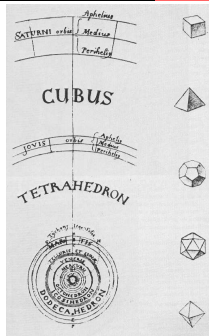


A KEPLER-TÖRVÉNYEK ELEMI LEVEZETÉSE

SZTE Bolyai Intézet, Geometria Tanszék
Kerékjártó Szeminárium
2016. november 17.

Nach geozentrischer Vorstellung sind durch „Sphären“ bestim-
te Bezeichnungen der vorhanden-
en Körper im neuen kopernika-
nischen Abstand der einzelnen
von ihm. Es war jedoch zunächst
nicht zu begründen, Johannes
Kopernikus und stellte in
„De revolutionibus“ ein Mo-
dell der Abstände der einzelnen
Planeten – platonischen Körper –
auf nach innen: Saturn,
Jupiter, Mars, Erde – son-
nen – Venus, Merkur, dann
die geringfügiger Körper
verursacht es sein Erfinden

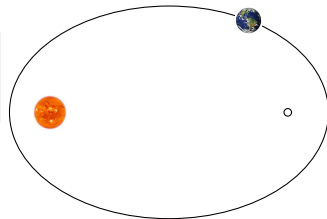


Test	Oktaéder	Ikozaéder	Dodekaéder	Tetraéder	Kocka
Bolygók	$\frac{\text{Merkúr}}{\text{Vénusz}}$	$\frac{\text{Vénusz}}{\text{Föld}}$	$\frac{\text{Föld}}{\text{Mars}}$	$\frac{\text{Mars}}{\text{Jupiter}}$	$\frac{\text{Jupiter}}{\text{Szaturnusz}}$
Arányok	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\varphi}{\sqrt{3}\xi}$	$\frac{\varphi}{\sqrt{3}\xi}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

ahol $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$, $\xi = \sqrt{5 - \sqrt{5}}/\sqrt{2} \approx 1.176$.

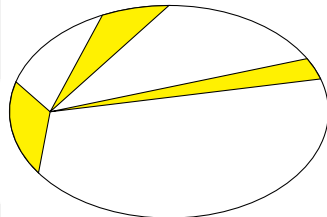
I. törvény (Astronomia nova, 1609)

A bolygók pályája ellipszis, melynek egyik fókuszpontjában a Nap áll.



II. törvény (Astronomia nova, 1609)

A bolygók vezérsugara azonos idő alatt azonos területet sűrol.



III. törvény (Harmonices mundi, 1619)

A bolygók Naptól való átlagos távolságainak köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idejük négyzetei.

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \dots = \text{állandó}$$

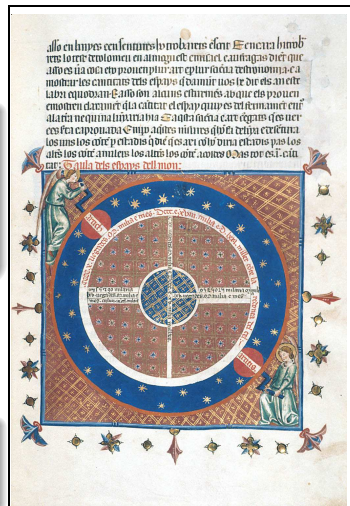
Kepler törvényei **empirikusak**, nem adnak magyarázatot a bolygómozgás okára.

Ez a 17. század gondolkodóinak komoly fejtörést jelentett. Sok kérdés várt megválaszolásra. Pl.:

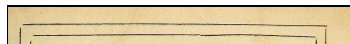
- Mi tartja a bolygókat pályájukon?
- Mi az erő forrása? Angyalok? Talán a Nap?
- Hogyan függ az erő a Naptól mért távolságtól?

A század második felére kezdtek körvonalazódni a válaszok. ♠

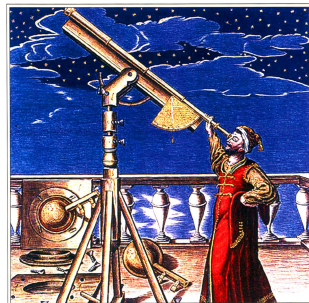
A gravitációs erő helyes alakját többen tudták, pl. HOOKE is, azonban az első jól kidolgozott elmélet NEWTON érdeme.



ábra : Mozgató angyalok, 14.sz.



- ⊕ KEPLER nagy ötlete
- ⊕ Kepler-törvények $\xrightarrow{!}$ Gravitációs erő alakja
- ⊕ Általános tömegvonzás törvénye $\xrightarrow{?}$ Kepler-törvények
- ⊕ A megmaradási tételek haszna
- ⊕ A Kepler-törvények hatása
- ⊕ Meglepetés
- ⊖ Differenciálegyenletek
- ⊖ Alternatív levezetések
- ⊖ Sok-sok történelmi adalék



ARTHUR KOESTLER

Alvajárók

Európa

Az 'elemi' nem azt jelenti, hogy könnyű megérteni. Az 'elemi' azt jelenti, hogy nagyon kevés előismeret szükséges ahhoz, hogy megértsük, mindössze végtelen sok intelligencia kell hozzá.

FEYNMAN: *A bolygók Nap körüli mozgása* (1964)

- ⊕ Alapműveletek ($\sim$ általános iskola)
- ⊕ Egyszerű geometria ($\sim$ középiskola)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ? \quad \vec{a} \times \vec{b} = ?$$

- ⊕ Egy kis deriválás ($\sim$ egyetem 1. félév)

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})' = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}, \quad (\vec{a} \times \vec{b})' = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}$$

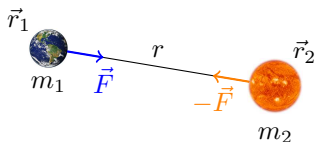
✓ **Ha egyszerűnek tűnik, akkor jó!**

Sokan, sokféle levezetését adták a Kepler-törvényeknek.

Egy lista (a teljesség igénye nélkül)

- ❶ NEWTON (1687) : geometria + egzisztencia és unicitás tétel
- ❷ HERMANN & BERNOULLI (1710) : polárkoordináták + fokális egyenlet
- ❸ LAPLACE (1798) : további mozgásállandók + fokális egyenlet
- ❹

MÖBIUS (1843)	}	: hodográf + egzisztencia és unicitás tétel
HAMILTON (1845)		
MAXWELL (1877)		
FEYNMAN (1964)		
- ❺ VAN HAANDEL & HECKMAN (2009) : geometria + deriválás



Jelölje $\vec{r}$ a két pontot összekötő vektort

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$$

Ekkor az m_1 -re ható erő

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Helyezzük az origót a tömegközéppontba!

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0}$$

Az egyes helyvektorokat $\vec{r}$ -rel kifejezve

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

a teljes energiára (**mozgási** + **helyzeti**)

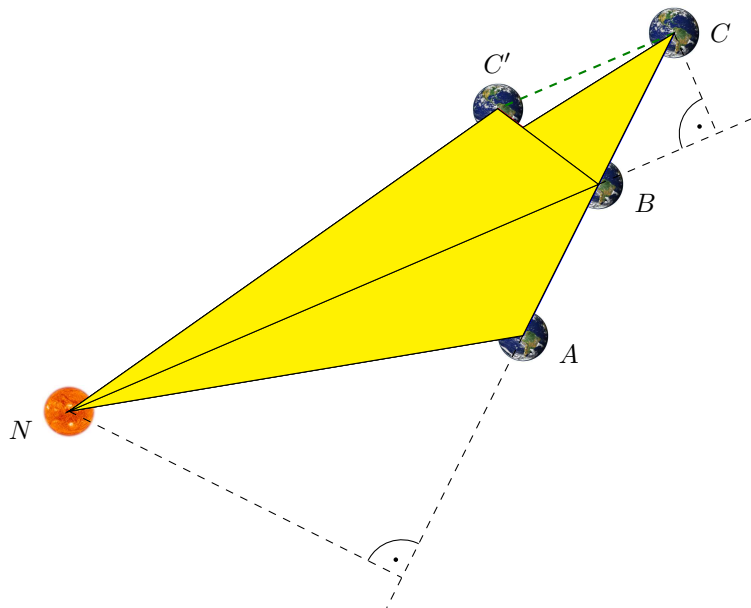
$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$$

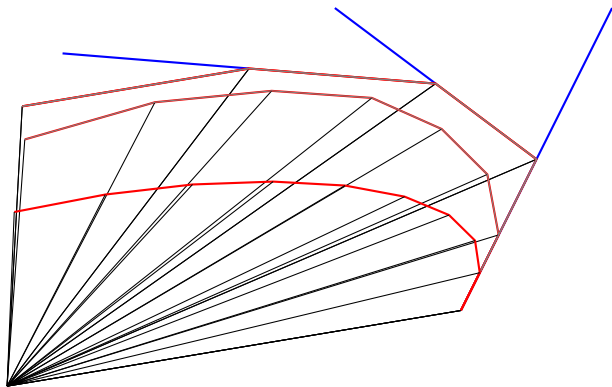
adódik, ahol az alábbi jelöléseket vezettük be

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = Gm_1m_2.$$

Tehát a 2-test probléma visszavezethető egy tömegpont mozgására! ♠







Az $\vec{r}$ vezérsugar Δt idő alatt egy háromszöget seper végig, melynek **területvektora**

$$\frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t) = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \Delta \vec{r}(t)$$

Így a „területi sebességvektor”

$$\frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

Az imént láttuk, hogy ez állandó. Tehát az

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

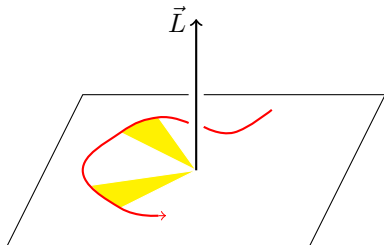
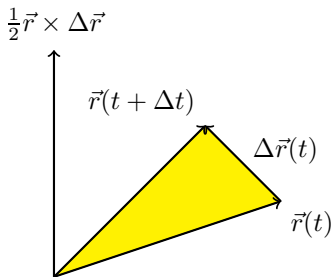
impulzusmomentum (perdület) is állandó, a mozgás az $\vec{L}$ -re merőleges síkban történik, és a bolygó vezérsugara időegységenként

$$\frac{L}{2m}$$

területet sűrol. **Ez Kepler II. törvénye!**

Tetszőleges $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ **centrális** erőterben $\vec{L}$ mozgásállandó:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{0} + \vec{r} \times f(r)\vec{r} = \vec{0}$$



Egy $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$ **gömbszimmetrikus** centrális erőterben az

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r), \quad \text{ahol } V' = -f,$$

teljes energia is megmaradó mennyiség:

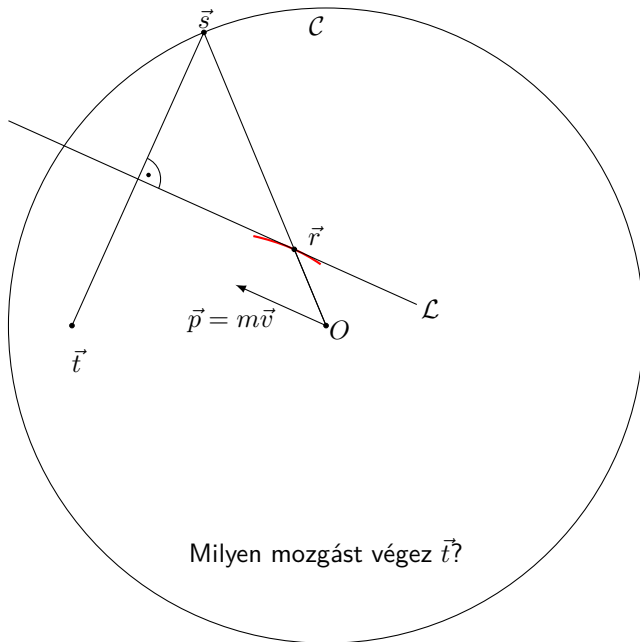
$$\dot{E} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} - f(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

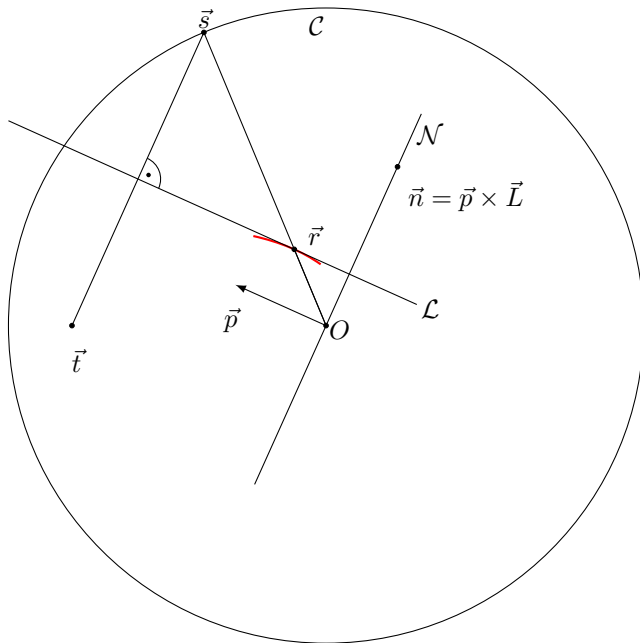
A Kepler-probléma esetén $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ és $V(r) = -\frac{k}{r}$, ahol $k > 0$.

Egy bolygó mozgási energiája kisebb a helyzetinél, így az összenergiája negatív!

$$0 > E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} > -\frac{k}{r} \quad \rightarrow \quad \boxed{r < -\frac{k}{E}}$$

Tehát a bolygó az origó középpontú $-\frac{k}{E} (> 0)$ sugarú körön belül mozog. ♠





Az $\vec{r}$ vektor meghosszabbítása a $-k/E$ sugarú $\mathcal{C}$ körig

$$\vec{s} = -\frac{k}{E} \frac{\vec{r}}{r}$$

Mivel $\vec{L}$ a mozgás síkjára merőleges (és állandó), így a pálya $\mathcal{C}$ érintőjére merőleges

$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{L}$$

Tehát a $\vec{t}$ vektor alakja

$$\vec{t} = \vec{s} - 2(\vec{s} - \vec{r}) \cdot \vec{n} \frac{\vec{n}}{n^2}$$

ahol

$$(\vec{s} - \vec{r}) \cdot \vec{n} = -\frac{1}{E} \left(E + \frac{k}{r} \right) \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) = -\frac{1}{E} \left(E + \frac{k}{r} \right) (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{L} = -\frac{1}{E} \left(E + \frac{k}{r} \right) L^2$$

míg

$$n^2 = p^2 L^2 = 2m \left(E + \frac{k}{r} \right) L^2$$

Tehát

$$\vec{t} = \frac{1}{Em} \left(\vec{p} \times \vec{L} - km \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\dot{\vec{t}} = ?$$

$$(\vec{p} \times \vec{L}) \cdot = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}} = m\vec{a} \times \vec{L} = \vec{F} \times \vec{L} = -\frac{km}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{v} = r\dot{r}\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}$$

$$(\vec{p} \times \vec{L}) \cdot = km \left(-\frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} + \frac{1}{r} \dot{\vec{r}} \right) = \left(km \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot$$

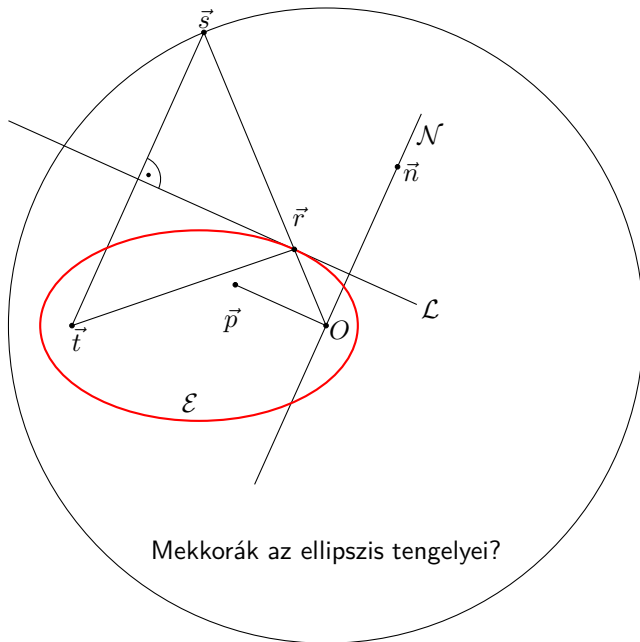
Tehát

$$\dot{\vec{t}} = \frac{1}{Em} \left(\vec{p} \times \vec{L} - km \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot = \vec{0}$$

$$|\vec{t} - \vec{r}| + |\vec{r} - \vec{0}| = |\vec{s} - \vec{r}| + |\vec{r} - \vec{0}| = |\vec{s} - \vec{0}| = -\frac{k}{E} > 0 \quad \text{állandó}$$



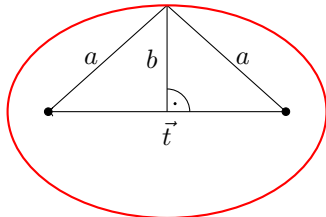
Kepler I. törvénye



$$\begin{aligned}
|\vec{t}|^2 &= \frac{1}{E^2 m^2} \left(p^2 L^2 + k^2 m^2 - 2 \frac{km}{r} \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) \right) \\
&= \frac{1}{E^2 m^2} \left(p^2 L^2 + k^2 m^2 - 2 \frac{km}{r} \vec{r} \cdot (p^2 \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{p}) \right) \\
&= \frac{1}{E^2 m^2} \left(p^2 L^2 + k^2 m^2 - \frac{2km}{r} r^2 p^2 - \frac{2km}{r} r^2 p^2 \cos^2 \alpha \right) \\
&= \frac{1}{E^2 m^2} \left(p^2 L^2 + k^2 m^2 - \frac{2km}{r} r^2 p^2 \sin^2 \alpha \right) \\
&= \frac{1}{E^2 m^2} \left(p^2 L^2 + k^2 m^2 - \frac{2km}{r} L^2 \right) \\
&= \frac{2mEL^2 + k^2 m^2}{E^2 m^2}
\end{aligned}$$

Pitagorasz-tétel

$$b^2 = \left(\frac{k}{-2E} \right)^2 - \left(\frac{|\vec{t}|}{2} \right)^2 = \frac{L^2}{-2Em}$$



Tehát az ellipszis féltengelyei

$$a = \frac{k}{-2E}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{-2Em}}$$

Láttuk, hogy az $\vec{r}$ vezérsugár időegységként $L/(2m)$ terület sűrűsége, így a T periódusidő leteltével az ellipszis teljes területét végigsepr

$$\frac{L}{2m}T = \pi ab$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^2 b^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3$$

Tehát

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2} \frac{1}{m} = \frac{Gm_1 m_2}{4\pi^2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{G}{4\pi^2} (m_1 + m_2)$$

Ha m_1 egy bolygó tömege, $m_2 = m_\odot$ pedig a Napé, akkor $m_1 \ll m_2$ és

$$\frac{a^3}{T^2} \approx \frac{Gm_\odot}{4\pi^2} \quad \text{állandó}$$

Kepler III. törvénye!

A levezetésben kulcsszerepet játszott a $\vec{t}$ vektor.

$$\vec{t} = \frac{1}{Em} \left(\vec{p} \times \vec{L} - km \frac{\vec{r}}{r} \right) =: \frac{1}{Em} \vec{A}$$

$$|\vec{A}| = km \frac{|\vec{t}|/2}{a} = kme$$

- Perdületmegmaradás ($\dot{\vec{L}} = \vec{0}$) $\rightarrow$ Kepler II. törvénye
- Energia & $\vec{t}$ vektor megmaradása ($\dot{E} = 0$, $\dot{\vec{t}} = \vec{0}$) $\rightarrow$ Kepler I. törvénye
- $\rightarrow$ Kepler III. törvénye

Hány megmaradó mennyiséget találtunk? **7**

Ebből mennyi független? **5**

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0, \quad E = \frac{|\vec{A}|^2 - k^2 m^2}{2m|\vec{L}|^2}$$

A Kepler-probléma egy (szuper)integrálható rendszer!

A megmaradási törvények hátterében a mozgásegyenletek szimmetriája áll:

- Térbeli forgatások $\rightarrow$ Perdületmegmaradás
- Időbeli eltolások $\rightarrow$ Energiamegmaradás
- ??? $\rightarrow$ A Runge-Lenz vektor megmaradása

Tekintsük az $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ egységgömböt és jelölje $\mathbf{n} = (0, 0, 0, 1)$ az északi pólust. Sztereografikus projekció során $\mathbb{S}^3$ invariáns metrikája az alábbi alakot ölti

$$v^2 = \frac{(r^2 + 1)^2 p^2}{4}$$

$T^*(\mathbb{S}^3 \setminus \{\mathbf{n}\}) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{S}^3 \setminus \{\mathbf{n}\} \times \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$,
 $T^*\mathbb{R}^3 = \{(\vec{r}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}$. Az $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = v^2/2$ függvény Hamiltoni-folyamának integrálgörbéi az $F = 1/2$ szintfelületen $\mathbb{S}^3$ főkörreire vetülnek, amelyeket s ívhossz szerinti időparaméterben mérve 2π periódussal járnak be. Mivel

$$E(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\sqrt{2\tilde{F}(\vec{r}, \vec{p})} - 1}{r} - \frac{1}{2} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{r},$$

így $\mathbb{S}^3 \setminus \{\mathbf{n}\}$ geodetikus mozgását a Kepler-probléma $E = -1/2$ energiájú megoldásaira vetítettük.

Szimmetria: $\mathbb{S}^3$ forgatásai $SO(4) \rightarrow$ Megmaradó mennyiségek: $\vec{L}, \vec{A}$.

- A Naprendszer bolygóinak mozgását jól közelíti. theplanetstoday.com
Vagy mégsem? A Merkúr perihéliuma. $\leftarrow$ Általános relativitáselmélet!
- RUTHERFORD szórási kísérlete (1909): Az atommag felfedezése!
- PAULI (1926): A hidrogén atom energiaszintjei!
- A Kepler-probléma rejtett szimmetriái $\rightarrow$ Csoportelmélet a fizikában
- Kilencedik bolygó?!

Úgy tűnik, hogy az emberi értelemnek először önállóan meg kell konstruálni a formákat, mielőtt azokat a dolgokban kimutathatnánk. Kepler csodálatos életművéből különösen szépen felismerhető, hogy a csupasz empiriából nem virágozhat ki az ismeret, csak az elgondolt és a megfigyelt összevetéséből.

EINSTEIN: *Kepler halálának háromszázadik évfordulójára (1930)*

Klasszikusok



KEPLER, J.

Mysterium Cosmographicum, Tübingae: excudebat Georgius Gruppenbachius, 1596.

<http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-445>

Astronomia Nova, Heidelberg: Voegelin, 1609.

<http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/162514>

Harmonices Mundi, Lincii Austriae: excudebat Ioannes Plancus, 1619.

<http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3337735>



NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.

<http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/1>

Tankönyvek, más levezetések



ARNOLD, V.I. *A mechanika matematikai módszerei*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1985.



BUDÓ ÁGOSTON *Mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.



FEYNMAN, R.P. *The Motion of Planets Around the Sun*, 1964.



GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*, Addison-Wesley; 3rd edition, 2001.



LANDAU, L.D., LIFSIC E.M. *Elméleti Fizika I. Mechanika*, Tankönyvkiadó, Bp., 1984.

Cikkek



GYÖRGYI GÉZA *A Kepler problémáról*, Fizikai Szemle 1965/3, 74.

<http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz6503/gyg6503.html>

Kepler-mozgás és a gravitációs törvény, Fizikai Szemle 1971/6, 205.

http://fizikaiszemle.hu/archivum/gygeza/fsz1971/71205_209.html

Dinamikai szimmetriák, (tud. doktori értekezés) Magyar Fizikai Folyóirat 20 (1972) 45

http://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MAFIZFO_20/?pg=168&layout=s



HORVÁTHY PÉTER

Bolygómozgásról - egy régi versenyfeladat kapcsán, Fizikai Szemle 2003/11, 405.

<http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0311/fiztan0311.html>

A bolygómozgás törvényeinek levezetése az oszcillátor mozgásából, Fizikai Szemle

2004/06, 180. <http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0406/HorvathyPA.pdf>

Bolygómozgás és geometria I - Maxwell bizonyítása, Fizikai Szemle 2005/02, 48.

<http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0502/HorvathyPA.pdf>

Bolygómozgás és geometria II - Feynman elveszett előadása, Fizikai Szemle 2005/08, 264.

<http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz0508/HorvathyPA.pdf>



HECKMAN, G., VAN HAANDEL, M. *Teaching the Kepler Laws for Freshmen*, The Mathematical Intelligencer, 31:2 (2009) 40-44.

<http://dx.doi.org/10.1007/s00283-008-9022-x>



HECKMAN, G., DE LAAT, T. *On the regularization of the Kepler problem*, J. Symplectic Geom. 10:3 (2012) 463-473. <http://dx.doi.org/10.4310/JSG.2012.v10.n3.a5>



MILNOR, J. *On the geometry of the Kepler problem*, Amer. Math. Monthly 90:6 (1983) 353-365. <http://doi.org/10.2307/2975570>



MOSER, J. *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Comm.Pure Appl.Math. 23 (1970) 609-636. <http://doi.org/10.1002/cpa.3160230406>

Történeti hivatkozások



EINSTEIN, A. *On the occasion of the three hundredth anniversary of Kepler's death*, Frankfurter Zeitung, November 9, 1930.
http://www.larouchepub.com/eiw/public/2015/eirv42n20-20150515/31-32_4220.pdf



GOLDSTEIN, H.
Prehistory of the Runge-Lenz vector, Am. J. Phys. 43, 737 (1975)
<http://dx.doi.org/10.1119/1.9745>
More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector, Am. J. Phys. 44, 1123 (1976)
<http://dx.doi.org/10.1119/1.10202>



TURNBULL, H.W. (ED.) *The Correspondence of Isaac Newton*, Volume II: 1676-1687, Cambridge University Press, 1960.



ARNOLD, V.I. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.



SZEGEDI PÉTER (SZERK.) *Isaac Newton válogatott írásai*, Typotex, Budapest, 2003.



KOESTLER, A. *Alvajárók*, Európa Könyvkiadó, Budapest, 2007.



SIMONYI KÁROLY *A fizika kultúrtörténete - A kezdetektől a huszadik század végéig*, 5. javított, bővített kiadás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2011.