azt tartalmazó egyenesre vonatkozó sűrűsödési helyeit.

Értelmezés. Valamely M halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha a halmaz pontjai és a természetes számok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, vagyis ha a halmaz összes elemei elrendezhetők egy $A_1, A_2, \dots$ sorozatban.

Például a racionális számok összessége megszámlálható; a pozitív racionális számokat p/q alakban írjuk fel, hol p és q relatív prímszámokat jelentenek; ezeket előbb a $p+q$ nagysága szerint, s azokat, melyekre $p+q$ ugyanaz, p nagysága szerint rendezve a következő sorozatot kapjuk, melyben minden pozitív racionális szám pontosan egyszer fordul elő:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{4}{7}, \frac{7}{4}, \dots$$

A pozitív és a negatív racionális számok szintén egy sorozatban rendezhetők el; tegyük például a fenti sorozatban minden p/q szám után a $-p/q$ számot.

Értelmezés. Az M halmaz valamely N részhalmazát az M halmazon mindenütt sűrűnek nevezzük, ha az M halmazon felvett bármely környezet tartalmazza N -nek legalább egy elemét. Ha van az M halmaznak olyan megszámlálható részhalmaza, mely az M

halmazon mindenütt sűrű, akkor az M halmazt *szeperábilis*nek nevezzük.

Ha a valós számok összességében környezetben egy tetszőleges a, b számközt ($a < b$), vagyis azoknak az x valós számoknak az összességét értjük, melyekre $a < x < b$, akkor, mint ismeretes, a racionális számok megszámlálható halmaza a valós számok összességében mindenütt sűrű, tehát a *valós számok összessége szeperábilis*.

Tegyük fel, hogy az egyenes pontjaira teljesül a következő két axioma:

V. a. Az egyenes pontjainak halmaza összefüggő.

V. b. Az egyenes pontjainak halmaza szeperábilis.

Jegyezzük meg, hogy mivel az egyenesen való környezetek értelmezése, tehát ez a két axioma is a lineáris rendezés fogalmán alapul.

Az **I. 1, II. 1, 2, 3, a, b, c** és az **V. b** axioma alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

215. tétel. Az egyenes pontjainak megfeleltethetünk valós számokat olyan módon, hogy az egyenes pontjainak lineáris rendezése és a nekik megfelelő valós számok nagyság szerint való (ú. n. természetes) elrendezése megegyező legyen, vagyis, ha $P_1, P_2, \dots, P_n$ az a egyenes olyan pontjai, melyeknek elrendezése $P_1 P_2 \dots P_n$, akkor a nekik megfelelő $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számokra vagy az $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, vagy az $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ vonatkozás áll fenn.

Bizonyítás (CANTOR szerint). Legyen $r_1, r_2, \dots$ a racionális számok összessége, és legyen $(R) = (R_1, R_2, \dots)$ az egyenes pontjainak egy az egyenesen mindenütt sűrű, megszámlálható halmaza (**V. b**). Az R_{μ_i} pontot és az r_{ν_i} számot egymásnak feleltetjük meg; a μ_i és ν_i indexeket a következő előírással határozzuk meg: legyen $\mu_1 = \nu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 = 2$; a $\mu_3 = 3$ indexnek azt a legkisebb ν_3 indexet feleltetjük meg, melyre az $r_{\nu_1}, r_{\nu_2}, r_{\nu_3}$ számok elrendezése megegyezik az $R_{\mu_1}, R_{\mu_2}, R_{\mu_3}$ pontok elrendezésével; legyen ν_4 a legkisebb olyan index, mely különböző ν_1, ν_2, ν_3 -tól, és jelentse μ_4 azt a legkisebb indexet, melyre az $R_{\mu_1}, R_{\mu_2}, R_{\mu_3}, R_{\mu_4}$ pontok elrendezése megegyezik az $r_{\nu_1}, r_{\nu_2}, r_{\nu_3}, r_{\nu_4}$ számok elrendezésével. Hasonlóan folytatjuk ezt az eljárást, vagyis felváltva választunk egy μ_i , illetve egy ν_i indexet, mindig azt a legkisebbet, mely különböző a $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{i-1}$ indexektől, (illetve $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{i-1}$ -től) s megfeleltetjük ennek azt a legkisebb ν_i (illetve μ_i) indexet, melyre az $R_{\mu_1}, R_{\mu_2}, \dots, R_{\mu_i}$ pontoknak és az $r_{\nu_1}, r_{\nu_2}, \dots, r_{\nu_i}$ számoknak az

elrendezése megegyező. Ez az eljárás elvezet az R_{μ_i} pontok és az r_{ν_i} számok között való kölcsönösen egyértelmű és a rendezési vonatkozásokat megtartó megfeleltetéshez, mivel minden R_k pontra és minden r_k számra sor kerül.

Ha P az egyenesnek valamely az R_{μ} pontoktól különböző pontja, akkor az R_{μ} pontok közül azok, melyek a P pont által meghatározott egyik, illetve másik félsugárhoz tartoznak két A és B osztályt (halmazt) alkotnak, melyekre a 3. tétel folytán a következő tulajdonságok állanak fenn:

1. Az (R) halmaz bármely pontja az A és B osztályok közül az egyikhez és csak egyhez tartozik, s mindegyik osztályhoz tartozik legalább egy-egy pont.

2. Ha az (R) halmaz két R_1 és R_2 pontja ugyanahhoz az osztályhoz tartozik, akkor ehhez az osztályhoz tartozik az (R) halmaznak minden az R_1 és R_2 között fekvő pontja.

Ha A és B valamely (R) lineáris ponthalmaznak olyan részhalmazai, melyekre a fenti 1., 2. feltételek teljesülnek, akkor az (R) halmaznak az A, B részhalmazokra való felosztását az (R) halmaz DEDEKIND-féle szeletalkotásának nevezzük.

Ennek az értelmezésnek az alapján, az egyenesnek valamely az (R_{μ}) halmazhoz nem tartozó P pontja meghatározza az (R_{μ}) halmaznak egy szeletalkotását; az (R_{μ}) ponthalmaz és a racionális számok (r_{ν}) halmaza között fent meghatározott vonatkozás alapján ennek a szeletalkotásnak megfelel egy szeletalkotás a racionális számok halmazában. A valós számok értelmezése szerint minden a racionális számok összességében való szeletalkotáshoz tartozik egy valós x szám olyan módon, hogy az x -nél kisebb, illetve az x -nél nagyobb racionális számok alkotják az A , illetve a B osztályt (valamelyikhez esetleg hozzávéve az x számot is). Ezt az x számot rendeljük hozzá az egyenes P pontjához. Ha P az egyenes tetszőleges pontja, és x a hozzárendelt valós szám, továbbá $R_{\mu}, R_{\mu'}$ a fenti megszámlálható ponthalmaznak két pontja, és $r_{\nu}, r_{\nu'}$ az ezeknek megfelelő racionális számok, akkor a $P, R_{\mu}, R_{\mu'}$ pontok elrendezése megegyezik az $x, r_{\nu}, r_{\nu'}$ számok elrendezésével; ebből a 4. tétel szerint következik, hogy az egyenes tetszőleges $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontjainak elrendezése megegyezik a hozzájuk rendelt $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok elrendezésével.

Ha feltesszük az I, II lineáris és V. b axiómákon kívül az V. a axiómát is, akkor az (R_{μ}) halmaz minden szeletalkotásához

tartozik az egyenesen egy P pont olyan módon, hogy a P pont egyik és másik oldalán fekvő R_μ pontok összessége (valamelyikhez esetleg hozzávéve a P pontot is) alkotja a szeletalkotás A illetve B osztályát. Képezzük ugyanis az egyenes pontjaiból a következő két N_1 és N_2 halmazt: az N_1 halmazhoz tartozzék az egyenesnek minden olyan pontja, mely az A halmazhoz tartozik, vagy az A halmaz két pontja között fekszik; az N_2 halmazhoz tartozzék minden olyan pont, mely a B halmaznak pontja, vagy a B halmaz két pontja között fekszik. Az V. a axioma szerint van az egyenesnek legalább egy olyan P pontja, mely N_1 -hez tartozik és N_2 -nek sűrűsödési helye (vagy megfordítva). A P pont nem fekehetik az A halmaz két A_1 és A_2 pontja között, mivel az A_1A_2 szakaszon fekvő pontok az N_1 halmazhoz tartoznak, az A_1A_2 szakasz a P pontnak környezete, s ez nem tartalmazna az N_2 halmazhoz tartozó pontot; tehát P nem volna sűrűsödési helye N_2 -nek. Hasonlóan, P nem fekehetik a B halmaz két B_1 és B_2 pontja között, mivel ekkor N_2 -höz és nem N_1 -hez tartoznék. Ebből a 4. tétel szerint következik, hogy a B halmaz összes pontjai a P pont által meghatározott egyik félsugáron, az A halmaznak a P -től különböző pontjai a másik félsugáron fekszenek.

Ha az I és II axiomacsoport lineáris axiómáin kívül feltesszük az V. a, b axiómákat, a 215. tételre adott bizonyításból a fentiek szerint adódik a következő

216. tétel. *Az egyenes pontjai és a valós számok kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők egymásnak a rendezési vonatkozások megtartásával.*

Az I és II csoport lineáris axiómái alapján az V. a axioma aequivalens a következővel:

V. c. (DEDEKIND-féle axioma). *Az egyenes minden szeletalkotásához tartozik az egyenesnek olyan pontja, mely ezt a szeletalkotást meghatározza, azaz amely elválasztja egymástól a szeletalkotás két osztályának egy-egy tetszőleges tőle különböző pontját.*

Legyen A és B az egyenes pontjainak két olyan osztálya, melyre a következő feltételek teljesülnek:

1. Az egyenes minden pontja az A és B osztályok közül egyhez és csak egyhez tartozik, s mindegyik osztályhoz tartozik az egyenesnek legalább egy-egy pontja.

2. Ha az egyenes két P_1 és P_2 pontja ugyanahhoz az osztályhoz tartozik, akkor a P_1P_2 szakasz minden pontja is ugyanahhoz az osztályhoz tartozik.

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor — ez az **V. c** axioma állítása — van az egyenesnek egy olyan P pontja, mely elválasztja egymástól az A és a B osztály egy-egy tetszőleges pontját. Ha például a P pont az A osztályhoz tartozik, akkor A a P pontból és a P pont által meghatározott egyik félsugár pontjaiból, B a másik félsugár pontjaiból áll.

Ha az A és B osztályok eleget tesznek a fenti 1., 2. feltételeknek, akkor az **V. a** axioma szerint van az A és B pontthalmazok közül az egyiknek, mondjuk A -nak, legalább egy olyan P pontja, mely a másiknak sűrűsödési pontja; a P pont nem választja el egymástól az A osztály két pontját, különben a 2. feltétel szerint P -nek az illető két pont által meghatározott környezete nem tartalmazná a B halmaz egy pontját sem, tehát P nem volna sűrűsödési helye B -nek. Hasonlóan P nem választhatja el egymástól a B halmaz két pontját, különben P is B -hez tartoznék. A fentiek szerint tehát az egyenesnek A , B szeletalkotását a P pont határozza meg, s így az **V. c** axioma teljesül.

Tegyük fel viszont az **V. c** axiómát, és legyen N_1 és N_2 az egyenes pontjainak két olyan részhalmaza, melyek közül mindegyikhez tartozik az egyenesnek legalább egy-egy pontja, s az egyenes minden pontja vagy N_1 -hez, vagy N_2 -höz tartozik. Legyen A az N_1 -nek és B az N_2 -nek valamely pontja; meghatározzuk az egyenes pontjainak két A és B osztályát a következő előírással; az AB szakasznak az A , illetve a B pont-felől való meghosszabbítása tartozzék rendre az A , illetve a B osztályhoz; az AB vonalдарab valamely C pontja tartozzék az A , illetve a B osztályhoz, aszerint, hogy az AC vonalдарab összes pontjai az N_1 halmazhoz tartoznak, vagy nem. A szeletalkotásra vonatkozó 1., 2. feltételek az A , B osztályokra nyilván teljesülnek; az **V. c** axioma szerint tehát van egy a szeletalkotást meghatározó P pont. Ha a P pont az N_1 halmazhoz tartozik, akkor az N_2 halmaznak sűrűsödési pontja, és megfordítva, mint az a szeletalkotásra vonatkozó előírásunkból közvetlenül következik; tehát az **V. a** axioma teljesül.

Az **V. c** axiómából levezetjük a következő tételt:

217. tétel. (BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tétel). *Ha az M lineáris pontthalmaz összes pontjai az AB szakaszhhoz tartoznak, s ha M -nek végtelen sok pontja van, akkor az AB vonalдарabnak legalább egy pontja sűrűsödési pontja az M halmaznak.*

Bizonyítás. Az AB egyenesen következőképen értelmezzünk

egy szeletalkotást: az AB szakasznak az A , illetve a B pont felől való meghosszabbítása tartozzék az A , illetve a B osztályhoz; az AB vonaldarab C pontja tartozzék az A , illetve a B osztályhoz, aszerint, hogy az AC vonaldarabhoz az M halmaznak legfeljebb véges sok, illetve végtelen sok pontja tartozik. Az V. c axioma szerint létezik a szeletalkotást meghatározó P pont; legyen P_1P_2 tetszőleges a P pontot tartalmazó szakasz; ennek egyik végpontja, például P_1 , az A osztályhoz, a másik a B osztályhoz tartozik. Tehát az AP_2 vonaldarabhoz az M halmaznak végtelen sok, az AP_1 vonaldarabhoz véges sok pontja, s ezért a P pont P_1P_2 környezetéhez az M halmaznak végtelen sok pontja tartozik; tehát a P pont sűrűsödési pontja M -nek.

A 217. tételből (tehát az V. c axioma alapján) levezetjük a következő tételt:

218. tétel. *Ha $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ egymásban foglalt szakaszok, azaz ha minden n -re az A_{n+1}, B_{n+1} pontok az A_nB_n szakaszhhoz tartoznak, akkor van legalább egy olyan pont, mely az összes A_nB_n szakasznak pontja.*

Bizonyítás. A jelöléseket válasszuk meg úgy, hogy minden n -re az $A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$ elrendezés álljon fenn. A 217. tétel szerint az $(A_1, A_2, \dots)$ végtelen ponthalmaznak van (legalább) egy sűrűsödési pontja az A_1B_1 vonaldarabon; ez a pont minden n -re az A_nB_n szakaszhhoz tartozik, mivel az $(A_1, A_2, \dots)$ halmaznak csak véges sok pontja van az $\overrightarrow{A_{n+1}A_1}$ félsugáron, s egy pontja sincs a $\overrightarrow{B_{n+1}B_1}$ félsugáron, s így sem az A_1A_n vonaldarabon, sem a B_1B_n vonaldarabon nincs sűrűsödési pontja.

Az I és II csoport lineáris axiómái és az V. c axioma alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

219. tétel. *Az egyenes pontjainak halmaza nem megszámlálható.*

Bizonyítás. Legyen $P_1, P_2, \dots$ az egyenes pontjainak tetszőleges sorozata: meg fogjuk mutatni, hogy van az egyenesnek legalább egy olyan P pontja, mely nem tartozik ehhez a sorozathoz. Ha a P_1P_2 szakaszhhoz nem tartozik a sorozatnak egy eleme sem, akkor, mivel a P_1P_2 szakasznak van legalább egy pontja (II. c), állításunk nyilvánvaló. Ellenkező esetben pedig jelölje v_s azt a legkisebb indexet, melyre a P_{v_s} pont a P_1P_2 szakaszhhoz tartozik; hasonlóan, jelölje v_{k+2} azt a legkisebb indexet, melyre $P_{v_{k+2}}$ a $P_{v_k}P_{v_{k+1}}$ szakaszhhoz tartozik. A 218. tétel szerint az egymásban

foglalt $P_1P_2, P_3P_4, \dots$ szakaszoknak van legalább egy P közös pontja, s ez, az indexek meghatározása folytán, különböző a $P_1, P_2, \dots$ sorozat valamennyi pontjától. Tehát az egyenes pontjainak összessége nem rendezhető el egy sorozatban, vagyis nem megszámlálható.

Értelmezés. Az M halmaznak valamely M' halmazra való egyértelmű leképezésén olyan előírást értünk, mely az M halmaz minden pontjának megfelelteti az M' halmaz valamely P' pontját. A leképezést *folytonos leképezésnek* nevezzük, ha az M halmaz minden P pontjára teljesül a következő feltétel: a P pont P' kép-pontjának bármely az M' halmazon való K' környezetéhez megadható a P pontnak az M halmazon olyan K környezete, hogy K tetszőleges Q pontjának a képe a K' környezethez tartozik (vagy rövidebben: a K képe K' -höz tartozik).

Az értelmezésből közvetlenül adódik a következő

220. tétel. *Az egyenesnek önmagára, vagy egy másik egyenesre való kölcsönösen egyértelmű leképezése, mely megtartja a rendezési vonatkozásokat, folytonos.*

Bizonyítás. Legyen P az egyenes tetszőleges pontja, P ennek az adott leképezésnél származó képe; a P' pontnak a környezete minden olyan $A'B'$ szakasz, melyhez a P' pont tartozik. Az A', B' pontoknak a leképezés inverzénél olyan A, B pontok felelnek meg, melyekre az APB elrendezés áll fenn. Az AB szakasz bármely Q pontjának Q' képe az $A'B'$ szakaszhoz tartozik, tehát a leképezés folytonos.

Az V. a axioma alapján bebizonyítjuk a 220. tétel következő megfordítását:

221. tétel. *Az egyenesnek önmagára, vagy egy más egyenesre való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezése megtartja az egyenes pontjainak lineáris elrendezését.*

Bizonyítás. Bebizonyítjuk előbb, hogy egy összefüggő M halmaznak bármely egyértelmű és folytonos leképezésénél származó M' képe maga is összefüggő. Legyen ugyanis N'_1 és N'_2 az M' -nek két olyan részhalmaza, hogy M' -nek minden pontja N'_1 és N'_2 közül egyikhez és csak egyhez tartozik, s mindkét részhalmaznak van legalább egy-egy pontja. Az M halmaznak két N_1 és N_2 részhalmazát értelmezzük következőképen: az M halmaz P pontja N_1 -hez, vagy N_2 -höz tartozik, aszerint, hogy P képe az N'_1 vagy az N'_2 halmazhoz tartozik. Az M halmaz minden pontja vagy az N_1 , vagy az N_2 halmaznak pontja, s mindkét részhalmazhoz tartozik legalább

egy-egy pont. Mivel M összefüggő, van a két részhalmaz közül egyiknek, mondjuk N_1 -nek, olyan P pontja, mely a másik részhalmaznak sűrűsödési pontja. A P pont képe legyen P' ; ennek az M' halmazon való tetszőleges környezete legyen K' . A leképezés folytonossága miatt megadható a P pontnak olyan K környezete az M halmazon, melynek képe K' -nek része. Mivel az N_2 halmaznak van a K környezetben pontja, egy ilyen pontnak a képe az N_2 halmaznak a K' környezethez tartozó pontja; eszerint az N_1 halmaz P' pontja sűrűsödési pontja N_2 -nek, tehát az M' halmaz összefüggő.

Az V. a axiómából közvetlenül következik, hogy az egyenesnek bármely AB szakasza összefüggő. Jelöljük az A, B pontoknak az egyenes megadott leképezésénél származó képét A', B' -vel; az AB szakasz képe előbbi eredményünk szerint az $A'B'$ egyenesnek valamely az A', B' pontokat tartalmazó összefüggő részhalmaza; ehhez szükségképen hozzátartoznak az $A'B'$ szakasz összes pontjai. Ha ugyanis az $A'B'$ szakasz valamely Q pontja nem tartoznék az AB szakasz M' képéhez, akkor az M' halmaznak a Q pont egyik és másik oldalán fekvő pontjai M' -nek két olyan részhalmazát adnák, melyek közül egyikhez tartozik az A' , a másikhoz a B' pont, s melyek közül egyiknek sincs a másikon sűrűsödési pontja, ellentétben azzal, hogy M' összefüggő. Tehát az $A'B'$ szakasz bármely P' pontjának az inverz leképezésénél egy az AB szakaszon fekvő P pont felel meg. Eszerint az inverz leképezés, tehát az adott leképezés is megtartja a rendezési vonatkozásokat.

41. §. A sík és a tér folytonossága a rendezés alapján.

A síkra vonatkozóan feltesszük az I. 1—3 és II. 1—4, a térre vonatkozóan az I. 1—7 és II. 1—4 axiómákat.

Értelmezés. Valamely az α síkban fekvő P pontnak a síkra vonatkozó környezetén értünk minden olyan háromszög-tartományt, melyhez hozzátartozik a P pont. Egy P pontnak a térre vonatkozó környezetén értünk minden olyan tetraéder-tartományt, melyhez hozzátartozik a P pont.

A környezetek fenti értelmezése eleget tesz a HAUSDORFF-féle axiómáknak (I. 263. o.); ezt csak a síkra vonatkozóan igazoljuk, a térre vonatkozó hasonló megfontolást az olvasóra bízuk.

1. Ha a P pont az α síkban fekvő ABC és $A'B'C'$ háromszögek belsejéhez tartozik, akkor jelöljük A'' -vel a PA' szakasznak

az ABC háromszöggel közös pontját, vagy, ha ilyen pont nincs, akkor az A' pontot; hasonlóan értelmezzük B'' -t és C'' -t. Az $A'B'C''$ háromszög belseje tartalmazza a P pontot és hozzátartozik a két adott háromszög közül mindegyiknek a belsejéhez.

2. Ha a P és a Q pontok az ABC háromszög belsejéhez tartoznak, akkor ennek a háromszögnek a belseje P -nek is, Q -nak is környezete.

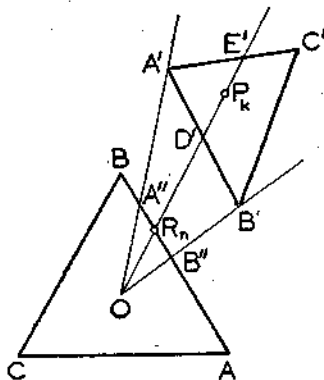
3. Ha P és Q két különböző pont, legyen R a PQ szakasz valamely pontja, az R ponton áthaladó és a PQ egyenestől különböző valamely egyenesen legyen A és B két olyan pont, melyek az R pontnak különböző oldalán fekszenek; legyen végül C és C' a PQ egyenesnek két olyan pontja, melyeknek elrendezése $CPQC'$; az ABC háromszög belseje P -nek, az ABC' háromszög belseje Q nak környezete, s a kettőnek nincs közös pontja.

Az V. a axiómából következik, hogy a sík, illetve a tér pontjainak összessége összefüggő halmaz, mivel a sík, illetve a tér két tetszőleges pontját összekötő szakasz összefüggő az V. a axióma folytán.

Az V. b axiómából következik, hogy a sík, illetve a tér pontjainak összessége szeparábilis halmaz. Ezt a tételt a síkra vonatkozóan fogjuk bebizonyítani olyan módon, amelynek a térre való átvitele nyilvánvaló. Legyen ABC egy háromszög a síkban; felvesszünk az AB, BC, CA egyeneseken egy-egy mindenütt sűrű megszámlálható pontthalmazt; jelöljük ezeket rendre $(R_{v1}), (R_{v2}), (R_{v3})$ -mal; ($v = 1, 2, \dots$); ennek a három sorozatnak az elemeit egy sorozatban rendezhetjük el:

$$R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, \dots;$$

jelöljük ennek a sorozatnak az elemeit egy indexszel: $R_1, R_2, \dots$. A háromszög belsejében felvesszünk egy O pontot, az OR_n egyenesen egy mindenütt sűrű megszámlálható (P_{mn}) pontthalmazt; az összes P_{mn} pontokat előbb az $m+n$ értéke, majd az m értéke szerint egy sorozatban rendezhetjük el; jelöljük ennek a sorozatnak az elemeit $P_1, P_2, \dots$ -vel. A P_k pontok halmaza a síkon mindenütt sűrű. Legyen ugyanis $A'B'C'$ egy tetszőleges háromszög az síkban (160. ábra.); ennek



160. ábra.

csúcsai között van két olyan, például A' és B' , mely nem fekszik egy az O ponton áthaladó egyenesen. Az $\vec{OA'}$ és az $\vec{OB'}$ félsugárnak van az ABC háromszöggel egy-egy A'' , illetve B'' közös pontja (15. tétel); az ABC háromszögnek az A'' és B'' pontok által meghatározott két törtvonala közül az egyik az $\sphericalangle A''OB''$ szög belsejéhez tartozik; tegyük fel például, hogy az AB oldal valamely szakasza ennek a szögnek a belsejéhez tartozik, akkor van azon az (R_n) sorozatnak legalább egy R_n pontja; az $\vec{OR_n}$ félsugárnak van az $A'B'C'$ háromszög $A'B'$ oldalával egy D' közös pontja, a II. 4 axioma szerint van $\vec{OR_n}$ -nek az $A'B'C'$ háromszöggel még egy E' közös pontja és a $D'E'$ szakasz az $A'B'C'$ háromszög belsejéhez tartozik (14. tétel bizonyítása); ezen a szakaszon fekszik legalább egy a (P_{mn}) sorozathoz, s ezért a (P_k) sorozathoz tartozó pont.

Az I. 1—3, II és V. c axiómák alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

222. tétel. Ha az α síkhoz és az O ponthoz tartozó sugársor elemeit (vagyis az O pontból kiinduló félsugarakat) két A és B osztályba osztjuk úgy, hogy

1. a sugársor minden eleme a két osztály közül egyikhez és csak egyhez tartozik, s mindegyik osztályhoz tartozik a sugársornak legalább két-két eleme;

2. az egyik osztályhoz tartozó két-két félsugar nem választja el egymástól a másik osztály két félsugarát,

akkor van a sugársornak két olyan e és f eleme, melyek elválasztják egymástól az A és a B osztály egy-egy tetszőleges e -től és az f -től különböző félsugarát.

Bizonyítás. Legyen $\vec{OP_1}$ és $\vec{OP_2}$ két az O pontból kiinduló, de nem egy egyenesen fekvő félsugar, melyek közül az első az A , a másik a B osztályhoz tartozik; legyen továbbá $\vec{OP_3}$ egy a $\sphericalangle P_1OP_2$ szög belsejében fekvő félsugárnak az O pont felől való meghosszabbítása; ezeken a félsugarakon felveszünk egy-egy tetszőleges az O -tól különböző P_1, P_2, P_3 pontot. A P_1P_2 szakasz Q pontjait két A' és B' osztályba sorozzuk a szerint, hogy az $\vec{OQ}$ félsugar az A , vagy a B osztályhoz tartozik. Az V. c axioma szerint van a P_1P_2 vonalrésznek olyan E pontja, mely ezt a szeletalkotást meghatározza; az $\vec{OE}$ félsugarat jelöljük e -vel. Ha például a P_3 pont a B' osztályhoz tartozik, hasonlóan meghatározzuk a P_1P_3 vonalrész F pontját; és f -fel jelöljük az $\vec{OF}$ félsugarat. Az e és f félsugarak

különbözők, és elválasztják egymástól az A és a B osztály egy-egy tetszőleges az e -től és az f -től különböző félsugarát.

A 222. tételre röviden így fogunk hivatkozni: *ha a DEDEKIND-féle axioma teljesül az egyenesre, akkor teljesül a sugársorra vonatkozóan is.* Ennek az állításnak a megfordítása hasonló meggondolással adódik.

Az I. 1—3, II. 1—4 axiómák alapján az V. a axióma levezethető a következőből:

Van legalább egy olyan szakasz, mely összefüggő.

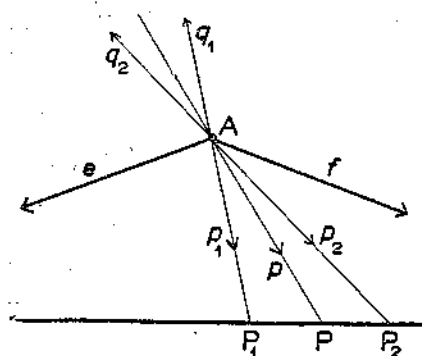
Ha ugyanis az AB szakasz összefüggő, és a B' pont nem tartozik az AB egyeneshez, akkor az AB' szakasz is összefüggő; ennek igazolására, jelöljük B'' -vel a BB' szakasz meghosszabbításának valamely pontját; vetítsük az AB szakaszt a B'' pontból az AB' szakaszra (I. 34. o.); ez a vetítés az AB szakasznak az AB' szakaszra való kölcsönösen egyértelmű és a rendezést megtartó, tehát a 220. tétel szerint folytonos leképezése; ezért az AB szakasz képe: az AB' szakasz összefüggő (I. a 221. tétel bizonyítását). Legyen CD tetszőleges szakasz, és B' egy olyan pont, mely nem tartozik sem az AB , sem az AC , sem a CD egyeneshez; előbbi eredményünk szerint az AB szakasz összefüggő voltából sorban adódik az AB' , $B'C$, CD szakaszok összefüggő volta. — Abból, hogy minden szakasz összefüggő, az értelmezés szerint közvetlenül következik, hogy minden egyenes is összefüggő.

Az I. 1—3, II. 1—4 és V. c axiómákból levezetjük a következő tételt:

223. tétel. *Az α síkban fekvő bármely a egyeneshez és bármely nem az a egyenesen fekvő A ponthoz megadható legalább egy olyan az α síkban fekvő és az A ponton áthaladó a' egyenes, melynek nincs a -val közös pontja.*

Bizonyítás. Az α síkban fekvő és az A pontból kiinduló félsugarak összességét két A és B osztályra osztjuk fel a következő módon; A -hoz tartozzék minden olyan p félsugár, melynek van a -val közös pontja, B -hez minden olyan q félsugár, melynek nincs a -val közös pontja. Ha P_1 és P_2 az a egyenes két tetszőleges pontja, akkor $\vec{AP}_1$ és az $\vec{AP}_2$ félsugár A -hoz, ezeknek A felől való meghosszabbítása B -hez tartozik; tehát mindegyik osztálynak van legalább két-két eleme. Ha p_1 és p_2 az A osztályhoz tartozó félsugarak, akkor a félsugársornak a $\sphericalangle(p_1, p_2)$ szög belsejében fekvő félsugarai az A osztályhoz tartoznak (37. tétel), a $\sphericalangle(p_1, p_2)$ csúcshelyén fekvő

félsugarai a B osztályhoz tartoznak; tehát az A osztály két félsugara nem választhatja el egymástól a B osztály két félsugarát. A 222. tételből következik, hogy van két olyan e és f félsugár, melyek elválasztják egymástól az A és a B osztálynak egy-egy tetszőleges az e -től és az f -től különböző félsugarát. Sem e , sem f nem tartozhatik az A osztályhoz, sem ezeknek a félsugaraknak az A pont felől való meghosszabbításai. Ha ugyanis p az A-hoz tartozó valamely félsugár, és P ennek az a egyenessel való metszéspontja,



161. ábra.

akkor van az a egyenesnek a P pont mindegyik oldalán egy-egy P_1 , illetve P_2 pontja; jelöljük az $\vec{AP}_1$, $\vec{AP}_2$ félsugarakat rendre p_1 -gyel és p_2 vel, s ezeknek az A pont felől való meghosszabbítását rendre q_1 -gyel és q_2 -vel (161. ábra). A 222. tétel szerint az e és f félsugarak közül az egyik a $\sphericalangle(p_1, q_2)$ szögnek, a másik a $\sphericalangle(p_2, q_1)$ szögnek a belsejéhez tartozik, tehát közülük egyik sem eshetik egybe

az A osztály tetszőlegesen felvett p félsugarával, sem annak az A pont felől való meghosszabbításával. — Ebből következik, hogy sem az e félsugárnak, sem a rajta átfektetett egyenesnek nincs az a egyenessel közös pontja; ugyanez érvényes az f félsugárra és a rajta átfektetett egyenesre.

Ha e és f egy egyenesnek az A pont által meghatározott két félsugara, akkor ez az a síkban az egyetlen olyan a' egyenes, mely az A ponton áthalad, s nem metszi az a egyenest; ekkor tehát teljesül az euklidesi párhuzamossági axioma az A pontra és az a egyenesre vonatkozóan. — Ha azonban e és f nem tartoznak egy egyeneshez, akkor az a egyenes összes pontjai az $\sphericalangle(e, f)$ szögnek a belsejében fekszenek, s bármely olyan az A ponton áthaladó a' egyenesnek, mely az $\sphericalangle(e, f)$ mellékszögeiben fekszik, nincs az a egyenessel közös pontja. Ebben az esetben az e és az f félsugarakon átfektetett egyenesek elválasztják az A ponton áthaladó egyenesek összességében az a -t metsző egyeneseket az a -t nem metszőktől; az e és f félsugarakat az a egyenessel párhuzamosnak nevezzük a BOLYAI-LÖBACSEFSZKIJ-féle értelemben. Ha az euklidesi

párhuzamossági axióma helyett ezt az utóbbi lehetőséget tesszük fel az A ponton áthaladó és az a egyenest metsző, illetve nem metsző egyenesekről, a BOLYAI-LOBACSEFSZKIJ-féle nem-euklidesi, ú. n. hiperbolikus geometriához jutunk. (Erre vonatkozóan lásd még az utolsó fejezet egy megjegyzését, az euklidesi párhuzamossági axióma függetlenségéről; a hiperbolikus geometriával részletesen a második kötetben fogunk foglalkozni.)

A síkbeli és a térbeli környezetek fenti értelmezése alapján az I, II csoportok sík-, illetve téraxiómáiból levezetjük a következő két tételt:

224. tétel. Ha A, B, C egy síkban, de nem egy egyenesen fekvő pontok, megadható ezeknek a síkban olyan $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ környezete, hogy ha A', B', C' a $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ környezet egy-egy tetszőleges pontja, akkor A', B', C' nem fekszenek egy egyenesen.

225. tétel. Ha A, B, C, D nem egy síkban fekvő pontok, megadható ezeknek olyan K_A, K_B, K_C, K_D környezete, hogy ha A', B', C', D' a K_A, K_B, K_C, K_D környezet egy-egy tetszőleges pontja, akkor A', B', C', D' nem fekszenek egy síkban.

Bizonyítás. Vegyünk fel az ABC háromszög belsejében egy M pontot; jelöljük a CM egyenesnek az AB szakasszal való metszéspontját P -vel (37. tétel). Legyenek $A_1, A_2, B_1, B_2, P_1, P_2$ az AB egyenes olyan pontjai, melyeknek elrendezése $A_1 A A_2 P_1 P P_2 B_1 B B_2$. A $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ környezeteket úgy választjuk meg, hogy κ_A az $\sphericalangle A_1 M A_2$ szögnek, κ_B az $\sphericalangle B_1 M B_2$ szögnek, és κ_C az $\sphericalangle P_1 M P_2$ csúcsszögének a belsejéhez tartozzék. Ha A', B', C' ezeknek egy-egy pontja, akkor az 1. tétel folytán az M pont nem fekszik az $A'B'$ egyenesen, mivel az $\vec{MA'}$ és az $\vec{MB'}$ félsugárnak van az AB egyenes $A_1 A_2$ és $B_1 B_2$ szakaszával egy-egy közös pontja (37. tétel), M pedig nem tartozik az AB egyeneshez. Az $\vec{MC'}$ félsugárnak az M felől való meghosszabbítása az $\sphericalangle A'M B'$ szög belsejéhez tartozik, a 37. tétel folytán metszi az $A'B'$ szakaszt, tehát a C' pont nem tartozhatik az $A'B'$ egyeneshez. Ezzel a 224. tételt bebizonyítottuk.

A fenti megfontolásból közvetlenül következik, hogy megadható az A, B, C, M pontoknak egy-egy olyan $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C, \kappa_M$ környezete, hogy ha azoknak tetszőleges pontjai A', B', C', M' , akkor M' az $A'B'C'$ háromszög belsejéhez tartozik. Ha a D pont nem fekszik az ABC síkban, legyen O az MD szakasz valamely pontja. Jelöljük T_A -val azt a háromoldalú testszöveget, melynek csúcsa O , s élei az O pontból kiinduló és a κ_A környezetet határoló három-

szög csúcsain áthaladó félsugarak; hasonlóan értelmezzük a T_B és a T_C testszögeket. A κ_M környezetet határoló háromszög csúcsait ugyancsak kössük össze O -val; ezeknek a szakaszoknak O felől való meghosszabbításai egy háromoldalú testszöget határoznak meg; ezt jelöljük T_D -vel. Az A, B, C, D pontok rendre a T_A, T_B, T_C, T_D testszögek belsejéhez tartoznak; ezeknek a pontoknak egy olyan térbeli környezetét vesszük fel, melyek szintén az illető testszög belsejéhez tartoznak; jelöljük ezeket K_A, K_B, K_C, K_D -vel. Ha A', B', C' a K_A, K_B, K_C környezet egy-egy tetszőleges pontja, akkor az $\vec{OA'}, \vec{OB'}, \vec{OC'}$ félsugaraknak van egy-egy A'', B'', C'' pontja rendre a $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ síkbeli környezetben (54. tétel); ezek a κ környezetek megválasztása folytán nem tartoznak egy egyeneshez. Ebből következik, mivel O nem fekszik az ABC síkban, hogy az A', B', C' pontok nem tartoznak egy egyeneshez, továbbá, hogy O nem tartozik az $A'B'C'$ síkhoz. Ha D' a K_D környezet tetszőleges pontja, akkor az $\vec{OD'}$ félsugár O felől való meghosszabbításának van a κ_M síkbeli környezetéhez, s ezért az $A''B''C''$ háromszög belsejéhez tartozó D'' pontja; az 54. tételből következik, hogy az $\vec{OD''}$ félsugárnak van az $A'B'C'$ háromszöglappal közös pontja; mivel pedig O nem tartozik az $A'B'C'$ síkhoz, tehát az OD'' egyenesnek nincs az $A'B'C'$ síkkal más közös pontja (1. tétel). Ebből következik, hogy D' nem tartozik az $A'B'C'$ síkhoz. Ezzel a 225. tételt bebizonyítottuk.

42. §. Az egyenes folytonossága szakaszok egyenlősége alapján.

Feltesszük az I, II, III csoport lineáris axiómáit (I. 1, II. 1, 2, 3, a, b, c, III. 1—3).

Ezeknek alapján az V. c axiómából levezetjük a következő ARCHIMEDES- vagy EUDOXUS-féle axiómát:

V. d. Ha a és b két tetszőleges szakasz, akkor van olyan n egész szám, melyre az a szakasz n -szerese nagyobb a b szakasznál.

Legyen ugyanis A és B két olyan pont, melyre az AB szakasz egyenlő a b szakasszal; az $\vec{AB}$ félsugáron legyen C az a pont, melyre az AC szakasz egyenlő az a szakasszal. Ha ezeknek a pontoknak az elrendezése ABC , akkor $n=1$ -re teljesül az V. d. axióma állítása. Ha az ACB elrendezés áll fenn, akkor legyenek

$C_1 = C, C_2, C_3, \dots$ az $\overline{AB}$ félsugárnak olyan pontjai, melyekre minden k -nál az $AC_1C_2 \dots C_k$ elrendezés, és az $AC_1 = C_1C_2 = \dots = C_{k-1}C_k$ egyenlőség áll fenn. Az $\overline{AB}$ egyenesen meghatározunk két A és B osztályt a következő előírással: az A osztályhoz tartozzék az A pont, továbbá az A pont által meghatározott és a B pontot nem tartalmazó félsugárnak a pontjai, s végül az $\overline{AB}$ félsugárnak minden olyan P pontja, melyre valamely n indexnél az APC_n elrendezés áll fenn; a B osztályhoz tartozzék minden olyan Q pont, melyre minden n indexnél az AC_nQ elrendezés áll fenn. Ha az V. d axioma állítása nem teljesülne, akkor a B pont a B osztályhoz tartoznék; az V. c axioma szerint van egy a szeletalkotást meghatározó D pont. A III. 2 axiómából következik, hogy van az egyenesnek olyan D' pontja, mely a D pontnak ugyanazon az oldalán fekszik mint az A pont, s melyre $D'D = AC$. Meghatározása folytán D' az A osztályhoz tartozik, s így az értelmezés szerint valamely n indexnél fennáll az $AD'C_n$ elrendezés. Fennállanak tehát a következő elrendezések: $AD'C_n, AC_nC_{n+1}, AC_{n+1}D$, s így a 4. tétel szerint a $D'C_nC_{n+1}D$ elrendezés is; mivel $D'D = C_nC_{n+1}$, ez ellentmond a 72. tételnek.

Az V. d axiómából levezetjük a következő tételt:

226. tétel. Az egyenes pontjainak megfeleltethetünk valós számokat úgy, hogy a következő feltételek teljesülnek:

1. az egyenes minden P pontjának megfelel egy és csak egy $x = x(P)$ valós szám, ezt a P pont koordinátájának nevezzük; két különböző ponthoz két különböző koordináta tartozik.

2. ha P, Q, P', Q' az egyenesnek olyan pontjai, hogy a PQ és a $P'Q'$ szakaszok egyenlők és megegyező irányúak, akkor koordinátáikra fennáll az $x(Q) - x(P) = x(Q') - x(P')$ egyenlőség, és megfordítva.

Bizonyítás. A következő bizonyítás módszerét POINCARÉ-nak egy általánosabb célra szolgáló megfontolásából vettük. — Fejezzünk az egyenesen két tetszőleges O és E pontot, ezekhez rendre a 0 és 1 koordinátát rendeljük. Legyen $P = P_1$ az $\overline{OE}$ félsugar valamely pontja; legyenek $P_1, P_2, \dots$ azok a pontok, melyekre az $OP_1P_2 \dots$ elrendezés és az $OP_1 = P_1P_2 = \dots$ egyenlőségek állnak fenn. Jelöljük φ_m -mel azt a legnagyobb egész számot, melyre az $\overline{OE}$ szakasz φ_m -szerese kisebb mint OP_m , vagy azzal egyenlő:

$$\varphi_m \cdot OE \leq OP_m < (\varphi_m + 1) \cdot OE.$$

Mivel $OP_m = P_m P_{2m} = \dots = P_{(n-1)m} P_{nm}$, tehát minden pozitív egész n -re: $n \cdot OP_m = OP_{nm}$, s így

$$n \varphi_m \cdot OE \leq OP_{nm} < (n \varphi_m + 1) \cdot OE;$$

ebből a φ_{mn} szám értelmezése szerint következik:

$$n \varphi_m \leq \varphi_{mn} < n (\varphi_m + 1),$$

s ezért

$$0 \leq \frac{\varphi_{mn}}{mn} - \frac{\varphi_m}{m} < \frac{1}{m};$$

m és n felcserélésével,

$$0 \leq \frac{\varphi_{mn}}{mn} - \frac{\varphi_n}{n} < \frac{1}{n}.$$

Ha n jelenti az m és n számok közül a kisebbet, a két utóbbi egyenlőtlenség összefoglalásából kapjuk:

$$\left| \frac{\varphi_m}{m} - \frac{\varphi_n}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Ebből az egyenlőtlenségből a CAUCHY-féle konvergencia-elv szerint következik, hogy a

$$\varphi_1, \frac{\varphi_2}{2}, \frac{\varphi_3}{3}, \dots$$

pozitív valós számok sorozatának van határértéke, azaz létezik egy olyan

$$x = \lim \frac{\varphi_n}{n}$$

valós szám, hogy a sorozat n -edik elemének és az x számnak a különbsége abszolút értékben tetszőlegesen kicsiny, hacsak n elegendő nagy. Ezt az x számot rendeljük hozzá a P ponthoz mint $x(P)$ koordinátát. — Mivel a fenti sorozatnak azok az elemei, melyek az $n=1, 2, 4, 8, \dots$ indexeknek felelnek meg, növekvő (illetve nem csökkenő) sorozatot alkotnak, következik hogy $x(P) > 0$.

Ha a P' pont az egyenesnek az O pont által meghatározott másik félsugarán fekszik, jelöljük P -vel az egyenesnek azt a pontját, melyre a $P'O$ és az OP irányított szakaszok egyenlők, s jelentse $x(P)$ a P pontnak a fenti eljárással meghatározott koordinátáját; a P' pontnak az $x(P') = -x(P)$ koordinátát feleltetjük meg.

Legyen P és Q az $\vec{OE}$ félsugárnak két tetszőleges pontja s jelöljük R -rel azt a pontját, melyre az OP és a QR irányított

szakaszok egyenlők. Meg fogjuk mutatni, hogy ezeknek a pontoknak a koordinátáira fennáll az $x(P) = x(R) - x(Q)$ egyenlőség. Jelöljük $\varphi_n, \varphi'_n, \varphi''_n$ -vel azokat az egész számokat, melyekre

$$\varphi_n \cdot OE \leq n \cdot OP < (\varphi_n + 1) \cdot OE,$$

$$\varphi'_n \cdot OE \leq n \cdot OQ < (\varphi'_n + 1) \cdot OE,$$

$$\varphi''_n \cdot OE \leq n \cdot OR < (\varphi''_n + 1) \cdot OE;$$

az első két vonatkozásból, mivel $OP = QR$, tehát $OP + OQ = OR$, összeadással:

$$(\varphi_n + \varphi'_n) \cdot OE \leq n \cdot OR < (\varphi_n + \varphi'_n + 2) \cdot OE;$$

ezt a harmadik vonatkozással összehasonlítva kapjuk:

$$\varphi_n + \varphi'_n \leq \varphi''_n < \varphi_n + \varphi'_n + 2.$$

Ezt az egyenlőtlenséget osztjuk n -nel s a határértékeket képezzük; így kapjuk, hogy

$$\lim \frac{\varphi_n}{n} + \lim \frac{\varphi'_n}{n} = \lim \frac{\varphi''_n}{n};$$

tehát

$$x(P) + x(Q) = x(R).$$

Ebből az eredményünkből következik, hogy ha P, Q, P', Q' az egyenesnek tetszőleges olyan pontjai, melyekre a PQ és a $P'Q'$ irányított szakaszok egyenlők, akkor $x(Q) - x(P) = x(Q') - x(P')$, és megfordítva: ha fennáll a koordinátákra ez az egyenlőség, akkor a PQ és a $P'Q'$ irányított szakaszok egyenlők.

A PQ szakaszhoz, illetve a PQ irányított szakaszhoz tartozó koordinátán értjük az $x(Q) - x(P)$ különbség abszolút értékét, illetve magát ezt a különbséget.

Külön megemlítiük a levezetett tétel következő korolláriumait:

Ha P, Q, R az egyenes három tetszőleges pontja, melyeknek elrendezése PQR , akkor koordinátákra fennáll az $x(P) < x(Q) < x(R)$, vagy az $x(P) > x(Q) > x(R)$ vonatkozás.

Ha P és Q az $\overline{OE}$ félsugárnak olyan pontjai, hogy az OQ szakasz az OP szakasznak n -szerese, akkor $x(Q) = n \cdot x(P)$, és megfordítva.

227. tétel. Az ARCHIMEDES-féle axioma alapján az egyenes pontjaihoz rendelt koordináta-értékek a valós számok összességének mindenütt sűrű részhalmazát alkotják.

Bizonyítás. Mivel minden koordinátának egészszámú többszöröse is koordináták, a tétel bebizonyítására elég azt megmu-

talni, hogy vannak az egyenes pontjaihoz rendelt koordináta értékek között tetszőlegesen kicsinyek. A 6. tétel szerint az OE szakaszon végtelen sok pont van; legyen n tetszőleges nagy pozitív egész szám, és legyenek $P^1, P^2, \dots, P^n$ az OE szakasznak olyan különböző pontjai, melyeknek elrendezése $OP^1P^2 \dots P^nE$. Az $OP^1, P^1P^2, \dots, P^nE$ szakaszok között van legalább egy olyan, melynek az n -szerese kisebb mint OE ; ezt úgy fejezzük ki, hogy az illető szakasz kisebb mint az OE szakasz n -edrésze. Ellenkező esetben ugyanis

$$n \cdot OE = n \cdot OP^1 + n \cdot P^1P^2 + \dots + n \cdot P^nE > OE + OE + \dots + OE > (n+1) \cdot OE,$$

ami ellenmondás. A fenti $n+1$ szakasz közül a legkisebbet mérjük rá az O ponttól az $\overrightarrow{OE}$ félsugárra; kapunk így egy olyan OP szakaszt, mely kisebb OE -nek az n -edrészénél, s ezért a P pont $x(P)$ koordinátája kisebb mint $1/n$.

Ha az V. d (ARCHIMEDES-féle) axioma helyett az V. c (DEDEKIND-féle) axiómát tesszük fel, a 227. tétel állítása annyival teljesebbé lesz, hogy az egyenes pontjaihoz rendelt koordináta értékek halmaza a valós számok összességével azonos. Legyen ugyanis x egy tetszőleges valós szám; az egyenes valamely pontját az A , illetve a B osztályba soroljuk, aszerint, hogy a hozzátartozó koordináta $\leq x$, vagy $> x$; a 226. tétel korolláriumára szerint ez egy szeletalkotás. Az V. c axioma szerint van az egyenesen egy olyan P pont, mely ezt a szeletalkotást meghatározza. A P ponthoz tartozó $x(P)$ koordinátaérték x -szel egyenlő; ha például $x(P) < x$ volna, akkor, minthogy a koordinátaértékek a valós számok összességének mindenütt sűrű részhalmazát alkotják, a P pont valamely környezetének összes pontjai az A osztályhoz tartoznának, ami ellenmondás. Az V. c axioma alapján tehát az egyenes pontjait és a valós számokat kölcsönösen egyértelmű módon feleltettük meg egymásnak, úgyhogy a PQ és $P'Q'$ irányított szakaszok egyenlőségéből következik koordinátáikra az $x(Q) - x(P) = x(Q') - x(P')$ egyenlőség, és megfordítva. Mivel az egyenes pontjainak és a valós számoknak ennél a vonatkozásánál a rendezési vonatkozások megmaradnak, a 220. tétellel megegyező módon következik, hogy a koordináták bevezetése kölcsönösen egyértelmű és folytonos vonatkozást létesít az egyenes pontjai és a valós számok összessége között.

Az V. c axiómából a fentiek szerint következik, hogy *bármely szakasznak van n -edrésze, hol n tetszőleges pozitív egész számot jelent.*

Értelmezés. A $P_1, P_2, \dots$ pontsorozatot *konvergensnek*, és a P pontot a *sorozat limeszének* vagy *határpontjának* nevezzük, ha a P pont tetszőleges K környezetéhez megadható egy olyan N pozitív egész szám, hogy a sorozatnak az N -nél nagyobb indexű pontjai valamennyien a K környezetbe tartoznak. (A HAUSDORFF-féle 3. feltételből, 263. o., következik, hogy egy konvergens sorozatnak egy és csak egy határpontja van.)

Az V. c (DEDEKIND-féle) axiómából következik a 228. tétel (CAUCHY-féle konvergencia-elv). Az egyenesen fekvő $P_1, P_2, \dots$ pontok végtelen sorozata konvergens, ha tetszőleges a szakaszhoz megadható egy olyan N pozitív egész szám, hogy minden az N -nél nagyobb m és n indexre a $P_m P_n$ szakasz kisebb az a szakasznál.

Bizonyítás. Legyen a valamely szakasz, és N olyan pozitív egész szám, hogy ha $m > N$ és $n > N$, akkor a $P_m P_n$ szakasz kisebb mint a . Jelöljük A -val és B -vel az egyenesnek azt a két pontját, melyre az AP_{N+1} és a BP_{N+1} szakasz egyenlő a -val; a sorozat minden olyan pontja, melynek indexe nagyobb mint N , az AB szakaszhoz tartozik; a 217. tétel szerint tehát a $P_1, P_2, \dots$ végtelen halmaznak van az AB vonalдарabon legalább egy sűrűsödési pontja: P . Legyen $A'B'$ tetszőleges a P pontot tartalmazó szakasz, és $A''B''$ ennek olyan része, mely szintén tartalmazza a P pontot; tegyük fel, hogy fennáll az $A'A''PB''B'$ elrendezés. Jelöljünk a' -vel egy olyan szakaszt, mely kisebb $A'A''$ -nél és $B'B''$ -nél, és legyen N' az a' szakasznak a fenti CAUCHY-féle feltétel értelmében megfelelő pozitív egész szám. Mivel P sűrűsödési pontja a $P_1, P_2, \dots$ pont-halmaznak, van az $A'B'$ szakaszon legalább egy olyan P_m pont, melynek indexe nagyobb mint N' ; ha n bármely az N' -nél nagyobb index, akkor $P_m P_n < a'$, tehát P_n az $A'B'$ szakaszhoz tartozik. Eszerint a P pont a $P_1, P_2, \dots$ sorozat határpontja.

Megjegyzés. Az egyenes folytonosságának a szakaszok egyenlősége alapján adott tárgyalásában az ARCHIMEDES-féle (V. d) és a DEDEKIND-féle (V. c) axiómának jutott fontos szerep. Az V. d axiómából következik, hogy az egyenes pontjainak olyan numerikus koordinátákat feleltethetünk meg, melyek a szakaszok nagysági vonatkozását kifejezik; az V. c axióma biztosítja azt, hogy

az egyenes pontjaihoz rendelt koordináták halmaza a valós számok összességével megegyezik. Mint láttuk, az V. c axiómából levezethető az V. d axióma; erre való tekintettel felmerülhet az a kívánság, hogy az V. c axiómát egy olyan axiómával helyettesítsük, mely az V. d-vel együttesen *aequivalens* az V. c-vel. Ha az I, II, III csoportoknak csupán a lineáris axiómáit vesszük figyelembe, ennek a célnak megfelel az, ha a DEDEKIND-féle axiómát csak *egy szakaszra* vonatkozóan tesszük fel. Ha azonban feltesszük az I, II, III csoport sík-axiómáit is, akkor abból, hogy a DEDEKIND-féle axióma *egy szakaszra* teljesül, következik, hogy minden más szakaszra is teljesül (l. 273. o.) s ebből levezethető az ARCHIMEDESI axióma is. A jelzett célnak megfelel például a következő két feltétel, melyek az I—IV csoport összes axiómáinak feltételezése mellett is függetlenek egymástól:

V. 1. *Ha az egyenes pontjainak tetszőleges szeletalkotása A, B, és PQ tetszőleges szakasz, akkor van egy olyan a PQ-val egyenlő AB szakasz; melynek egyik végpontja az A, a másik végpontja a B osztályhoz tartozik.*

V. 2. *Ha az egyenes pontjainak valamely A, B szeletalkotásához, és minden PQ szakaszhoz megadható egy olyan a PQ-val egyenlő AB szakasz, melynek egyik végpontja az A, a másik végpontja a B osztályhoz tartozik, akkor van az egyenesnek egy olyan P pontja, mely ezt a szeletalkotást meghatározza.*

Ezek közül V. 1 az ARCHIMEDESI axiómával *aequivalens*, mint könnyen belátható; V. 2-nek feltétele az V. 1 állítása, és állítása a DEDEKIND-féle axiómáéval megegyező.

Megjegyzés. A *valós számok* fogalmát a fenti tárgyalásban ismertnek tettük fel; röviden emlékeztetünk itt a valós számok értelmezésére. A racionális számok összességét két olyan A és B osztályra osztjuk fel, melyek eleget tesznek a DEDEKIND-féle szeletalkotás feltételeinek (l. 265. o.). Minden ilyen szeletalkotás értelmez egy valós számot. Például a $+\sqrt{2}$ valós számot a racionális számok összességének az a szeletalkotása értelmezi, melynél az A osztályhoz tartoznak a negatív racionális számok, 0, és azok a p/q pozitív racionális számok, melyeknek négyzete kisebb mint 2, a B osztályhoz tartoznak azok a pozitív racionális számok, melyeknek négyzete nagyobb mint 2. — Az értelmezés folytán a racionális számok halmaza a valós számok összességének mindenütt sűrű részhalmaza, tehát az V. a szeparabilitási axióma teljesül; ugyancsak teljesül a valós számok összességére az V. c DEDEKIND-féle axióma.

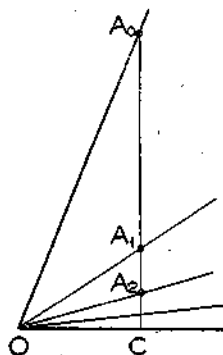
43. §. A sík és a tér folytonossága egybevágóság alapján.

Tegyük fel a síkra vonatkozóan az I. 1–3, II, III, a térre vonatkozóan pedig az I. 1–7, II, III axiomákat.

A szakaszokra vonatkozó ARCHIMEDESI (V. d) axiomából levezetjük a szögekre vonatkozó ARCHIMEDESI axiomát, melyet a következő tételben mondunk ki:

229. tétel. *Ha α és ε két tetszőleges hegyesszög, melyek közül α nagyobb mint ε , akkor van olyan n pozitív egész szám, melyre az α szög 2^n -edrésze kisebb mint ε .*

Bizonyítás. Az α szög csúcsát jelöljük O -val; a szög egyik szárán felvesszünk egy A_0 pontot, ebből a másik szárra bocsátott merőlegesnek a talppontja legyen C . Az $\sphericalangle A_0OC$ szögfelezőjének az A_0C szakasszal közös pontját jelöljük A_1 -gyel, az $\sphericalangle A_1OC$ szögfelezőjének az A_1C szakasszal közös pontját A_2 -vel, és így tovább (162. ábra). Az értelmezés szerint az $\sphericalangle A_0OC$ szög 2^n -edrésze az $\sphericalangle A_nOC$ szög. A 123. tétel szerint: $A_0A_1 > A_1C$, $A_1A_2 > A_2C$, ..., tehát



$$A_0C > 2 \cdot A_1C > 4 \cdot A_2C > \dots > 2^n \cdot A_nC.$$

162. ábra.

Legyen $\vec{OB}$ az a félsugár, mely az $\vec{OC}$ félsugárnak ugyanazon az oldalán fekszik mint $\vec{OA_0}$, s melyre $\sphericalangle BOC = \varepsilon$ (98. tétel). Mivel feltevésünk szerint $\varepsilon < \alpha$, tehát az $\vec{OB}$ félsugár az $\sphericalangle A_0OC$ szög belsejében fekszik, s a 37. tétel szerint metszi az A_0C szakaszt; a metszéspontot jelöljük B -vel. Az V. d axioma folytán van olyan n pozitív egész szám, melyre $2^n \cdot BC > A_0C$; erre az n értékre tehát

$$2^n \cdot A_nC < A_0C < 2^n \cdot BC, \text{ tehát } A_nC < BC,$$

s ezért az A_n pont a BC szakaszon fekszik, tehát az értelmezés szerint az $\sphericalangle A_nOC$ szög, mely az α szögnek 2^n -edrésze, kisebb mint az $\varepsilon = \sphericalangle BOC$ szög.

A fentihez hasonló megfontolással vezethetjük le a 119. tétel alapján a szögekre vonatkozó ARCHIMEDESI axiomából a szakaszokra vonatkozót.

230. tétel. *Szögek nagyságát jellemezhetjük egy valós számmal, azaz megfeleltethetünk minden szögnek egy valós számot olyan*

módon, hogy ha az α és a β szög összege egyenlő a γ szöggel, akkor az ezeknek rendre megfelelő $\theta(\alpha)$, $\theta(\beta)$, $\theta(\gamma)$ valós számokra fennáll a $\theta(\alpha) + \theta(\beta) = \theta(\gamma)$ egyenlőség, és megfordítva.

Bizonyítás. A nullaszögnek a 0, az egyenesszögnek az 1, a derékszögnek az $1/2$ értéket, a derékszög 2^n -edrészének az $1/2^{n+1}$, s az utóbbi szög m -szeresének ($m < 2^{n+1}$) az $m/2^{n+1}$ diadikus törtszámot feleltetjük meg. Ha α tetszőleges szög, akkor azok a diadikus törtszámok, melyek α -nál kisebb, illetve α -nál nagyobb szögeknek felelnek meg, a diadikus törtszámok összességében egy szeletalkotást határoznak meg; ehhez a szeletalkotáshoz tartozik egy $\theta(\alpha)$ valós szám, ezt feleltetjük meg az α szögnek. Ha α tetszőleges (a nullaszögtől és egyenes-szögtől különböző) szög, akkor a 229. tétel szerint van olyan n pozitív egész szám, melyre a derékszög 2^n -edrésze kisebb mint α , és kisebb mint α mellékszöge; ezért az értelmezés szerint $0 < \theta(\alpha) < 1$. Ha az α'' szög az α és α' szögek összege, akkor jelöljük minden n -nél φ_n -nel azt a legnagyobb egész számot, melyre a derékszög $\varphi_n/2^n$ -szerese (jelben $R \varphi_n/2^n$) kisebb mint α , vagy egyenlő α -val; jelöljük φ'_n -vel és φ''_n -vel az α' -re és az α'' -re vonatkozó megfelelő számokat. Az értelmezés szerint

$$R \frac{\varphi_n + \varphi'_n}{2^n} \leq \alpha + \alpha' < R \frac{\varphi_n + \varphi'_n + 2}{2^n} \quad \text{és} \quad R \frac{\varphi''_n}{2^n} \leq \alpha'' < R \frac{\varphi''_n + 1}{2^n};$$

ebből következik, hogy

$$\theta(\alpha) + \theta(\alpha') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n + \varphi'_n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi''_n}{2^{n+1}} = \theta(\alpha'').$$

Ha nem csak az ARCHIMEDESI, hanem a DEDEKIND-féle axiómát tesszük fel, akkor a szögekhez ilyen módon rendelt valós számok halmaza a $0 \leq \theta \leq 1$ valós számok összességével megegyezik.

Megjegyzés. Ha az egyenesen való koordináta meghatározásánál feltesszük az I, II, III csoportnak a síkra vonatkozó axiómáit is, akkor a szögekre vonatkozó fenti megfontoláshoz hasonló módon az egységszakasz ismételt felezésével származó pontokhoz diadikus törtszámokat rendelhetünk hozzá, s ezek alapján értelmezhetjük a többi pont koordinátáját. Ennél a tárgyalásnál azonban kétséges marad az, vajon csak az ARCHIMEDESI axióma, vagy ezenkívül a sík egybevágósági axiómái biztosítják-e az egyenesen a koordináták bevezetésének lehetőségét. Ezért választottuk a 226. tétel bebizonyításánál alkalmazott (elemi) módszert.

Az ARCHIMEDESI axioma alapján bebizonyítjuk a következő tételt, mely egy a 24. §-ban (145. o.) nyíltan hagyott kérdést intéz el:

Ha A és B az O középponttal bíró k kör külsejében fekvő pontok, akkor van olyan a k kör külsejében fekvő törtvonal, mely összeköti az A és B pontokat.

Megmutatjuk előbb, hogy alkamasan választott n -re van olyan 2^n -oldalú szabályos sokszög, melynek belsejében fekszik a k kör. Legyen A a kör külsejében fekvő pont; az OA egyenesre az A pontban merőleget állítunk, ennek valamely az A -tól különböző pontját C -vel jelöljük. A 229. tétel folytán van olyan n pozitív egész szám, melyre a derékszög 2^{n-1} -edrészze kisebb mint a $\sphericalangle COA$ szög; van tehát az AC szakaszon egy olyan A_1 pont, melyre $\sphericalangle A_1OA$ egyenlő a derékszög 2^{n-1} -edrészével (98. és 37. tétel). Az AA_1 szakasz a k kör külsejében fekszik (115. tétel). Jelöljük A_2 -vel az A_1 pontnak az OA egyenesre vonatkozó tükrképét, és $A_1, A_2, \dots, A_n$ -vel az A_1 pontnak az O pont körül $\sphericalangle A_1OA_2$ szöggel való forgásnál s ennek hatványainál származó képeit ($\nu=2^n$). Az $A_1A_2\dots A_n$ szabályos sokszög középpontja, O , a sokszög belsejében fekszik; mivel a sokszög minden P pontja a k körnek külsejében fekszik, s így az OP szakaszon van a k körnek pontja, tehát a k kör a sokszög belsejében fekszik.

Legyen B a kör külsejének tetszőleges más pontja; az $\vec{OB}$ télsugárnak van az $A_1A_2\dots A_n$ sokszöggel egy B_0 közös pontja; a BB_0 szakasz és a sokszögnek az A és B_0 pontok által meghatározott egyik törtvonala együtt olyan törtvonalat alkotnak, mely az A és B pontokat a k kör külsejében összeköti.

Ha feltesszük a párhuzamossági axiómát, akkor a fenti tétel az ARCHIMEDES-féle axioma nélkül is könnyen bebizonyítható.

Az V. c axiómából következik, hogy a kör belsején áthaladó bármely a egyenesnek van a k körrel legalább egy (s ezért két) közös pontja. Jelöljük A -val a k kör O középpontjából az a -ra bocsátott merőlegesnek a talppontját, és P -vel a -nak egyik olyan pontját, melyre az AP szakasz egyenlő a k kör sugarával; a 122. tétel szerint a P pont a k kör külsejéhez tartozik. Az AP szakasznak a k kör belsejéhez, illetve a k külsejéhez tartozó pontjai két olyan osztályt alkotnak, melyek a 115. tétel folytán kielégítik a szeletalkotásra vonatkozó feltételeket (l. 265. o.); az V. c axiómából következik, hogy van az AP szakasznak egy olyan pontja, mely

ezt a szeletalkotást meghatározza, s ez a pont szükségképen a k körnek pontja, mint a 113. tétel alkalmazásával könnyen belátható.

A k kör valamely P pontjának a k körön való környezetén értjük a körnek bármely a P pontot tartalmazó AB ívét (az A, B pontok nem tartoznak az illető környezethez).

Ha feltesszük az V. c DEDEKIND-féle axiomát, abból a 222. tétel alapján következik, hogy a kör pontjainak halmaza összefüggő. Ebből hasonló megfontolással, mint fent egyenes esetén, következik, hogy ha egy k' körnek van a k kör belsejében és külsejében legalább egy-egy pontja, akkor van k -nak és k' -nek legalább egy (s ezéri két) közös pontja; tehát az átmenetileg felvett III. k axioma (l. 145. o.) levezethető az V. c axiomából.

A k körnek a félkörívnél kisebb AB és $A'B'$ köríveit egymással egyenlőnek nevezzük, ha az $\sphericalangle AOB$ és az $\sphericalangle A'OB'$ középponti szögek egyenlők. A 104. és a 106. tételből következik, hogy ha a k kör AB és $A'B'$ ívei egyenlők, akkor az AB és az $A'B'$ húrok is egyenlők, és megfordítva.

Megjegyzés. Körívek egyenlőségét itt nem a körívek „hosszúságával” értelmeztük; ha majd bevezetjük körívek hosszúságának a fogalmát, be kell bizonyítanunk azt a tételt, hogy egyenlő középponti szögekhez tartozó körívek hosszúsága egyenlő.

A 230. tétel alapján a körön koordinátát értelmezhetünk következőképen. Legyen AA' a k kör valamely átmérője; az A ponthoz a $\theta = 0$, az A' -höz a $\theta = 1$ értéket rendeljük hozzá; az A, A' pontok által meghatározott egyik félkörív pontjaihoz pozitív, a másiknak a pontjaihoz negatív előjellel hozzárendeljük minden P ponthoz azt a θ számértéket, mely a 230. tétel értelmében a $\sphericalangle POA$ középponti szöghöz tartozik. Ha feltesszük a DEDEKIND-féle axiomát, akkor a kör pontjaihoz rendelt θ számértékek halmaza a $-1 < \theta \leq 1$ számközhez tartozó valós számok összességével azonos. Ebben az esetben a körnek azok a pontjai, melyek a $0, 2/n, 4/n, \dots, -2/n, -4/n, \dots$ számértékeknek felelnek meg, egy n -oldalú szabályos sokszögnek a csúcsai ($n \geq 3$).

Az egybevágósági axiomák alapján síkbeli, illetve térbeli környezeteket következőképen értelmeztünk: az α síkban fekvő P pontnak a síkra vonatkozó környezetén értjük minden olyan az α síkban fekvő körnek a belsejét, melynek középpontja a P pont; a P pont térbeli környezetén értjük minden a P középponttal bíró

gömbnek a belsejét (ennek megfelelően a P pontnak az egyenesen való környezetén olyan szakaszt értünk, melynek P a középpontja).

A 41. §-ban értelmezett és a most bevezetett *környezetek rendszere $aequivalens$* abban az értelemben, hogy (például a sík esetére) a P pont minden köralakú környezetéhez megadható a P pontnak egy háromszögalakú környezete, mely annak részhalmaza és megfordítva.

A síkra vonatkozó 22. tétel következő kiegészítését kapjuk az V. c axiómából:

Egy egyszerű sokszög a síkot két részre osztja abban az értelemben, hogy minden olyan a síkban fekvő összefüggő M pont-halmaznak, melynek van a sokszög belsejében és külsejében legalább egy-egy pontja, van a sokszöggel közös pontja. Az egyszerű sokszög belseje és külseje egy-egy tartomány, azaz összefüggő, és egy tetszőleges pontjával együtt annak valamely környezete is a sokszög belsejéhez, illetve külsejéhez tartozik.

A 29. oldalon levő Megjegyzés értelmében megadható bármely a sokszög belsejében fekvő pontnak egy a sokszög belsejéhez tartozó környezete. A 22. tétel szerint bármely két a sokszög belsejében fekvő pont összeköthető a sokszög belsejében fekvő törtvonallal; ebből következik, mivel az V. c axióma folytán minden törtvonal összefüggő, hogy a sokszög belseje (s hasonló megfontolás szerint a sokszög külseje) összefüggő, tehát tartomány. — A tétel első állítását következőképpen igazoljuk. Az M halmaznak a sokszög belsejéhez illetve a sokszög külsejéhez tartozó pontjai az M halmaznak két olyan N_1 és N_2 részhalmazát adják, hogy egyik részhalmaznak sincs a másikhoz tartozó sűrűsödési pontja; mivel az M halmaz összefüggő, tehát M -nek van olyan pontja, mely nem tartozik sem N_1 -hez, sem N_2 -höz; ez a pont az adott sokszögön fekszik.

Hasonlóan egészíthető ki a térre vonatkozó 64. tétel.

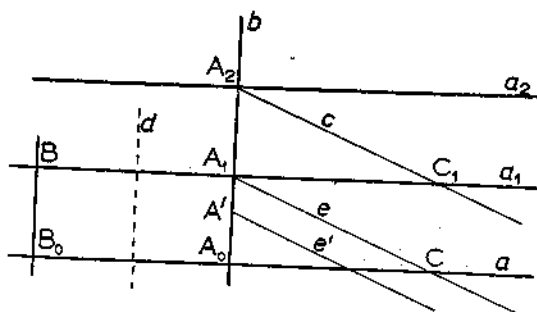
Az V. c axiómából levezethetők a síkra és a térre vonatkozó *folytonossági tételek*; csak a síkra vonatkozóan fogjuk kimondani ezeket, abból nyilvánvaló a térre vonatkozó megfogalmazásuk. A BOLZANO—WEIERSTRASS féle tétel a következő: Ha egy végtelen (azaz végtelen sok pontból álló) ponthalmaz összes pontjai a k körnek (vagy a π egyszerű sokszögnek) a belsejéhez tartoznak, akkor van a halmaznak legalább egy olyan sűrűsödési pontja, mely a k kör belsejéhez, vagy a k körhöz (illetve π belsejéhez, vagy π -hez) tartozik; ennek a tételnek az egyenesre vonatkozó speciális

esete a 217. tétel. — A 218. tételnek, mely egymásban foglalt szakaszok sorozatának a közös pontjára vonatkozik, a síkban a következő tétel felel meg: Ha $k_1, k_2, \dots$ egymásban foglalt körök, azaz ha minden n -re a k_{n+1} kör a k_n kör belsejében fekszik, akkor van legalább egy olyan pont, mely minden n -re a k kör belsejéhez tartozik. — A 228. tételben kimondott CAUCHY-féle konvergencia-elv megfogalmazása csak annyiban módosul, hogy a $P_1, P_2, \dots$ pontokról azt tesszük fel, hogy egy síkban fekszenek. — Ezeknek a tételeknek a bebizonyításával itt nem foglalkozunk.

A folytonossági axiómáknak az euklidesi síkra és térre való alkalmazását illetően, jegyezzük meg először, hogy az V. d ARCHIMEDES-féle axioma alapján a párhuzamossági axiómát tovább redukálhatjuk, mégpedig, mint BALDUS és FORDER megmutatták, a IV* axiómát helyettesíthetjük a következő gyengébb feltétellel:

IV** Van legalább egy olyan a egyenes és legalább egy olyan A pont, hogy az A ponton legfeljebb egy az a -t nem metsző és az (a, A) síkban fekvő a' egyenes megy át.

A IV** axiómából az V. d axioma alapján a következő megfontolással vezetjük le a IV* axiómát. (A következő megfontolásban szereplő pontok és egyenesek az (a, A) síkban fekszenek.) Tegyük fel, hogy az a egyenesre és az $A = A_1$ pontra teljesül a IV** axióma; jelöljük b -vel az A_1 pontból az a -ra bocsátott merőlegest, és A_0 -val ennek a talppontját (163. ábra).



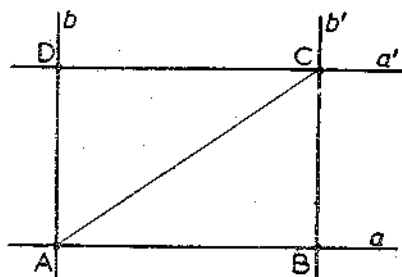
163. ábra.

ra). A 109. tétel folytán az A_1 ponton áthaladó és a -val párhuzamos a_1 egyenes merőleges b -re. Ha B az a_1 egyenes tetszőleges pontja, akkor B -nek az a egyenestől való távolsága egyenlő az A_0A_1 szakasszal. Bocsássunk ugyanis B -ből merőlegest a -ra, ennek B_0 talppontjától mérjük rá a B_0B félsugarra az A_0A_1 -gyel egyenlő B_0B_1 szakaszt; az A_0, B_0 pontpár d középvonalára vonatkozó tükrözésnél az a egyenes önmagába, és az A_1, B_1 pontok egymásba mennek át; mivel tehát d közös merőlegese a -nak és az A_1B_1 egyenesnek, ez a két egyenes

a 109. tétel szerint nem metszi egymást, s ezért **IV**** szerint A_1B_1 az A_1B egyenessel, és a B_1 pont a B ponttal azonos. A síknak az A_0B_0 szakasszal való eltolásánál az a egyenes önmagába megy át, és az A_1 pont képe a B pont; ebből következik, hogy a B ponton át is csak egy az a -val párhuzamos egyenes megy át, és ez az a_1 egyenes. — Ha A' az A_0A_1 szakasz valamely pontja, akkor az A' ponton is csak egy az a -val párhuzamos egyenes megy át; legyen ugyanis e' olyan az A' ponton átmenő egyenes, mely nem merőleges b -re, és legyen e az az A_1 ponton áthaladó egyenes, mely a b egyenest ez e' -vel egyenlő megfelelő szögben metszi. Feltetésünk folytán e metszi az a egyenest valamely C pontban, s a 109. tétel szerint e és e' nem metszik egymást; ezért a **II. 4** axioma szerint az e' egyenesnek van az A_0A_1C háromszög A_0C oldalával, tehát az a egyenessel közös pontja. — Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ az $A_0\vec{A}_1$ félsugárnak azok a pontjai, melyeknek elrendezése $A_1\vec{A}_2\dots A_n$, s melyekre $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$. Jelöljük a_2 -vel az A_2 pontban a b -re emelt merőleget; mivel a síknak az A_0A_1 szakasszal való eltolásánál az a egyenes a_1 -be és az A_1 pont A_2 -be megy át, tehát a_2 az egyetlen az A_2 ponton átmenő, és a_1 -gyel párhuzamos egyenes. Ha c valamely az a_2 -től különböző, az A_2 ponton átmenő egyenes, akkor tehát c metszi az a_1 egyenest egy C_1 pontban, s mert a C_1 ponton átmenő egyenesek közül a_1 az egyetlen az a -val párhuzamos, tehát c metszi a -t is. Ebből következik, hogy az A_2 ponton át is csak egy az a -val párhuzamos egyenes megy át. Hasonlóan adódik a megfelelő állítás sorban az $A_3, A_4, \dots, A_n$ pontokra, s a fenti eredmény szerint az A_0A_n szakasz összes A' pontjaira. Mivel pedig, elegendő nagy n -re, az $A_0\vec{A}_1$ félsugár bármely A' pontja az A_0A_n szakaszhoz tartozik, tehát az $A_0\vec{A}_1$ félsugár bármely pontján csak egy az a -val párhuzamos egyenes megy át. — Ha p tetszőleges egyenes és P nem a p -n fekvő pont, akkor a sík kongruens leképezésével átvihetjük a p egyenest a -ba és a P pontot az $A_0\vec{A}_1$ félsugár valamely A' pontjába; előbbi eredményünkből következik tehát, hogy a P ponton át csak egy a p egyenessel párhuzamos egyenes megy át, vagyis a **IV*** axioma teljesül.

A párhuzamossági axioma helyett tegyük fel azt, hogy egy háromszög belső szögeinek az összege egyenlő két derékszöggel; a 183. tétel szerint akkor minden háromszög belső szögeinek az

összege egyenlő $2R$ -rel. A 183. tétel bebizonyítása szerint van két olyan a és a' egyenes, melynek két közös merőlegese van b és b' , s mint a 214. oldalon megjegyeztük, az (a, a') sereg minden egyenesre merőleges a (b, b') sereg bármely egyenesére. Jelöljük az $a, b; a, b'; a', b'; a', b$ egyenespárok közös pontját rendre A, B, C, D -vel (164. ábra); az $ABCD$ négyszög konvex és szemben



164. ábra.

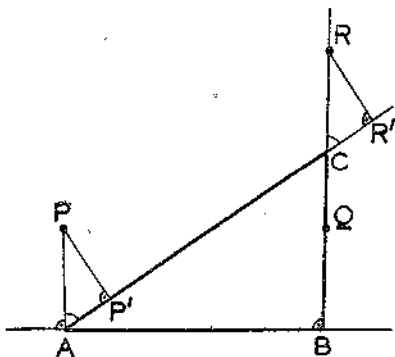
fekvő szögei egyenlők, s ezért a 156. oldalon bebizonyított tétel szerint szemben fekvő oldalai is egyenlők. Ha b' -t a (b, b') sereg tetszőleges más egyenesével helyettesítjük, következik ebből, hogy a és a' egymás aequidistans vonalai; ugyanúgy az (a, a') sereg bármely két egyenesre egymásnak aequidis-

tans vonala, s hasonlóan a (b, b') sereg bármely két egyenesre. A sík eltolásaira vonatkozó 126. tételből következik, hogy a síknak bármely az a egyenes mentén való eltolásánál az (a, a') sereg egyenesei önmagukba, s a 93. tétel szerint a (b, b') sereg egyenesei egymásba mennek át; hasonlóan, a b egyenes mentén való eltolásoknál a (b, b') sereg minden egyenesre önmagába, s az (a, a') sereg egyenesei egymásba mennek át. Az a egyenes mentén AB szakasszal való eltolás azonos az a' egyenes mentén DC szakasszal való eltolással; továbbá az AB és a BC szakasszal való eltolások szorzata azonos az AD és DC szakasszal való eltolások szorzatával; az előbbiek szerint tehát a síknak az AB és a BC szakasszal való T_{AB} és T_{BC} eltolásai egymással felcserélhetők. — Az AC egyenes a b és b' egyeneseket egyenlő váltószögekben metszi, mivel a $\sphericalangle DAC$ szög is, a $\sphericalangle BCA$ szög is egyenlő a $\sphericalangle DCA$ szög pótszögével. A síknak az AC szakasszal való T_{AC} eltolásánál tehát a b egyenes b' -be megy át, s így a T_{AC} eltolás azonos a T_{AB} és a T_{BC} eltolások szorzatával. Mivel a sík minden pontján átmegy az (a, a') és a (b, b') seregnek egy-egy egyenesre, a fenti megfontolásból következik, hogy a síknak minden eltolása előállítható mint egy az a mentén és egy a b mentén való eltolásnak a szorzata; az a (illetve a b) egyenes mentén való eltolások kommutatív csoportot alkotnak (126. tétel) s mint fent megjegyeztük, az a és a b mentén való eltolások felcserélhetők egymással. Ebből adódik a következő eredmény:

Ha feltesszük azt, hogy egy háromszögben a belső szögek összege egyenlő két derékszöggel, akkor a sík eltolásai kommutatív csoportot alkotnak.

Bebizonyítjuk ennek a tételnek a megfordítását:

Ha a sík eltolásai csoportot alkotnak, akkor bármely háromszögben a belső szögek összege egyenlő két derékszöggel. Ebben az esetben a sík bármely két A és C pontjához a síknak egy és csak egy olyan eltolása tartozik, mely az A pontot a C pontba viszi át. Tegyük fel, hogy az egymásra merőleges AB és BC szakaszokkal való T_{AB} és T_{BC} eltolások szorzata a síknak az AC szakasszal való T_{AC} eltolásával azonos. Az A pontban az AB -re emelt merőlegesen felveszünk egy P pontot, mely az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, mint C . Jelöljük Q -val P -nek a T_{AB} -nél, és R -rel Q -nak a T_{BC} -nél származó képét. A Q pont a BC félsugáron fekszik, és $AP = BQ$; az R pont a BC szakasznak C felől való meghosszabbításán fekszik, és $BQ = CR$ (165. ábra). Jelöljük rendre P' -vel és R' -vel a P , illetve az R pontból az AC egyenesre bocsátott merőlegesnek a talpontiát. Mivel feltevésünk szerint a T_{AC} eltolásnál a P pont R -be megy át, tehát P' az R' pontba megy át, s ezért az APP' és a CRR' háromszögek egybevágók;

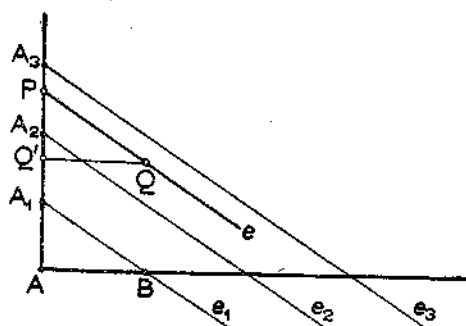


165. ábra.

ebből következik, hogy a $\sphericalangle PAP'$ szög egyenlő az $\sphericalangle RCR'$ szöggel, s mert az utóbbi csúcsszöge az $\sphericalangle ACB$ szögnek, $\sphericalangle PAP'$ pedig pótszöge a $\sphericalangle CAB$ szögnek, tehát az ABC derékszögű háromszög két hegyesszögének az összege egyenlő R -rel, s így a három belső szög összege egyenlő $2R$ -rel. Ebből a 183. tétel szerint következik, hogy minden háromszögben a belső szögek összege egyenlő $2R$ -rel, s fenti eredményünk szerint a sík eltolásai kommutatív csoportot alkotnak.

Az ARCHIMEDES-féle axioma alapján abból a feltételből, hogy egy háromszögben a belső szögek összege egyenlő két derékszöggel, következik a párhuzamossági axioma. Legyen ugyanis a és b két egymásra merőleges egyenes; ezeknek közös pontját jelöljük A -val. A b egyenes valamely P pontján átfektetünk egy tetszőleges

olyan e egyenest, mely nem merőleges b -re; megmutatjuk, hogy e -nek van a -val közös pontja. Az e egyenes valamely a P -től különböző Q pontjából merőlegest bocsátunk b -re, ennek a talp-pontját jelöljük Q' -vel (166. ábra). A síknak a $Q'A$ szakasszal



166. ábra.

való eltolásánál az e egyenes egy olyan e_1 egyenesbe megy át, mely a P ; illetve a Q pont képpontjában metszi a b illetve az a egyenest; jelöljük ezeket a pontokat rendre A_1 -gyel és B -vel. Jelöljük $A_1, A_2, \dots, A_n$ -nel az AA_1 szakasszal való eltolásnál, s ennek hatványainál származó

képeit, $e_2, e_3, \dots, e_n$ -nel az e_1 egyenes képeit. Az AA_1 szakasszal való eltolás fenti eredményünk szerint a BA_1 és az AB szakasszal való eltolások szorzata; ezek közül az elsőnél az e_1 egyenes önmagába megy át; a másikonál az a egyenes megy át önmagába, s ezért az e_1 egyenes képe, e_2 , szintén metszi az a egyenest. Ugyanúgy adódik sorban, hogy az $e_3, \dots, e_n$ egyenesek közül mindegyik metszi az a egyenest. Mivel pedig elegendő nagy n -re, a P pont az AA_n szakaszhoz tartozik, tehát abból, hogy az e_n egyenes metszi a -t, és az e, e_n egyenesek b -vel egyenlő megfelelő szögeket zárnak be, a 109. tétel és a II. 4 axióma szerint következik, hogy e metszi a -t. Ezzel fenti állításunkat bebizonyítottuk.

DEHN mutatta meg, hogy az ARCHIMEDES-féle axióma nélkül abból a feltételből, hogy egy háromszögben a belső szögek összege egyenlő $2R$ -rel, nem vezethető le a párhuzamossági axióma. MOORE R. L. megmutatta, hogy ebben az esetben a pontok, egyenesek és síkok megadott rendszere ezeknek alapján értelmezett ideális pontok, egyenesek és síkok hozzáfűzésével olyan módon bővíthető, hogy a kibővített geometriában érvényes a párhuzamossági axióma is (de ez ARCHIMEDES-féle nem szükségképpen).

Ha az I—III axiómákon kívül feltesszük a párhuzamosság axiómáját (például a fenti IV** alakban), és az V. d ARCHIMEDES-féle axiómát, akkor a nem irányított szakaszok koordinátáit a következő eljárással határozhatjuk meg. Felveszünk egy egységszakaszt, és

minden m, n pozitív egész számra az egységszakasz n -edrészéhez az $1/n$, s ennek az m -szereséhez az m/n számértéket rendeljük hozzá mint koordinátát. Ha a olyan szakasz, melynek a fenti előírás szerint nem felel meg valamely m/n racionális szám, akkor azok a pozitív racionális számok, melyek a -nál kisebb, illetve a -nál nagyobb szakaszoknak felelnek meg, a pozitív racionális számok összességében két osztályt alkotnak; a szeletalkotást meghatározó valós számot feleltetjük meg az a szakasznak mint koordinátát; ezt a számot ugyancsak a -val jelöljük. A 198. és a 199. tétel alapján következik, hogy az a és b szakaszok ab szorzatához rendelt koordináta egyenlő az a és a b szakasz koordinátájának a szorzatával (vegyük ugyanis sorban azt az esetet, hogy b egész, racionális, illetve tetszőleges valós szám).

Ennek az eredménynek az alapján a 36. és 38. §. tárgyalásaiból következik, hogy a sík és a tér pontjait valós számpárokkal, illetve számhármasokkal fejezhetjük ki úgy, hogy a síkban az egyenesnek, és a térben a síknak az egyenlete lineáris (numerikus) egyenlet, s hogy bármely két pont távolságának a négyzete egyenlő a megfelelő koordináták különbségének a négyzetösszegével. A PYTHAGORAS-féle tételből következik, hogy ha a valamely szakasz koordinátája, akkor van olyan szakasz, melynek koordinátája $\sqrt{1+a^2}$.

Ha ebben a tárgyalásban az ARCHIMEDES-féle axioma helyett az V. c DEDEKIND-féle axiómát tesszük fel, abból következik, hogy a síkban minden (x, y) valós számpárnak, és a térben minden valós (x, y, z) számhármasnak megfelel egy ezekkel a koordinátákkal bíró pont. Ebben az esetben a sík- és a térgeometria, melyet az I–IV, V. c axiómák alapján meghatároztunk, megegyezik a DESCARTES-féle analitikus sík-, illetve térgeometriával. A fenti tárgyalás elvezetett tehát az axiomatikusan értelmezett geometriának egy analitikus megvalósításához, vagy modelljéhez: a DESCARTES-féle analitikus geometriához.

44. §. A tér folytonos mozgásai.

Feltesszük az I, II, III és V. c axiómákat.

Az értelmezésekből közvetlenül következik, hogy az egyenesnek, a síknak és a térnek minden kongruens leképezése folytonos. Például a térnek egy kongruens leképezésénél a tér valamely P pontja körül felvett gömb belseje átmegy a P' képpont körül

ugyanakkora sugárral felveit gömb belsejébe, tehát a P pont alkalmas környezete a P' pontnak egy tetszőleges környezetébe; ezért a leképezés folytonos (l. az értelmezést a 269. oldalon).

Legyen (T_λ) a tér önmagára való kölcsönösen egyértelmű és folytonos leképezéseinek olyan összessége, hogy minden λ valós számnak (vagy λ paraméternek) megfelel egy T_λ leképezés, s minden λ paraméterértékre nézve teljesül a következő feltétel: ha a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ paraméterértékek sorozata konvergál λ -hoz, akkor a $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \dots$ leképezések konvergálnak a T_λ leképezéshez, azaz a tér bármely P pontjának a $T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \dots$ leképezéseknél származó képei konvergálnak a P pontnak a T_λ leképezésnél származó képéhez. A (T_λ) leképezések összességét *folytonos deformációnak* nevezzük; bármely két hozzátartozó T_λ és $T_{\lambda'}$ leképezésről azt mondjuk, hogy folytonos deformációval vihetők át egymásba.

Egy az analízis elemeiből ismert megfontolással látható be, hogy ha P valamely pont és λ egy tetszőleges paraméterérték, akkor a $P' = T_\lambda(P)$ pont bármely $K_{P'}$ környezetéhez megadható egy olyan ε pozitív szám, hogy ha $\lambda - \varepsilon < \lambda' < \lambda + \varepsilon$, akkor a $T_{\lambda'}(P)$ pont a $K_{P'}$ környezetéhez tartozik.

A tér folytonos mozgásán olyan folytonos deformációt értünk, melynek minden eleme a térnek egy kongruens leképezése, s amelyhez hozzátartozik a tér azonos leképezése; az ehhez tartozó leképezésekről azt mondjuk, hogy folytonos mozgással érhetők el az azonosságból.

Ha a tér valamely T kongruens leképezése folytonos mozgással érhető el az azonosságból, akkor T megtartja a tér irányítottsát (vagyis T a térnek egy mozgása a 28. §-ban adott értelmezés szerint). (Legyen (T_λ) olyan folytonos mozgás, melyhez hozzátartozik az adott $T = T_\lambda$ és (például a $\lambda = 0$ -nak megfelelő) T_0 azonos leképezés. Felveszünk a térben négy tetszőleges nem egy síkban fekvő A_0, B_0, C_0, D_0 pontot; jelöljük ezeknek a T_λ leképezésnél származó képét rendre A, B, C, D -vel. Felveszünk ezek körül egy-egy olyan K_A, K_B, K_C, K_D környezetet, hogy ha azoknak egy-egy tetszőleges pontja A', B', C', D' , akkor az A', B', C', D' pontok nem tartoznak egy síkhoz (225. tétel). Legyen ε olyan pozitív szám, hogy egy tetszőleges a λ -tól ε -nál kevesebbel különböző λ' paraméterértéknél rendre a K_A, K_B, K_C, K_D környezetbe tartoznak a $T_{\lambda'}(A_0), T_{\lambda'}(B_0), T_{\lambda'}(C_0), T_{\lambda'}(D_0)$ pontok. Jelöljük ezeket a pontokat A', B', C', D' -vel. A D és D' pontok az ABC síknak ugyanazon az oldalán fekszenek;

ellenkező esetben volna ugyanis a DD' szakasznak, tehát a K_D környezetnek olyan pontja, mely az ABC síkhoz tartozik, ellentétben a K környezetek megválasztásával. A 183. oldalon bebizonyított tétel szerint tehát az $(ABCD)$ és az $(ABCD')$ térirányítások megegyezők. Hasonló megfontolás szerint az ABD' síknak ugyanazon az oldalán fekszenek a C és C' pontok, s ezért megegyezők az $(ABCD')$ és az $(ABC'D')$ térirányítások; ugyanígy adódik, hogy az utóbbival megegyező az $(AB'C'D')$, s ezzel az $(A'B'C'D')$ térirányítás. Ebből következik, hogy $(ABCD)$ és $(A'B'C'D')$ is megegyező térirányítások; tehát azok a T_λ leképezések, melyeknek paraméterértéke a $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ számközhez tartozik, vagy valamennyien megtartják, vagy valamennyien megfordítják a tér irányítását. Ha valamely λ_0 paraméterértéknek az irányítást megfordító T_{λ_0} leképezés felelne meg, akkor a $(0, \lambda_0)$ számközben a következő szeletalkotást értelmezzük: az A osztályhoz tartozik a λ_1 paraméterérték akkor és csak akkor, ha az összes $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ értékekre a T_λ leképezés megtartja a tér irányítását; a B osztályhoz akkor tartozik egy λ_2 érték, ha van olyan λ paraméterérték a $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$ számközben, melyre T_λ megfordítja a tér irányítását. A szeletalkotásnak megfelelő λ érték minden környezetében volna tehát olyan λ_1 paraméterérték is, melyre T_{λ_1} megtartja, s olyan λ_2 is, melyre T_{λ_2} megfordítja a tér irányítását. Ez azonban ellentmond fenti eredményünknek. Ebből következik, hogy folytonos mozgással az azonosságból elérhető leképezéseknél a tér irányítása megmarad.

A fenti tétel megfordítása a következő:

A tér minden mozgása (azaz minden az irányítást megtartó kongruens leképezése) folytonos mozgással érhető el az azonosságból.

Nyilvánvaló ez az állítás a térnek egy egyenes mentén való eltolásaira, melyeknek összessége folytonos mozgás, s ugyanúgy a térnek egy tengelye körül való forgásaira. Mivel a tér minden mozgása előállítható egy eltolás és egy forgás szorzataként (l. 178. tétel), ebből a két speciális esetből következik fenti állításunk.

Egy egyenes minden irányított szakaszának feleltessünk meg (a 226. tétel szerint) egy a koordinátát, s ezt rendeljük hozzá mint paramétert az a szakasszal való T_a eltoláshoz. Ezáltal a valós számok összességének kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon feleltettük meg az illető egyenes mentén való eltolások csoportját; a folytonosság úgy értendő, mint a deformációk értelmezésénél: ha az $a_1, a_2, \dots$ paraméterértékek a -hoz, akkor a megfelelő T_{a_i} ,

$T_{\alpha}, \dots$ leképezések a T_{α} leképezéshez konvergálnak. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az egyenes mentén való eltolások egy valós paramétertől függő, azaz *egytagú folytonos nyílt csoportot* alkotnak.

A tér egy egyenesre körül való forgásainak hasonlóan megfeleltethetjük (a 230. tétel alapján) a θ valós számértékeket ($-1 < \theta \leq 1$) kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon, mégpedig úgy, hogy ha a θ paraméterérték -1 -hez, akkor a θ -nak megfelelő leképezés a $+1$ -nek megfelelő leképezéshez konvergál. A térnek egy egyenesre körül való forgáscsoportjáról azt mondjuk, hogy *egytagú folytonos zárt csoport*.

Az euklidesi tér valamely S csavarmozgását állítsuk elő mint a tengelye körül való R_{θ} forgásnak és a tengelye irányában való T_{α} eltolásnak a szorzatát. Tekintsük a λ valós paraméter minden értékénél az $R_{\lambda\theta} T_{\lambda\alpha}$ csavarmozgást (ha $\lambda\theta$ nem tartozik a $-1 < \theta' \leq 1$ számközhöz, helyettesítjük mod 2 ennek a számköznek megfelelő számával). Mivel az ugyanarra a tengelyre vonatkozó eltolások és csavarmozgások felcserélhetők (169. tétel), tehát az $R_{\lambda\theta} T_{\lambda\alpha}$ csavarmozgások összessége egytagú folytonos nyílt csoportot alkot. Ezt az eredményünket a következő tételben mondjuk ki:

Az euklidesi tér bármely mozgása hozzátartozik az euklidesi tér összes mozgásaiból álló csoportnak valamely egytagú folytonos alcsoportjához (esetleg több ilyen alcsoportoz is).

Az egyenes és a sík mozgásaira vonatkozó megfelelő tételek a fentiekhez hasonló, de egyszerűbb megfontolásokkal bizonyíthatók be; ezeket az olvasóra bízuk.

45. §. Az axiomarendszer áttekintése.

A Bevezetésben előadott általános elvek szempontjából tárgyalásunk elvi eredményeit a következőben foglaljuk össze.

Az alapul vett axiomarendszer *ellenmondástól mentes*, mivel létezik egy analitikus megvalósítása (vagy modellje) t. i. a DESCARTES-féle analitikus geometria.

Az axiomarendszer *teljes* (vagy *kategorikus*); ezt következőképpen látjuk be. Axiomáink alapján koordinátákat értelmeztünk; ezeket a koordinátákat egyértelműen meghatározza a tengelyrendszer és az egységszakasz megválasztása. Ha az axiomarendszer alapján értelmezett geometriában két különböző módon vezetünk be koordinátákat, akkor e között a két modell között egy izomorf

vonatkozást azáltal létesíthetünk, hogy a megegyező koordinátájú pontokat egymásnak feleltetjük meg; ezáltal az egyik modell egyeneseinek és síkjainak megfelelnek a másik modell egyenesei és síkjai, s az összetartozási, rendezési és egybevágósági vonatkozások megmaradnak.

Az *axiómák függetlenségére* vonatkozóan csak néhány fontosabb esetet említünk meg. Ha valamely A axiómának a $B, C, \dots$ axiómáktól való függetlenségét akarjuk igazolni, erre ismét az analitikus módszert használjuk fel; szerkesztünk egy olyan analitikus modellt, melyben a $B, C, \dots$ axiómák teljesülnek, de A nem. Mint már a Bevezetésben megemlítettük, a felvett, lényegében HILBERT-től származó axiómarendszerben nem törekedhettünk teljes függetlenségre.

Az I axiómacsoport axiómái szolgálnak a többi axiómák alapjául, s így ezeknek a továbbiaktól való függetlenségét nem vizsgáljuk.

A II csoport lineáris axiómái közül a II. 1, 2, a, b axiómákat felvéve a II. 3 és a II. c axiómák közül egyik sem következik a másiktól. Például a $0 \leq x \leq 1$ valós számok (mint „pontok”) halmazára, ha a pontok elrendezését a megfelelő x számértékek természetes, azaz nagyság szerint való elrendezésével megegyezőnek vesszük fel, teljesül II. 1, 2, a, b, c, de II. 3 nem; az ($x \leq 0, x \geq 1$) számok halmazára teljesül II. 1, 2, 3, a, b, de II. c nem.

Az I csoport sík-axiómáiból és a II csoport lineáris axiómáiból nem vezethető le a II. 4 sík-axióma. Legyen például a sík az (x, y) valós számpárok összessége, kivéve a $(0, 1)$ számpárt. Legyen $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (0, 0)$; az $y = 1$ egyenes nem halad át az A, B, C pontok közül egyikén sem, metszi az ABC háromszög AB oldalát, de sem az AC , sem a BC oldallal nincs közös pontja.

Az I, II csoport lineáris axiómái és a III. 1, 3 axiómák teljesülnek, de a III. 2 nem teljesül a következő két példában. Az elsőben egy adott szakaszt nem lehet lemérni egy adott pont bármelyik oldalán: az ($x < 0, x \geq 1$) számok halmazában távolságon értjük az $|x - x'|$ értéket; az $(1, 2)$ szakasszal egyenlő szakaszt nem mérhetünk rá az egyenesre az 1 pontnak azon az oldalán, melyen a -1 pont fekszik. A második példa, melyben egy szakaszt egy pontnak bármely oldalán többféleképpen mérhetünk rá az egyenesre: a valós számok összessége, hol az x és x' pontok

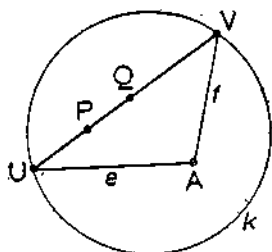
távolságán értjük az $|x - x'|$ számnak a benne foglalt legnagyobb egész számtól való különbségét; eszerint a $(0, 1)$, $(0, 2)$ szakaszok egyenlők.

Az I, II csoport sík-axiomáiból és a III. 1, 2, 3 axiomákból nem következik III. 4. A III. 1—3 lineáris axiomáknak eleget tehetünk úgy is, hogy az (x, y) DESCARTES-féle síkban minden iránynak megfelelően más-más egységszakaszt veszünk fel. Az első példában, legyen a sík az (x, y) valós számpárok összessége; felvesszünk két A és B pontot, továbbá az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán két C és C' pontot, úgyhogy az A, B, C, C' pontok közül bármely három ne tartozzék egy egyeneshez; az AC' , BC' egyeneseken (s ugyancsak az ezekkel párhuzamos egyeneseken) az egységszakaszokat úgy választjuk meg, hogy az AC' szakasznak ebben az egységben mért nagysága az AC szakasz valódi nagyságával egyenlő legyen, s ugyanúgy a BC' szakasznak a megváltoztatott egységben mért nagysága egyenlő legyen a BC szakasz valódi nagyságával. A többi irányban a távolságokat valódi nagyságukkal mérjük. Ebben a modellben az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van két olyan különböző C és C' pont, melyekre $ABC \equiv ABC'$. — A második példában felvesszünk az AB egyenes különböző oldalán két C és C' pontot, melyek az AB egyenesre vonatkozóan egymásnak tükörképei s melyekre $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B = R$; legyen például $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ és $C' = (0, -1)$. Az AC' és a BC' egyeneseken s a velük párhuzamos egyeneseken az egységszakaszokat tetszés szerint megváltoztatjuk, de a többi irányoknak megfelelő egységszakaszt nem változtatjuk. Az AB egyenesnek a C' pontot tartalmazó oldalán nincs olyan D pont, melyre az értelmezett távolságmérésnek megfelelően $ABC \equiv ABD$.

A III. 3 és 5 axiomák függetlenségével az axiomarendszer redukciójával kapcsolatban fogunk általánosan foglalkozni (a második kötetben).

A IV párhuzamossági axioma független az I, II, III, V axiomacsoportok összes axiomáitól; ezt a BOLYAI—LOBACHEFSZKIJ-féle geometriának következő KLEIN—POINCARÉ-féle modelljén láthatjuk be, melyet egyszerűség kedvéért csupán a sík esetére vonatkozóan ismertetünk. Az (x, y) DESCARTES-féle síkban az $O = (0, 0)$ pont körül egységsugárral felvett k kör belsejét nevezzük síknak; a k kör belsejében fekvő pontok a sík pontjai, és a k kör húrjai az egyenesek. Két a kör belsejében fekvő P és Q pont hiperbolikus

távolságát következőképpen értelmezzük: jelöljük U -val és V -vel a P , Q pontokon átfektetett (analitikus) egyenesnek a k körrel való két metszéspontját úgy, hogy az $UPQV$ elrendezés álljon fenn (167. ábra); a P , Q , V , U pontok kettősvisszonya értelmezés szerint a PU , QU , PV , QV szakaszokból képezett következő kifejezés:



167. ábra.

$$\frac{PV}{QV} : \frac{PU}{QU} = \frac{PV \cdot QU}{QV \cdot PU};$$

ennek a (valós) logaritmusát nevezzük a P , Q pontok *hiperbolikus távolságának*. Az I csoport sík-axiómái és a II, III, IV csoportok összes axiómái teljesülnek. A IV axioma nem teljesül; ha A egy tetszőleges nem a PQ egyenesen fekvő pont, az $e = \vec{AU}$ és az $f = \vec{AV}$ félsugarak, melyek nem tartoznak egy egyeneshez, elválasztják az A ponton áthaladó egyenesek közül a PQ egyenest metsző egyeneseket a PQ egyenest nem metsző egyenesektől (I. 274. o.). A IV axiómától független, ú. n. *nem-euklidesi geometriák*-kal részletesen fogunk foglalkozni a második kötetben.

A folytonossági axiómák függetlenségére vonatkozóan a következőket jegyezzük meg.

Az I, II csoportok lineáris axiómáitól és az V. a (összefüggési) axiómától független a szeparabilitásra vonatkozó V. b axioma. Az (x, y) DESCARTES-féle síkban az egyenes pontjain értjük mindazokat az (x, y) pontokat, melyeknek koordinátái eleget tesznek a $0 < x \leq 1$, $0 < y < 1$ egyenlőtlenségeknek. A lineáris rendezést ezen a halmazon következőképpen értelmezzük; ha (x, y) és (x', y') két tetszőleges pont, ezekre az $(x, y) \subset (x', y')$ lineáris irányítást írjuk elő, ha $y < y'$, vagy ha $y = y'$ és $x < x'$. Ha az (x, y) , (x', y') , (x'', y'') pontokra fennáll az $(x, y) \subset (x', y')$ és az $(x', y') \subset (x'', y'')$ vonatkozás, akkor azt mondjuk, hogy az (x', y') pont az (x, y) és (x'', y'') pontok között (s ugyancsak (x', y'') és (x, y) között) fekszik. Mint könnyen belátható, a lineáris rendezés axiómái teljesülnek, s ugyanúgy az V. a axioma. De nem teljesül az V. b axioma, mivel az V. b axiómából következik, hogy az egyenes olyan szakaszainak a halmaza, melyek közül kettő-kettőnek nincs közös pontja, megszámlálható; a most értelmezett modellen pedig a különböző y értékeknek $(0 < y < 1)$ megfelelő $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ szakaszok, melyek

közül kettő-kettőnek nincs közös pontja, nem megszámlálható halmazt képeznek (I. 219. tétel).

Az I, II, III csoportok lineáris axiómáitól és az V. b axiómától független az V. d ARCHIMEDES-féle axióma; ezt a következő, VERONESÉ-től származó modellen láthatjuk be. Egyenesen értjük az (x, y) sík ama pontjainak a halmazát, melyekre $y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ és x tetszőleges. A lineáris rendezésre, illetve irányításra a következő előírást adjuk meg: $(x, y) \subset (x', y')$, ha $y < y'$, vagy ha $y = y'$ és $x < x'$. Ha (x, y) , (x', y') , (x_1, y_1) , (x'_1, y'_1) valamely négy pont, az (x, y) és (x', y') pontok által meghatározott szakaszt akkor mondjuk egyenlőnek az (x_1, y_1) és (x'_1, y'_1) pontok által meghatározott szakasszal, ha $x' - x = x'_1 - x_1$ és $y' - y = y'_1 - y_1$. A racionális x értékeknek megfelelő (x, y) pontok az egyenesen mindenütt sűrű megszámlálható halmazt képeznek. Az ARCHIMEDES-féle axióma nem teljesül, mert ha $(x, 0)$, (x', y') , (x'', y'') , $\dots$, (x^n, y^n) , $\dots$ olyan pontok, hogy bármely két egymásra következő által meghatározott szakasz egyenlő az $(x, 0)$, $(x', 0)$ pontok által meghatározott szakasszal, akkor a fenti értelmezés szerint, minden n -re $y^n = 0$, s ezért az $(x, 0)$, (x^n, y^n) szakasz nem tartalmazhatja például az $(x, 1)$ pontot.

Ugyancsak független az ARCHIMEDES-féle axióma az I—IV csoportok összes axiómáitól; erre HILBERT adott egy analitikus modellt (nem-archimedeszi geometria), melyet itt nem ismertetünk. De vissza fogunk térni erre a kérdésre a projektív geometriával kapcsolatban.

Az I, II, III, IV csoportok összes axiómáitól és az V. d ARCHIMEDES-féle axiómától független az V. c DEDEKIND-féle axióma (tehát az összefüggésre vonatkozó V. a axióma is). Ennek igazolására HILBERT a következő modellt vezette be. Képezzük az egész számokból a racionális műveletekkel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és az $f(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2}$ művelettel kapható összes számokat; ezeknek az összességét Ω -val jelöljük. A térnek azok az (x, y, z) pontjai, melyeknek koordinátái Ω -hoz tartoznak, eleget tesznek az I—IV és V. d axiómáknak, de az V. c axiómának nem. Ugyanis, mint könnyen beláthatjuk az Ω halmaz megszámlálható, s ezért az egyenesen fekvő pontok összessége is megszámlálható. Viszont, ha az V. c axióma teljesül, akkor az egyenes pontjainak összessége nem megszámlálható halmaz (219. tétel).

HILBERT a geometria alapjairól írt művének első kiadásában a folytonossági axiómák közül csak az ARCHIMEDES-féle axiómát vezette be, s csak későbbben vette hozzá a következő „teljességi axiómát” :

Az egyenes pontjai olyan összességet alkotnak, mely az I, II, III csoportok összes lineáris axiómáinak és az ARCHIMEDESI axiómáinak érvényben tartása mellett tovább nem bővíthető, vagyis nem lehet az egyenes pontjaihoz más „az egyenesen fekvő” pontokat hozzáfűzni úgy, hogy az összes nevezett axiómák teljesüljenek.

Ez az axióma lényegesen más természetű mint az előbbiek. Az a tény, hogy ennek az axiómának a szövegében az axiómarendszernek más axiómái fel vannak sorolva, már óvatosságra int a teljességi axiómával szemben ; mint HILBERT maga megjegyezte, ellenmondást tartalmazna az axiómarendszer, ha a teljességi axióma szövegében mellőznők az V. d (ARCHIMEDES-féle) axióma felemlítését. Egy másik lényeges kifogás a teljességi axióma ellen az, hogy — ellentétben a többi axiómákkal, melyek az értelmezendő geometriai rendszerhez tartozó pontokra, egyenesekre és síkokra vonatkoznak — ez az axióma a rendszerhez tartozó, de az ahhoz nem tartozó pontokra is vonatkozik, s ezáltal megnyitja az utját a logikai paradoxonoknak. Ezt az utóbbi nehézséget elkerülhetjük azáltal, hogy az egyenes bővítéseit csak olyan ideális pontokra korlátozzuk, melyek az egyenes pontjainak halmaza, illetve ennek részhalmazai alapján értelmezhetők.

Irodalom.

- BAKER, H. F., Principles of Geometry, I—III. Cambridge, 1922.
- ENRIQUES, F., Fragen der Elementargeometrie, I—II. Berlin, 1923. (2. kiadás).
- FORDER, H. G., The Foundations of Euclidean Geometry. Cambridge, 1927.
- HALSTED, G. B., Rational Geometry. New York, 1907. (2. kiadás).
- HESSENBERG, G., Grundlagen der Geometrie. Berlin, Leipzig, 1930.
- HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1899. — (7. kiadás; 1930.)
- PASCH, M., Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, 1882. (2. kiadás; DEHN-nel közösen, 1926.)
- SCHUR, F., Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1909.
- SCHWAN, W., Elementare Geometrie, I. Die Ebene. Leipzig, 1929.
- VAHLEN, K. Th., Abstrakte Geometrie. Leipzig, 1905.
- VERONESE, G., Fondamenti di geometria a più dimensioni. Padova, 1891.
- ZACHARIAS, M., Elementargeometrie. Berlin, Leipzig, 1930.

SZEGEDI M. KÖZ. ÁLL. BARGÓS GÁBOR	
MATEMATIKA TANÁRI KÖNYVTÁRA	
BESZERZÉS: ÉV _____	
Lelt. sz. _____	Ért. _____ P.

Tárgymutató.

- aequidistans vonal 116
 — felület 188
 antiparallelák 236
 ARCHIMEDES (EUFOXUS)-i. axioma 276, 283
 axiómák 1, 2, 5, 6, 10, 72, 83, 107, 108, 145, 211, 264, 266, 276, 282, 288
 axiómarendszer áttekintése 296—301
 BOLZANO — WEIERSTRASS-i. tétel 267, 287
 BOLYAI — LOBACSEFSZKIJ-i. párhuzamosság 274
 — — — geometria 275, 298
 CAUCHY-i. konvergencia-elv 278, 281
 CEVA-i. tétel 243
 csavarmozgás 175, 256
 csoport 78; al- — 255; ciklikus 153, 209; diéder 208; egytagú 296; invariant al- — 255; hexaéder 208; kommutatív 80; mozgás- — 123, 184, 255—261; négyes- — 208; oktaéder 208; véges 153
 — feltételek 78—79
 DEDEKIND-i. axióma 266
 — — szeletalkotás 265
 DESARGUES-i. tétel 234, 236—239
 DESCARTES-i. analitikus geometria 293
 diéder 208
 dodekaéder 201, 259—261
 egybevágó 72, 74, 82, 97, 107
 — -sági axiómák 72, 83, 107—108
 — — tételek 97—98, 101, 104—105, 149, 153
 egyenes 1; egyenlete 248, egyenletrendszere 253, folytonossága 262—270, 276—282
 — -nyaláb 189—194, — -sereg 129—138
 eltolás 80—82, 115, 137, 174
 epiciklus 135
 episzféra 193—194
 EUKLIDES-i. párhuzamossági axióma 211—213, 288
 — -i sík és tér mozgáscsoportja 255—261
 EULER-i. poliéder-tétel 35, 63
 félsík-sor 47
 folytonos deformáció 294
 — -ság axiómái 264, 266, 276, 282
 forgás 118, 151, 187, 207
 — -i irány 116, 119, 172, 177.
 gömb 188, 195—197
 halmaz 262
 háromszög 10; egybevágó — -ek 97; 107—108; hasonló — — 231; szabályos — 149, 257
 — nevezetes pontjai és vonalai 139—142, 217—220
 — szögeinek összege 213—215, 291—292
 hexaéder 201, 204
 hiperbolikus geometria 275, 298; — távolság 299
 homolog pontok 126
 idom 74, 82, 167
 ikosaéder 201, 261
 irányítás 79, 116, 119—123, 176—184; ciklikus 116, 135, 172

KLEIN—POINCARÉ-f. modell 298
koordinátarendszer 245, 252; derék-
szögű 246, 252

kör 119, 135, 143, 144

— -axioma 145

— -ív 220

környezet 262, 263, 270, 286—287.

HAUSDORFF-f. — -axiomák 263

középvonal 88, 127

középsík 160

lap 48, 53

LEGENDRE-f. tétel 215

leképezés 77, 78, 86, 170, 171; foly-
tonos 269

MENELAUS-f. tétel 242

merőleges 89, 158

mozgás 123, 184; folytonos 294

nem-euklidesi geometria 275, 299

négyszög 17, centrális 156—157, húr-
— 225, szabályos 149

négyszög 217

oktaéder 201, 204

összetartozási axiómák és tételek 1
— 4

parallela-posztulátum 212

parallelogramma 215, 217

PASCAL (PAPPUS)-f. tétel 229, 233

párhuzamosság axiómái 211, 288

periodikus leképezés 150

poliéder 53; általános 66—67; egysze-
rű 53; konvex 54; szabályos 199
— 205

pont 1.

PYTHAGORAS-f. tétel 242

rendezés; ciklikus 41—44, 47, 135; li-
néáris 5—9; síkra vonatkozó 10
— 16; térre v. 45—53

sík 1; — egyenlete 254; — folytonos-
sága 270—276, 283—293

— -sor 47

sokszög 17; egyszerű 17; konvex 17;
középponti 154; szabályos 146,
148—149, 152—153, 258

sorozat limesze 281

sugársor 40

sűrűsödési hely 262

szakasz 8; — -ok egyenlősége 72
— 77; — középpontja 84; — -ok

összeadása 79—80, szorzása 239

— 243; arányos — -ok 26—239

— -koordináták 243—248, 252—255

szög 38, 40; — -ek egyenlősége 91
— 97, 107—114; él- — 200; lap- —
46, 163—167

tartomány 21, 35, 59, 287

távolság 104, 162

teljességi axióma 301

testszög 48, 52—53; konvex 49—51;
szabályos 197—198

tetraéder 53, 201, 204

tér folytonossága 275—276, 287—293

törtvonal 16, 17, 102

transzformálás 208, 255

tükrözés 81, 82, 87—88, 160, 172

vektor 244, 252

VERONESE-f. modell 300

vetület 34, 63, 161—162

vonaldarab 8

Axiómák.

Összetartozás: I. 1—7 (2. o.).

Rendezés: II. 1, 2, 3, a, b, c (5—6. o.), 4 (10. o.).

Egybevágóság: III. 1, 2, 3 (72. o.), 4, 5 (83. o.), a, b, c (107—108. o.),
k (145. o.).

Párhuzamosság: IV, IV* (211. o.), IV** (288. o.).

Folytonosság: V. a, b (264. o.), c (266. o.), d (276. o.), 1, 2 (282. o.).