Projektív metrikák euklidészi tulajdonságokkal

Kozma József

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék
(www.math.u-szeged.hu/tagok/kozma)

Kerékjártó Szeminárium
Szeged, 2015. november 25.
***

Az előadás a Kurusa Árpáddal végzett közös munkán alapszik

Az előadás felépítése

1. Projektív metrikák
   - Áttekintés
   - Minkowski- és Hilbert-metrikák
2. Menelaosz és Ceva típusú karakterizáció
   - Metrikus osztóviszony
   - Pontharmasok és számhármasok
   - Menelaosz és Ceva tétele a klasszikus geometriákban
   - Bolyai-metrika Menelaosz és Ceva típusú karakterizációja
   - A Ceva típusú karakterizáció igazolása
3. Háromszög ortocentruma és ekvidisztáns centruma
   - Ortocentrum, ekvidisztáns centrum és merőlegesség
   - Bolyai metrika karakterizációja
   - Euklidészi metrika karakterizációja

Hilbert IV. problémája, 1900

Mai nyelven azt jelenti, hogy keressük meg és osztályozzuk az az n-dimenziós $\mathbb{P}^n$ projektív tér valamely $\mathcal{D}$ részhalmazán értelmezett olyan metrikákat, melyekre teljesül a szigorú háromszög-egyenlőtlenség, vagyis nem kollineáris pontokra szigorúan szubadditív, kollineáris pontokra pedig additív. Ezeket nevezzük *projektív metrikáknak*.

Hamel (1901)

Három osztály: elliptikus, affin és hiperbolikus (maximális kiterjedés: a teljes projektív tér, annak egy affin része, valamely affin tér szigorúan konvex része).

Busemann (1961)

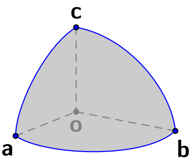
Általános konstrukció. Alap: Crofton-tétel. Görbe hossza = őt metsző egyenesek halmazának mértéke/2. Az eljárás minden projektív metrikát megad. (Pogorelov, 1973; csak síkban, Szabó (1986) minden metrika, minden dimenzió)

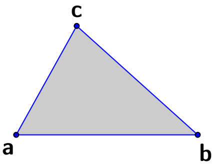
Beltrami tétele, 1865

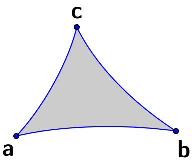
Ha egy síkbeli projektív metrika Riemann-féle, akkor konstans Gauss-görbületű. Tehát ekkor csak az elliptikus, Euklidészi vagy Bolyai-féle lehet.

Projektív metrikák és klasszikus példák

kiterjedés	Az egész $\mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^n \setminus \ell$	$\mathcal{H} \subsetneq \mathbb{P}^n$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
metrika	Elliptikus metrika	Affin metrika	Hiperbolikus metrika
példaosztály		Minkowski-metrika	Hilbert-metrika
		$\cup$	$\cup$
példa	Gömbi*	Euklidészi	Bolyai







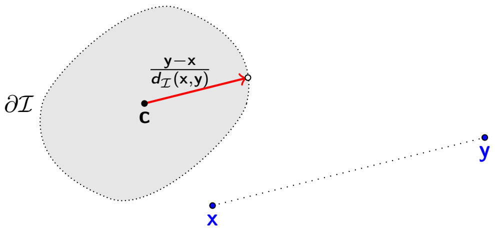
Az affin metrikák között a *Minkowski-metrikák* alkotják a legfontosabb osztályt, mert ezekre a metrikus osztóviszony és az affin osztóviszony megegyezik.

Minkowski-metrika

Legyen $\mathcal{I}$, az *indikátrix*, egy nyílt, szigorúan konvex, középpontosan szimmetrikus, korlátos tartomány az $\mathbb{R}^n$ térben. Az a $d_{\mathcal{I}}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyet

$$d_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{\lambda > 0 : (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\lambda \in \mathcal{I}\}$$

definiál, egy metrika az $\mathbb{R}^n$ téren. Ezt *Minkowski-metrikának* nevezzük.



A hiperbolikus metrikák között a Bolyai-metrikát általánosító *Hilbert-metrikák* alkotják a legfontosabb osztályt.

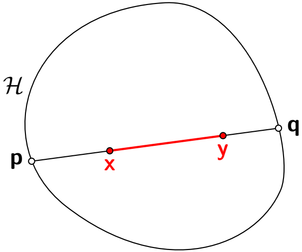
Hilbert-metrika

Legyen $\mathcal{H}$ egy nyílt, szigorúan konvex halmaz az $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ térben. Az a $d_\mathcal{H} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvény, melyet

$$d_\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ \frac{1}{2}\left|\ln|(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x}, \mathbf{y})|\right|, & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \text{ ahol } \overline{\mathbf{pq}} = \mathcal{H} \cap \mathbf{xy}, \end{cases},$$

definiál, egy metrika. Ezt a metrikát *Hilbert-metrikának* nevezzük.

Utóbbi formulában a négy kollineáris ponthoz rendelt $(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x})/(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{y})$ arány, ahol $(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{x})$ három kollineáris pont osztóviszonya, a *kettősviszony*. Ez projektív mennyiség.



A metrikus osztóviszony

Legyen d egy projektív metrika a projektív tér $\mathcal{D}$ részhalmazán. A kollineáris $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{D}$ pontok (ilyen sorrendben vett) *metrikus osztóviszonyán* az

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{c} \rangle_d = \begin{cases} \begin{cases} -\frac{\sin d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sin d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{ha } \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{ab}}, \\ \frac{\sin d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sin d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{egyébként}, \end{cases} & \text{ha } d \text{ elliptikus}, \\ \begin{cases} -\frac{d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{ha } \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{ab}}, \\ \frac{d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{egyébként}, \end{cases} & \text{ha } d \text{ affin típusú}, \\ \begin{cases} -\frac{\sinh d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sinh d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{ha } \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{ab}}, \\ \frac{\sinh d(\mathbf{a},\mathbf{c})}{\sinh d(\mathbf{c},\mathbf{b})}, & \text{egyébként}, \end{cases} & \text{ha } d \text{ hiperbolikus} \end{cases} \tag{1}$$

valós számot értjük.

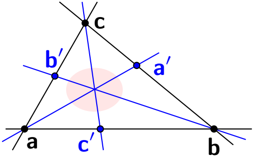
Nem elfajuló háromszög = NEH

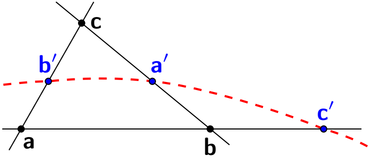
Ceva- és Menelaosz-ponthármas

Az **abc** NEH ($\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}'$) *hármasa*: rendre **ab**, **bc** és **ca** egyeneseken vannak.

(p1) *Ceva-ponthármas*: ha az $\mathbf{aa}'$, $\mathbf{bb}'$ és $\mathbf{cc}'$egyenesek konkurrensek, illetve

(p2) *Menelaosz-ponthármas*: ha a $\mathbf{c}'$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ pontok kollineárisak.





Ceva- és Menelaosz-számhármas

Egy (α, β, γ) valós számhármast

(n1) *Ceva-számhármasnak* nevezünk, ha $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = +1$, illetve

(n2) *Menelaosz-számhármasnak* nevezünk, ha $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$.

Az affin geometriából származó Ceva- és Menelaosz-tételek metrikusan is megfogalmazhatók, és ezek teljesülnek a klasszikus geometriákban, sőt a Minkowski-metrika esetén is érvényesek.

Metrikus Ceva-tétel

Egy **abc** NEH-ben $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ akkor és csak akkor Ceva-ponthármas, ha

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_d)$$

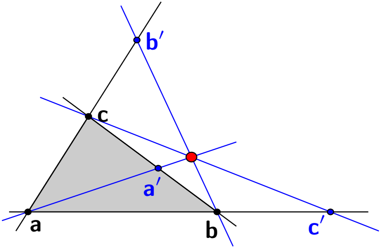
egy Ceva-számhármas.

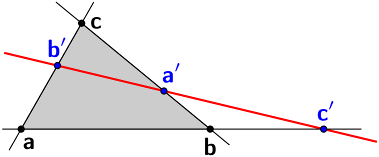
Metrikus Menelaosz-tétel

Egy **abc** NEH-ben $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ akkor és csak akkor Menelaosz-ponthármas, ha

$$(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_d, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_d)$$

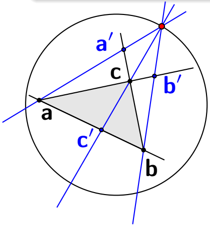
egy Menelaosz-számhármas.





Tétel [KÁ—KJ, 2014]: Ceva típusú jellemzés

Ha az n-dimenziós $\mathcal{H}$ Hilbert-geometriában minden egyes **abc** NEH esetén létezik egy $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ Ceva-ponthármas, melyre $(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}})$ Ceva-számhármas, akkor a Hilbert-geometria Bolyai-geometria.



Tétel [KÁ—KJ, 2014]: Menelaosz típusú jellemzés

Ha az n-dimenziós $\mathcal{H}$ Hilbert-geometriában minden egyes **abc** NEH esetén létezik egy $(\mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ Menelaosz-ponthármas, melyre $(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}' \rangle_{d_{\mathcal{H}}})$ Menelaosz-számhármas, akkor a Hilbert-geometria Bolyai-geometria.

Háromszögenként elegendő egyetlen Ceva-ponthármas létezése, melyre a megfelelő számhármas Ceva-számhármas. Ugyanez érvényes a Menelaosz típusú jellemzésre is. A megtalált jellemzés szükséges és elegendő feltételt ad. (**Cikk megjelent: JGE.**)

A metrikus Ceva- és Menelaosz-tétel igazolásához azt kell belátni, hogy $\mathcal{H}$ egy ellipszoid.

Az alábbiak szerint elegendő 2 dimenzióban dolgozni.

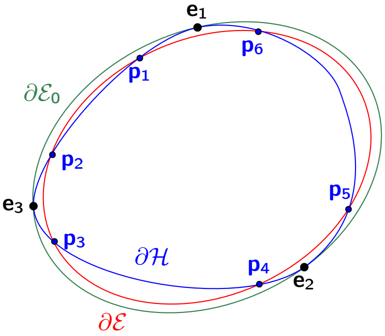
Lemma [Gruber, P.M. 2007]

Az $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) térben egy korlátos, nyílt konvex $\mathcal{H}$ halmaz ellipszoid akkor és csak akkor, ha minden síkmetszete ellipszis.

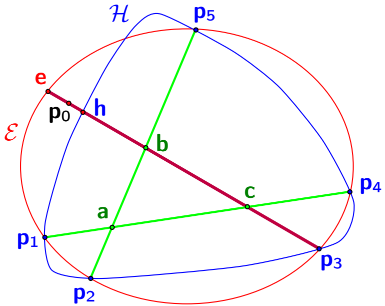
Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ nem ellipszis. Az alábbi John-tétel szerint van a $\mathcal{H}$-hoz "közeli" ellipszis.

John-tétel alkalmazása. [Gruber, P.M.—Schuster, F.E., 2005]

Legyen $\mathcal{H}$ egy korlátos, nyílt konvex halmaz az $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor létezik egy olyan $\mathcal{E}$ ellipszis, amely tartalmazza $\mathcal{H}$-t, és vele legalább 3 pontban érintkezik: $|\partial\mathcal{H} \cap \partial\mathcal{E}| \geq 3$.



- $\exists$ legalább 6 különböző $\mathbf{p}_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ pont $\partial\mathcal{E} \cap \partial\mathcal{H}$ halmazban, továbbá a $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ tartalmaz nyílt halmazokat.



- $\exists\ \mathbf{p}_0 \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$: $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$
- $\mathbf{p}_1 \prec \mathbf{p}_2 \prec \mathbf{p}_3 \prec \mathbf{p}_4 \prec \mathbf{p}_5$
- $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_3$ elválasztja a $\mathbf{p}_5$ és $\mathbf{p}_2$, illetve a $\mathbf{p}_4$ és $\mathbf{p}_1$ pontokat $\Rightarrow \exists\mathbf{b}, \exists, \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \notin \overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_3} \Rightarrow \mathbf{abc}$ NEH,
- $\exists(\mathbf{c}', \mathbf{b}', \mathbf{a}')$ Ceva-ponthármas: $(\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'\rangle_{d_\mathcal{H}} \langle\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}'\rangle_{d_\mathcal{H}} \langle\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}'\rangle_{d_\mathcal{H}})$ Ceva-számhármas
- $\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'\rangle_{d_\mathcal{E}} = \langle\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}'\rangle_{d_\mathcal{H}}$
  $\langle\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}'\rangle_{d_\mathcal{E}} \neq \langle\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}'\rangle_{d_\mathcal{H}}$
  $\langle\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}'\rangle_{d_\mathcal{E}} = \langle\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}'\rangle_{d_\mathcal{H}}$

$$1 = \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}'\rangle_{d_\mathcal{E}} \langle\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}'\rangle_{d_\mathcal{E}} \langle\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}'\rangle_{d_\mathcal{E}} \neq \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}'\rangle_{d_\mathcal{H}} \langle\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}'\rangle_{d_\mathcal{H}} \langle\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}'\rangle_{d_\mathcal{H}} = 1$$

Klasszikus geometriákban

Létezik magasságpont és ekvidisztáns centrum.

Talppont

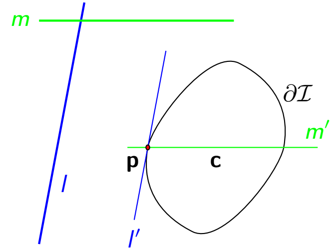
Az $\mathbf{f} \in \ell$ a $\mathbf{g}$ *talppontja ℓ-en*, ha $d_{\mathcal{H}}(\mathbf{g}, \mathbf{x}) \geq d_{\mathcal{H}}(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ $\forall \mathbf{x} \in \ell$.

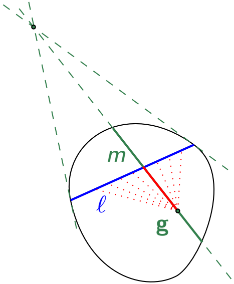
Merőlegesség

Az ℓ egyenest az $\mathbf{f}$ pontban metsző *m egyenes merőleges az ℓ egyenesre* ($m \perp_{bal} \ell$, $\ell \perp_{jobb} m$), ha $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ talppontja ℓ-en minden $\mathbf{g} \in \ell' \setminus \{\mathbf{f}\}$ pontra.

E két reláció akkor és csak akkor szimmetrikus, ha

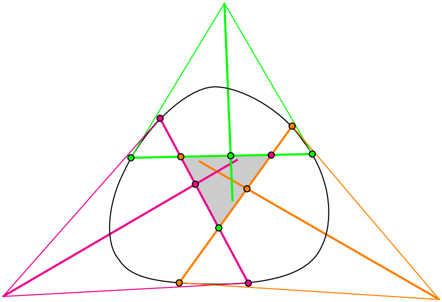
- $\mathcal{I}$ egy Radon-görbe (Minkowski-eset);
- $\mathcal{H}$ egy ellipszis (Hilbert-eset).





Tétel [KÁ—KJ,2015] az ekvidisztáns centrumról

Ha egy $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ Hilbert-geometriában minden NEH $\mathcal{H}$-oldalfelező merőlegesei konkurrensek, akkor a geometria Bolyai-féle.



Tétel [KÁ—KJ,2015] az ortocenterről

Ha egy $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ Hilbert-geometriában minden NEH $\mathcal{H}$-magasságai konkurrensek, akkor a geometria Bolyai-féle.

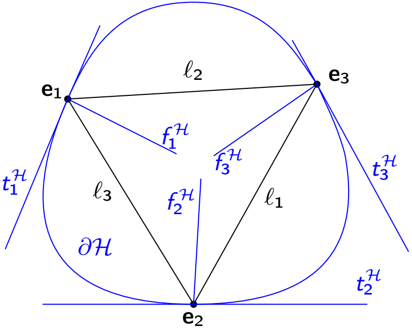
Cikk megjelent: Beiträge zur Algebra und Geometrie, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally DOI: 10.1007/s13366-014-0233-3

Az ekvidisztáns centrummal való karakterizáció bizonyításának egy érdeke lépése a következő tétel.

Ellipszisek karakterizációja

Az ábra konfigurációjában:

1. $(\ell_i, \ell_j; t_k^{\mathcal{H}}, f_k^{\mathcal{H}}) = -1$
2. Bármely $\mathcal{E}$ ellipszisre az $f_1^{\mathcal{E}}, f_2^{\mathcal{E}}, f_3^{\mathcal{E}}$ egyenesek konkurrensek.
3. Ha az $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ egyenesek konkurrensek minden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \partial\mathcal{H}$ ponthármasra, akkor $\mathcal{H}$ egy ellipszis.

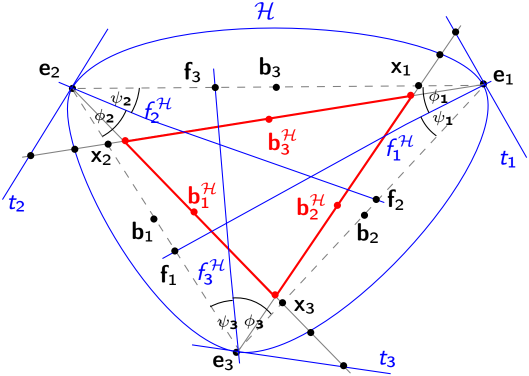


Ennek duálisa a Ceva- és Menelaosz-tételeken keresztül Segre tételével ekvivalens.

(Karakterizálás az ekvidisztáns centrummal Hilbert-metrikában)

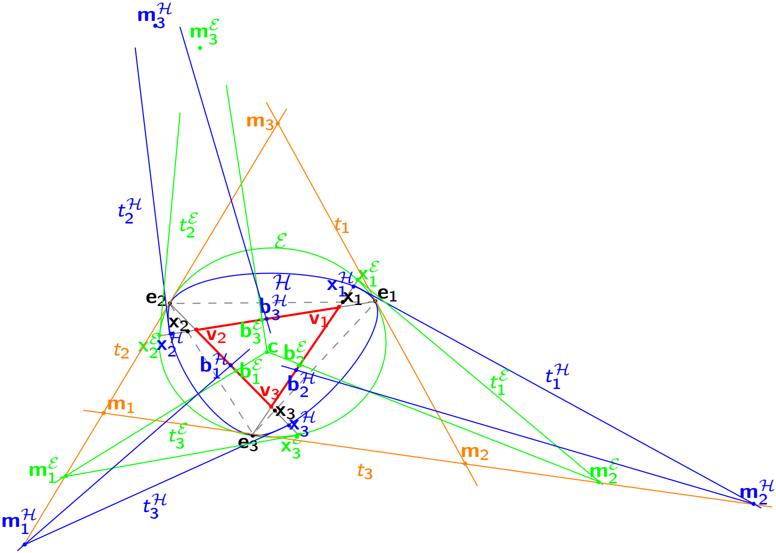
Segédtétel

Tekintsük az ábrán lévő konstrukciót. Az $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ egyenesek konkurrensek akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon, \delta > 0$ esetén az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ and $\mathbf{x}_3$ pontok megválaszthatók úgy, hogy

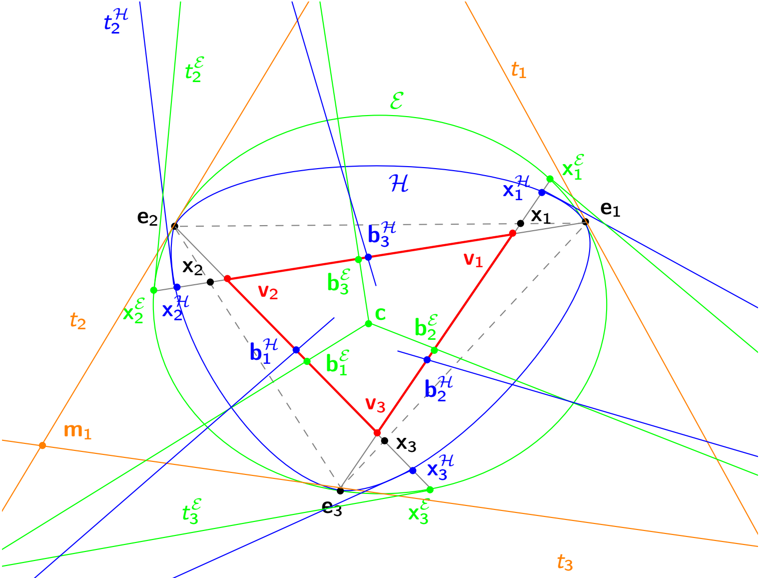


$$|\mathbf{b}_1^{\mathcal{H}} - \mathbf{b}_1| + |\mathbf{b}_2^{\mathcal{H}} - \mathbf{b}_2| + |\mathbf{b}_3^{\mathcal{H}} - \mathbf{b}_3| < \varepsilon,$$
$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_1| + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{e}_2| + |\mathbf{x}_3 - \mathbf{e}_3| < \delta.$$

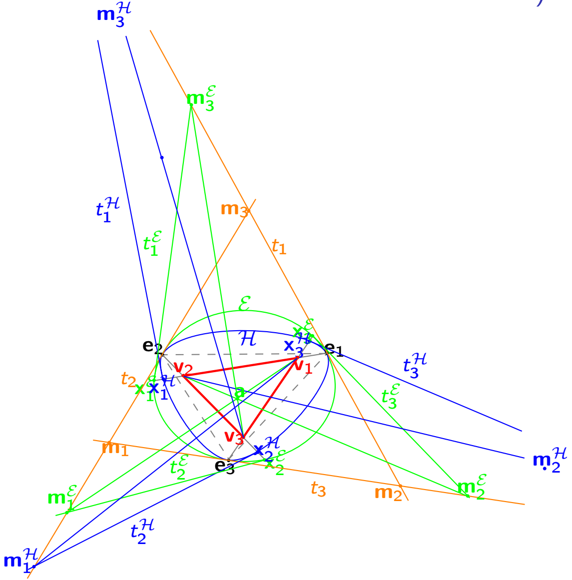
(Karakterizálás az ekvidisztáns centrummal Hilbert-metrikában)



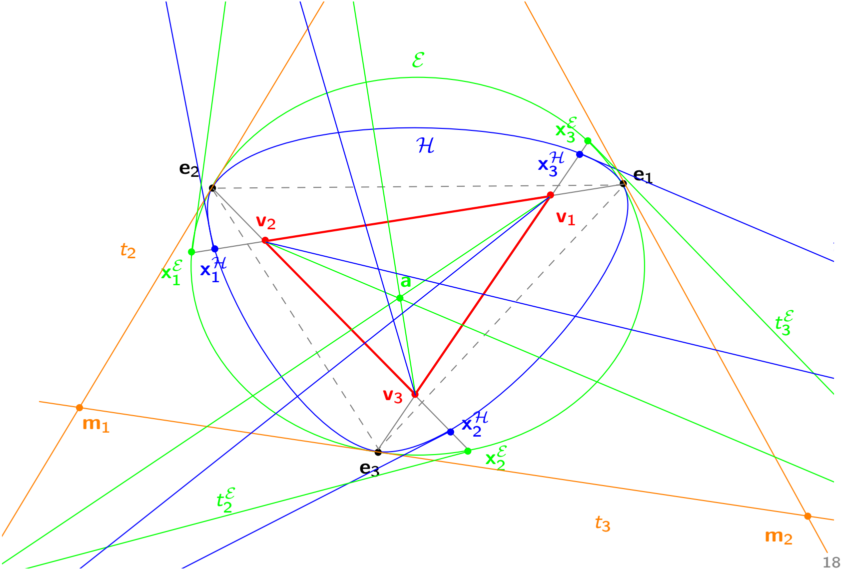
(Karakterizálás az ekvidisztáns centrummal Hilbert-metrikában)



(Karakterizálás az ortocentrummal Hilbert-metrikában)



(Karakterizálás az ortocentrummal Hilbert-metrikában)



Tétel [KJ, 2015]: karakterizáció az ekvidisztáns centrum létezésével

Ha egy Minkowski-geometriában minden NEH oldalfelező merőlegesei konkurrensek, akkor a metrika euklidészi.

Tétel [KJ, 2015]: karakterizáció az ortocentrum létezésével

Ha egy Minkowski-geometriában minden NEH magasságvonalai konkurrensek, akkor a metrika euklidészi.

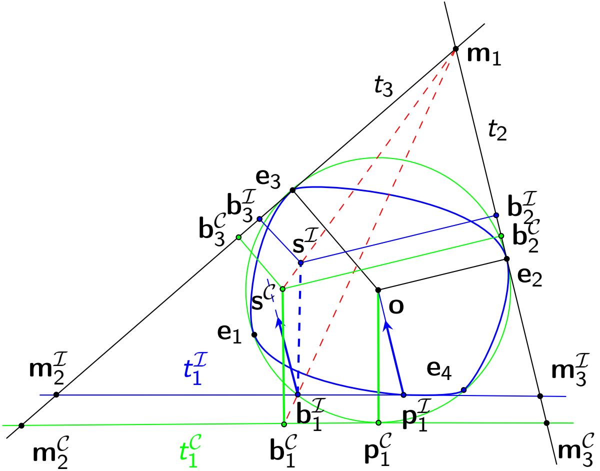
Mindkét tétel érvényes a Minkowski-térben értelmezett mindkét merőlegesség esetében (bal-merőlegesség, illetve a jobb-merőlegesség).

Cikk elfogadva, Acta Sci. Math, Szeged

Bizonyítási vázlat a jobb-ekvidisztáns centrum létezésének esetére.

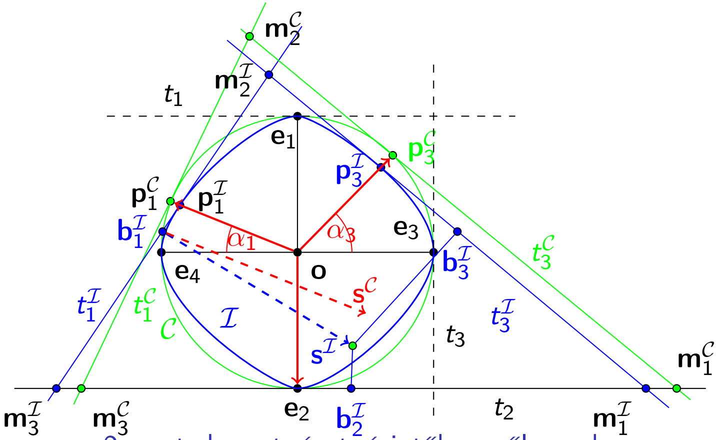
1. elegendő síkban igazolni (Gruber-lemma)
2. $(\mathcal{I}', \mathcal{E})$: (indikátrix,Löwner—John-ellipszis)
3. affinitással: $(\mathcal{I}', \mathcal{E}) \rightarrow (\mathcal{I}, \mathcal{C})$: (CSzSzKG,kör)
4. $\mathcal{I}$-érintők jobb-merőlegessége $\rightarrow$ euklidészi merőlegesség
5. $|\partial\mathcal{I} \cap \partial\mathcal{C}| \geq 5 \Rightarrow \exists$ közös érintési pontbeli érintők $t_1 \parallel t_2$, $t_3 \not\perp t_2$
6. $\mathcal{C}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4) \neq \mathcal{I}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)$
7. $\exists\ \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)\ \exists\ \mathbf{p}_1^{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4)$:
   - $\mathbf{p}_1^{\mathcal{I}} \nparallel \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$, $t_1^{\mathcal{I}} \parallel t_1^{\mathcal{C}}$ (Lemma),
   - $t_1^{\mathcal{I}}, t_1^{\mathcal{C}}$ metszi t_2, t_3-t
   - $\mathbf{p}_1^{\mathcal{I}}, \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$ nem merőleges t_2, t_3-ra
8. $\mathcal{C}$ érintők háromszöge: OFM-ek konkurrensek
9. $\mathcal{I}$ érintők háromszöge: OFM-ek konkurrensek
10. $|\partial\mathcal{I} \cap \partial\mathcal{C}| \ngeq 5$ (alesetekkel) ...

Euklideszi metrika jellemzése jobb-ekvidisztáns centrum létezésével



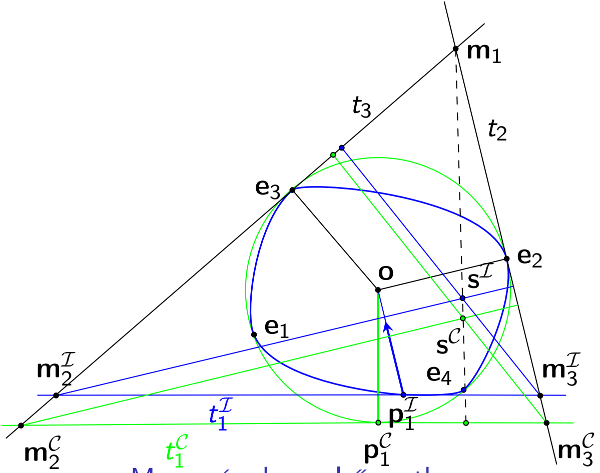
Jobb-oldalfelező merőlegesek (ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} \neq \mathbf{p}_1^{\mathcal{C}}$)

Euklideszi metrika jellemzése jobb-ekvidisztáns centrum létezésével



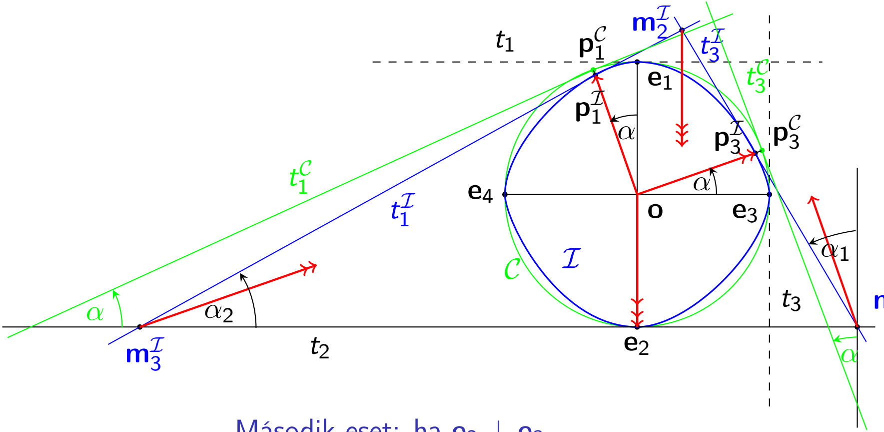
2. eset: ha a t_3 és t_2 érintők merőlegesek

Euklideszi metrika jellemzése jobb-ortocentrum létezésével



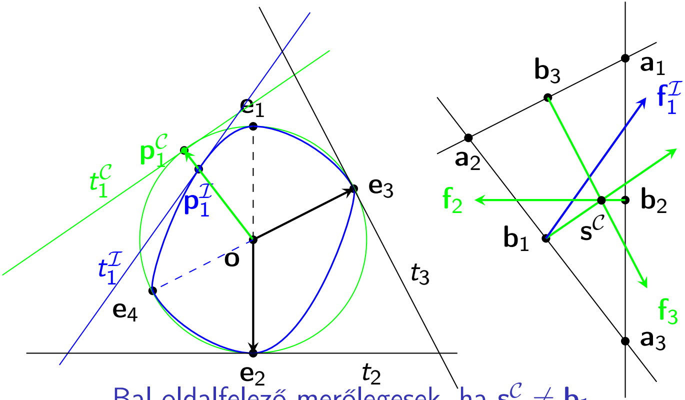
Magasságok az első esetben

Euklideszi metrika jellemzése jobb-ortocentrum létezésével



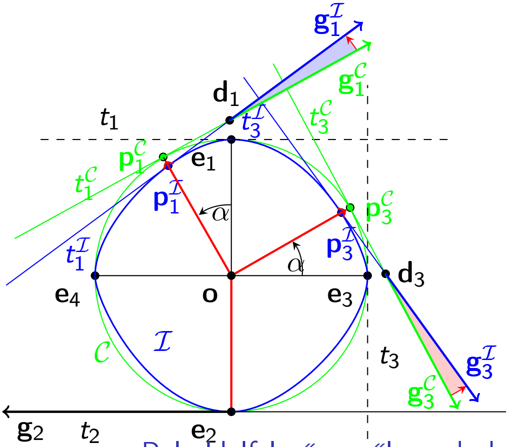
Második eset: ha $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$.

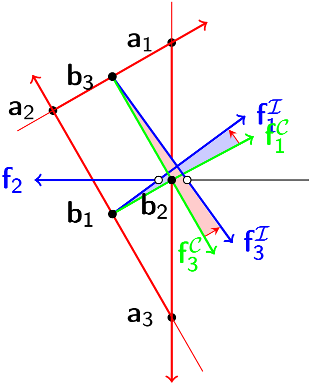
Euklideszi metrika jellemzése bal-ekvidisztáns centrum létezésével



Bal-oldalfelező merőlegesek, ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} \neq \mathbf{b}_1$.

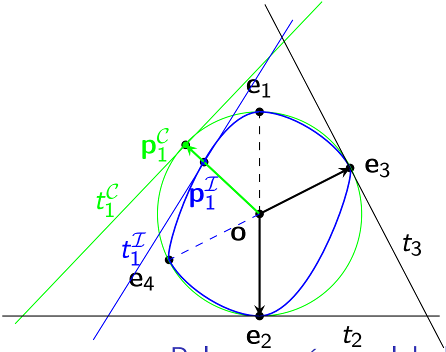
Euklideszi metrika jellemzése bal-ekvidisztáns centrum létezésével

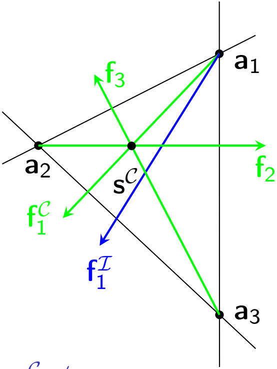




Bal-oldalfelező merőlegesek, ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} = \mathbf{b}_1$.

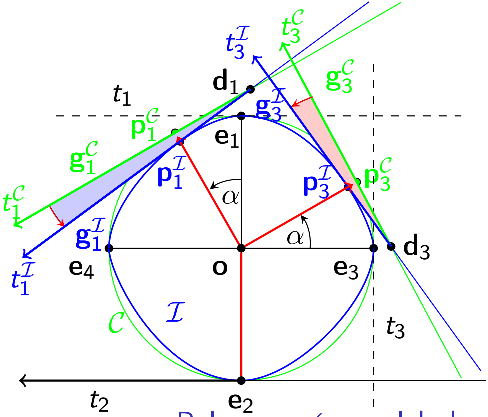
Euklidészi metrika jellemzése bal-ortocentrum létezésével

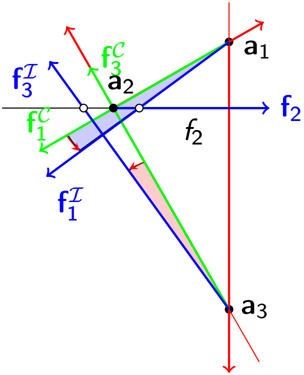




Bal-magasságvonalak, ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} \neq \mathbf{a}_2$

Euklidészi metrika jellemzése bal-ortocentrum létezésével





Bal-magasságvonalak, ha $\mathbf{s}^{\mathcal{C}} = \mathbf{a}_2$.

Hivatkozások

1. P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag, (2007)
2. P. M. Gruber and F. E. Schuster, An arithmetic proof of John's ellipsoid theorem, *Arch. Math.* 85 (2005), 82–88.
3. D. Hilbert, Mathematical problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37(2001), 407 – 436.
4. G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Graden die Kürzestens sind, *Math. Ann.* (57) (1903), 231-264.
5. Kiss G. és Szőnyi T., *Véges geometriák*, Polygon, Szeged, (2001)
6. J. Kozma, Characterization of Euclidean Geometry by existence of circumcenter or othocenter, *Acta SCI. Math. Szeged* (elfogadva)
7. J. Kozma, Á. Kurusa, Ceva's and Menelaus' theorems characterize the hyperbolic geometry among Hilbert geometries, *Journal of Geometry* 10:(10) Paper 10.1007/s00022-014-0258-7. (2015)
8. J. Kozma, Á. Kurusa, Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 10:(10) Paper 10.1007/s13366-014-0233-3. (2014)
9. B. Segre, Ovals in a finite projective plane, *Can. J. Math.* 7 (1955), 414?416. doi:10.4153/CJM-1955-045-x
10. Z. I. Szabó, Hilbert's fourth problem I, Adv. Math. 59 (1986), 185-301.

Köszönöm a figyelmet!