Gömbfelület fedése egyenlő sávokkal

Zarnócz Tamás

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2015. december 3.

Ez az előadás Fodor Ferenccel és Vígh Viktorral közös munka eredménye.

Fogalmak

Szükségünk lesz az alábbi két fogalomra.

Definíció (sáv/plank)

Az $\mathbb{R}^d$ térben egy w szélességű sáv alatt két egymással párhuzamos és egymástól w távolságra lévő hipersík közötti zárt térrészt értjük.

Definíció (konvex test szélessége)

A $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test szélességén a párhuzamos támaszhipersíkpárjai távolságának a minimumát értjük, avagy ezzel teljesen ekvivalensen a K-t tartalmazó sávok szélességének minimumát.

Történeti bevezető

Az eredeti sávfedési probléma (plank problem) Tarski nevéhez fűződik, aki 1932-ben a következő sejtést fogalmazta meg:

Sejtés (Tarski, 1932)

Ha egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testet véges sok sávval fedünk, akkor a sávok szélességének összege legalább akkora, mint K szélessége.

- Tarski maga bebizonyította a sejtést, ha $K = B^2, B^3$
- 20 évvel később Bang adott bizonyítást az eredeti sejtésre.
- A problémának azóta rengeteg változata ismert (válaszokkal vagy anélkül).

Bevezetés

- Legyen S^2 az o középpontú egységgömb az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi térben:
$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x, o) = 1\},$$
ahol $d(\cdot, \cdot)$ jelöli a szokásos euklideszi távolságot az $\mathbb{R}^3$ térben.
- Legyen $C \subset S^2$ egy főkör, $0 < w < \pi/2$. Ekkor a $Z(C, w)$-vel jelölt C főkörű w félszélességű zóna (o-ra szimmetrikus gömböv) a C-től gömbi távolság szerint w-nél nem messzebb lévő pontok halmaza, azaz
$$Z(C, w) = \{x \in S^2 : d_S(x, C) \leq w\},$$
ahol $d_S(\cdot, \cdot)$ jelöli a gömbi távolságot.
- Megjegyezzük, hogy $Z(C, w)$ euklideszi szélessége $2 \sin w$, következésképp $Z(C, w)$ nem más, mint egy o-ra szimmetrikus $2 \sin w$ szélességű euklideszi sávnak az S^2 egységgömbbel vett metszete.

Probléma

A következő problémát Fejes Tóth László vetette fel 1973-as cikkében:

Probléma (Fejes Tóth László)

Adott n természetes számhoz keressük azt a legkisebb w_n-t, melyre igaz, hogy S^2 lefedhető n darab w_n félszélességű zónával.

- Ez is a Tarski-féle fedési probléma egy változata.
- Megjegyezzük, hogy Fejes Tóth László 1973-as cikkében megfogalmazta még ugyanezt a gömbi fedési problémát nem egyforma szélességű zónákral is, illetve gömbi konvex tartományok zónákkal történő fedésére is.
- Természetesen a probléma megfogalmazható magasabb dimenziókban is.

Ismert eredmények

- Fejes Tóth László eredeti 1973-as cikkében megjelent sejtés szerint $w_n = \frac{\pi}{2n}$, továbbá az optimális elhelyezésben a zónák főkörei egy átellenes pontpárban metszik egymást, és egyenletesen helyezkednek el.
- Rosta Vera 1972-ben bizonyította, hogy $w_3 = \pi/6$ és az optimális elhelyezés megegyezik a később Fejes Tóth László által megfogalmazottal.
- Linhart 1974-es cikkében az $n = 4$ esetet bizonyította be.
- Triviális alsó korlát: $w_n > \arcsin(1/n)$.
- Legjobb tudomásunk szerint ez minden, ami eddig a problémával kapcsolatban ismert.

Gondolatmenetünkben használni fogjuk a Tammes problémával kapcsolatos ismert eredményeket.

Probléma (Tammes)

Milyen nagy lehet az S^2 egységgömbön elhelyezett n pont páronkénti (gömbi) távolságának minimuma? Jelölje ezt a maximális értéket d_n.

Tétel (Fejes Tóth László, 1943)

$$d_n \leq \delta_n := \arccos\left(\frac{\cot^2\left(\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right)-1}{2}\right), \quad ha\ n \geq 3.$$

A fenti becslés éles az $n = 3, 4, 6, 12$ esetben, illetve az is igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} d_n/\delta_n = 1$.

Az alábbi táblázat tartalmazza d_n ismert értékeit.

n	d_n	
3	$2\pi/3$	L. Fejes Tóth 1943
4	1.91063	L. Fejes Tóth 1943
5	$\pi/2$	Schütte, van der Waerden 1951
6	$\pi/2$	L. Fejes Tóth 1943
7	1.35908	Schütte, van der Waerden 1951
8	1.30653	Schütte, van der Waerden 1951
9	1.23096	Schütte, van der Waerden 1951
10	1.15448	Danzer 1986
11	1.10715	Danzer 1986
12	1.10715	L. Fejes Tóth 1943
13	0.99722	Musin, Tarasov 2012
14	0.97164	Musin, Tarasov 2015
24	0.76255	Robinson 1961

Robinson (1961) javított Fejes Tóth László fenti felső becslésén az alábbi módon.

- Tegyük fel, hogy n (gömbi) pont páronkénti távolságai mind legalább a-val egyenlőek, ahol $0 < a < \arctan 2$.
- Legyen $\Delta_1(a)$ az a oldalú szabályos gömbháromszög területe, és legyen $\Delta_2(a)$ annak az egyenlőszárú gömbháromszögnek a területe, amelynek szárai a hosszúságúak és $2\pi - 4\alpha$ szöget zárnak be, ahol α az a oldalú szabályos gömbháromszög belső szöge.
- Jelölje $\tilde{\delta}_n$ az

$$4n\Delta_1(a) + (2n - 12)\Delta_2(a) - 12\pi = 0$$

egyenlet egyértelmű megoldását. Ekkor

$$d_n \leq \tilde{\delta}_n \leq \delta_n$$

$n \geq 13$ esetén ($n = 24$-re a becslés éles, azaz $d_n = \tilde{\delta}_n$).

Mivel a Robinson-féle felső korlát nem jól számolható (csak numerikusan), ezért mi többnyire a δ_n-t használjuk.
Bevezetjük a következő jelölést:
Legyen $d_n^* := \min\{\pi/2, d_n\}$, ha $n \geq 2$. Továbbá legyen

$$\delta_n^* := \begin{cases} d_n^* & \text{ha } 3 \leq n \leq 14 \text{ vagy } n = 24, \\ \delta_n & \text{különben.} \end{cases}$$

Legfőbb eredményünk egy explicit alsó korlát w_n-re, amit a következő módon érünk el:

- Tekintsünk két w félszélességű zónát, melyek főkörei α szöget zárnak be.
- Feltesszük, hogy $2w \leq \alpha \leq \pi/2$, azaz a metszetük két egybevágó diszjunkt rombusz-szerű tartomány, melyeket egyforma sugarú (nem geodetikus) kis körívek határolnak.
- Legyen $F(w, \alpha)$ egy ilyen "rombusz" területe.

Tétel (Gauss-Bonnet)

Legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ megengedett tartomány az $\mathcal{F}$ irányítható felületen. Ekkor

$$\int_{\mathcal{D}} \kappa dF + \oint_{\partial\mathcal{D}} \kappa_g^e ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi,$$

ahol κ a Gauss-görbület, κ_g^e a $\partial\mathcal{D}$ i-edik töréspontjánál lévő törésszög.

- A Gauss-Bonnet-formulával kiszámoljuk $F(w, \alpha)$-t. Ehhez ki kell számolnunk a határoló görbe előjeles geodetikus görbületét, a 4 (egyenlő hosszú) ív hosszát, illetve a töréspontokban a törésszöget.
- A törésszög a leghosszadalmasabb ezek közül, de mindhárom elemi módszereket igényel csupán némi trigonometriával.

A Gauss-Bonnet-formula a mi esetünkben a következőre egyszerűsödik ($\kappa_g^e = -\tan w$ figyelembe vételével):

$$F(w,\alpha) = 2\pi + 4\tan w \cdot l(w,\alpha) - \sum_{i=1}^{4} \varphi_i(w,\alpha)$$

Lemma (1. lemma: $F(w,\alpha)$ értéke)

Legyen $0 \le w \le \pi/4$, illetve $2w \le \alpha \le \pi/2$. Ekkor $F(w,\alpha)$ α-ban monoton csökken, w-ben nő, értéke pedig

$$\begin{aligned} F(w,\alpha) = {} & 2\pi + \\ & + 4\sin w \arcsin\left(\frac{1-\cos\alpha}{\cot w \sin\alpha}\right) + 4\sin w \arcsin\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cot w \sin\alpha}\right) \\ & - 2\arccos\left(\frac{\cos\alpha - \sin^2 w}{\cos^2 w}\right) - 2\arccos\left(\frac{-\cos\alpha - \sin^2 w}{\cos^2 w}\right). \end{aligned}$$

- A w-ben való monotonitás triviális, hisz rögzített α esetén a nagyobb félszélességű zónák metszeteként előálló rombusz tartalmazza a kisebbet.
- Az α-ban való monotonitáshoz két rombusz, egy $F(w, \alpha)$, illetve egy $F(w, \alpha + \varepsilon)$ területű különbségeinek területét hasonlítjuk össze (a két rombusz két generáló főköre közül az egyik egybeesik)

- Adott $Z_1, \dots, Z_n$ optimális fedés. A zónák főkörei közt van kettő, melyeknek a bezárt szöge minimális (legfeljebb δ_{2n}) a korábban tárgyaltak alpján.
- A kettő közül az egyiket eldobjuk. Ennek hozzájárulása a fedéshez legfeljebb a területe mínusz kettőjük metszetének a területe, azaz $f(w, \alpha) := 2\pi \sin w - 2F(w, \alpha)$.
- Ezt folytatva a kapott kontribúciókat összegezve legalább a gömb felszínét kell hogy kapjuk:

$$G(w, n) = 4\pi \sin w + \sum_{i=2}^{n} f(w, \delta_{2i}^*) \geq 4\pi,$$

Mindezek ismeretében már ki tudjuk mondani fő tételünket.

Tétel (Fodor, Vígh, Z.)

$n \geq 3$ esetén jelölje w_n^* a $G(w,n) = 4\pi$ egyenlet egyetlen megoldását a $[0, \delta_{2n}^*/2]$ intervallumon. Ekkor $w_n^* < w_n$.

A tétel bizonyításához először be kell látnunk, hogy a $G(w,n) = 4\pi$ egyenletnek valóban létezik megoldása, és a tárgyalt intervallumon ez a megoldás egyértelmű is. Ez az alábbi két lemmából következik:

Lemma (2. lemma)

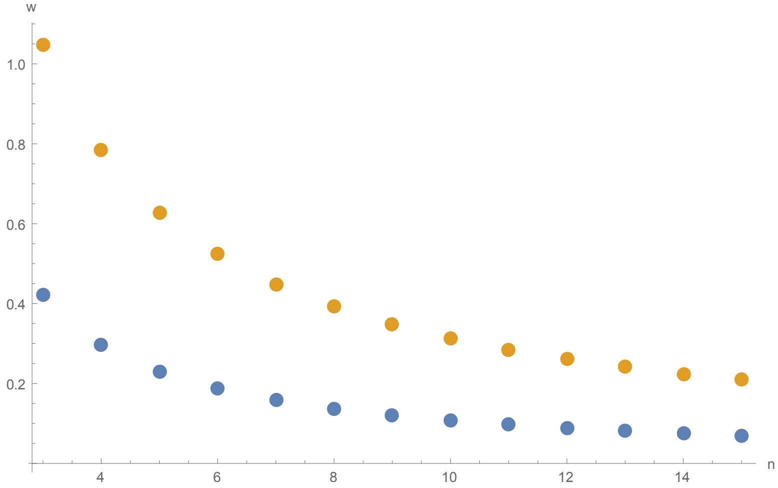
Minden $n \geq 3$ egész szám esetén $\cos \frac{\pi}{2n} > \cos \sqrt{\frac{4\sqrt{3}\pi}{3n}} > \cos \delta_{2n}^*$.

Lemma (3. lemma)

$n \geq 3$ egész esetén $G(w,n)$ monoton nő w-ben, $G(0,n) = 0$ és $G(\delta_{2n}^*, n) > 4\pi$

A fő tétel bizonyítása

- Legyen $\{Z_i(w_n, C_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ egy (w-re nézve) minimális gömbfedés, p_i a C_i egyik pólusa, $p_{n+i} = -p_i$.
- Létezik p_{i_1}, p_{j_1}, hogy e két pont távolsága a legkisebb ($i_1 \neq j_1 \pm n$).
- Z_{i_1} azon része, melyet semelyik másik zóna nem fed, legfeljebb $f(w, \delta^*_{2n})$. (a 2. lemma biztosítja, hogy $Z_{i_1} \cap Z_{j_1}$ valóban két rombusz uniója)
- Eldobjuk Z_{i_1}-et és folytatjuk az eljárást.
- Vegyük észre, hogy az utolsó lépésben Z_{i_n} már teljes területtel járul hozzá.
- Ezeket a területeket összeadva éppen $G(w, n)$-t kapjuk.
- A 3. lemma miatt $G(w^*_n, n) = 4\pi$, továbbá G monoton nő w-ben. Másrészt mivel Z_i-k fedést alkottak, ezért $G(w, n) \geq 4\pi$, azaz $w^*_n < w_n$.



ábra : A kék pöttyök a kiszámolt alsó korlátok (w_n^*), a sárgák pedig a feltételezett optimumok (és egyben felső korlátok)

Köszönöm a figyelmet!