Meghatároznak-e egy szimplexben fekvő pontot a csúcsoktól mért távolságok?

Gehér György Pál

MTA-SZTE Analízis és Sztochasztika Kutatócsoport
és
MTA-DE "Lendület" Funkcionálanalízis Kutatócsoport

Kerékjártó Béla Geometria Szeminárium

Szeged, november 5.

Egy elemi észrevétel

Legyen E egy valós belsőszorzat tér, melyen a norma: $|\cdot|$. Tegyük fel, hogy $2 \leq d \leq \dim E$. Rögzítsünk le egy $d+1$ pontból álló affin függetelen pontrendszert: $p_0, p_1, \ldots p_d \in E$. Ekkor a következő igaz:

$$\left. \begin{array}{c} x_1, x_2 \in \mathrm{Conv}\,(p_0, p_1, \ldots p_d) \\ \& \\ |x_1 - p_j| = |x_2 - p_j| \quad (j = 0, 1, \ldots d) \end{array} \right\} \implies \quad x_1 = x_2.$$

Egy természetesen adódó, de nem triviális probléma

Legyen X egy valós normált tér a $\|\cdot\|$ normával. Tegyük fel, hogy $2 \leq d \leq \dim X$. Mikor igaz az, hogy bármely $d+1$ pontból álló affin független $p_0, p_1, \dots p_d \in X$ pontrendszer esetén igaz az alábbi implikáció:

$$\left.\begin{array}{c} x_1, x_2 \in \mathrm{Conv}\,(p_0, p_1, \dots p_d) \\ \& \\ \|x_1 - p_j\| = \|x_2 - p_j\| \quad (j = 0, 1, \dots d) \end{array}\right\} \implies \quad x_1 = x_2?$$

A rezolvens halmaz

Azt mondjuk, hogy a $P \subset X$ halmaz rezolválja az $S \subset X$ halmazt, ha a következő teljesül:

$$\left.\begin{array}{c} x_1, x_2 \in S \\ \& \\ \|x_1 - p\| = \|x_2 - p\| \quad (p \in P) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

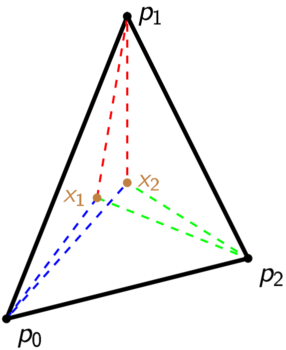
- 1953: Blumenthal vizsgája ezt a fogalmat metrikus tereken.
- 1975: a gráfelméleszek elkezdik használni ezt a fogalmat gráfokon.
- Később: alkalmazzák ezt a fogalmat a robotikában, informatikában, kémiában és biológiában.
- Matematikában: ez a fogalom természetesen jön elő akkor, ha metrikus terek (szürjektív) izometriáit akarjuk leírni.
- Kvantummechanikában fontos operátor osztályok izometriáit le lehet így írni.

Az előző probléma átfoglamazása

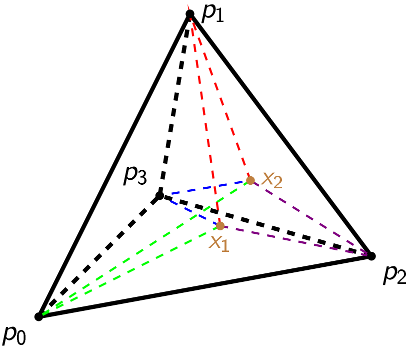
Jellemezzük azon valós, legalább d-dimenziós normált tereket, melyekre teljesül, hogy bármely $d+1$ pontból álló affin független $p_0, p_1, \dots p_d \in X$ pontrendszer esetén $\{p_0, p_1, \dots p_d\}$ rezolválja $\mathrm{Conv}\,(p_0, p_1, \dots p_d)$-ét!

Az ilyen tereket fogjuk (SRSd) tereknek hívni.

Ami egy (SRS2)/(SRS3) térben NEM történhet meg



NEM (SRS2)



NEM (SRS3)

Felmerülő kérdések

- Ugyanazok-e az (SRSd) terek és az (SRSd') terek minden $d, d' \geq 2$ esetén?
- Mi történik, ha konvex burok helyett affin burkot veszünk?
- Komplex normált tereken mi a jellemzése ezeknek a tereknek?

Elég hamar kijön az (SRS2) jellemzése

Geometriai megfontolásokkal kb. egy hét alatt jöttem rá a következő jellemzésre:

Tétel

Egy valós, legalább két dimenziós X normált tér pontosan akkor teljesíti az (SRS2) tulajdonságot, ha a norma szigorúan konvex.

Az ember azt érzi, hogy hasonlóan, ugyanennek kellene lennie a jellemzésnek nagyobb d-ék esetén.

Elég hamar kijön az (SRS2) jellemzése

Geometriai megfontolásokkal kb. egy hét alatt jöttem rá a következő jellemzésre:

Tétel

Egy valós, legalább két dimenziós X normált tér pontosan akkor teljesíti az (SRS2) tulajdonságot, ha a norma szigorúan konvex.

Az ember azt érzi, hogy hasonlóan, ugyanennek kellene lennie a jellemzésnek nagyobb d-ék esetén.

EZ AZONBAN NAGYON NEM ÍGY VAN!

A probléma egy hasznos átfogalmazása

Két különböző $x_1, x_2 \in X$ ponthoz tartozó **biszektort** a következőképp definiáljuk:

$$B(x_1, x_2) = \{z \in X : \|x_1 - z\| = \|x_2 - z\|\}.$$

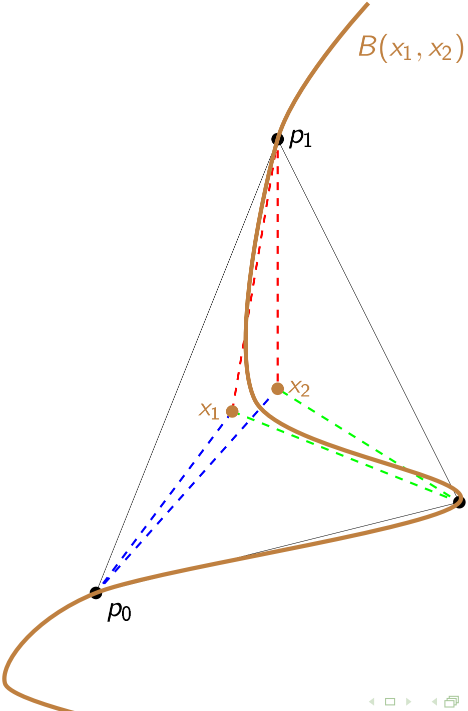
Észrevétel

Egy X normált térnek ($\dim X \geq d$) megvan az (SRSd) tulajdonsága

$$\iff$$

tetszőleges $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ esetén a $B(x_1, x_2)$ biszektor NEM tartalmaz olyan $d+1$ affin független pontból álló rendszert, melynek konvex burkában benne van x_1 és x_2.

Tehát azt kell vizsgálnunk, hogy a biszektorok hogy viselkednek.


$B(x_1, x_2)$
p_1
x_2
x_1
p_2
p_0

Biszektorok 2 dimenzióban

Észrevétel

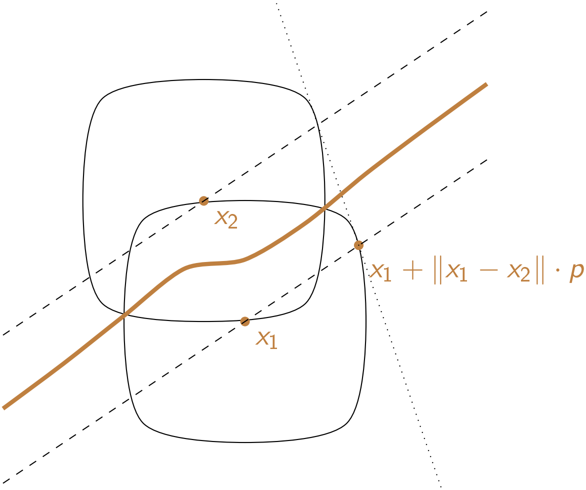
Könnyen látható, hogy minden (SRS2) tér automatikusan szigorúan konvex kell legyen.

Feltesszük, hogy X szigorúan konvex tér.

Állítás

Jelölje S az egységkorvanalat, s legyen p és $-p \in S$ az a két egyértelműen meghatározott pont, ahol van $x_1 - x_2$ irányú támaszegyenes. Ekkor

- *$B(x_1, x_2)$-őt szigorúan közrefogják az x_1 és x_2-őn átmenő, p-vel párhuzamos egyenesek,*
- *minden $x_1 - x_2$ irányú egyenes pontosan egyszer metszi $B(x_1, x_2)$-őt.*


x_2
x_1
$x_1 + \|x_1 - x_2\| \cdot p$

Mivel a biszektor a szigorúan konvex esetben így viselkedik,

$$\mathrm{Conv}\,(B(x_1,x_2)) \subseteq \text{(a két egyenes közti nyílt tartomány)}$$

és

$$\text{(a két egyenes közti nyílt tartomány)} \bigcap \{x_1, x_2\} = \emptyset,$$

ezért kapjuk a már említett állítást:

Tétel

Egy valós, legalább két dimenziós X normált tér pontosan akkor teljesíti az (SRS2) tulajdonságot, ha a norma szigorúan konvex.

Biszektorok d dimenzióban ($d > 2$)

Észrevétel

Viszonylag könnyen adódik, hogy minden (SRSd) tér automatikusan szigorúan konvex kell legyen ($d > 2$).

A biszektorokat két-dimenziós szeletek egyessítéseként kapjuk meg: Tekintsünk egy olyan $d-1$ dimenziós M aleret, melyre $x_1 - x_2 \notin M$ teljesül. Ekkor

$$B(x_1, x_2) = \bigcup_{v \in S \cap M} \left(B(x_1, x_2) \cap \mathrm{Aff}(x_1, x_2, x_1 + v) \right).$$

Legyen p_v és $-p_v \in S \cap \mathrm{Aff}(x_1, x_2, v)$ az a két, egyértelműen meghatározott vektor/pont, ahol van az S-nek olyan támaszhipersíkja, mely tartalmaz $x_1 - x_2$-vel párhuzamos egyenest.

Jelölje $\overline{B}$ a zárt egységgömböt

Tétel

Legyen $d \geq 3$. Ekkor:

a tér (SRSd) tér

$$\Longleftrightarrow$$

tetszőlegesen választott két különböző x_1, x_2 pontok esetén az előbb említett p_v vektorok egy hipersíkra esnek,

$$\Longleftrightarrow$$

Jelölje $\overline{B}$ a zárt egységgömböt

Tétel

Legyen $d \geq 3$. Ekkor:

a tér (SRSd) tér

$$\Longleftrightarrow$$

tetszőlegesen választott két különböző x_1, x_2 pontok esetén az előbb említett p_v vektorok egy hipersíkra esnek,

$$\Longleftrightarrow$$

minden $0 \neq u$ vektor esetén létezik egy H hipersík, mellyel az $\cup_{t\in\mathbb{R}}(H \cap \overline{B}) + (t \cdot u)$ cilinder tartalmazza $\overline{B}$.

A fő tétel

Ez utóbbi Blaschke karakterizációja az ellipszoidokra (legalább 3 dimenzió esetén). Ezért kapjuk, hogy:

A fő tétel

Ez utóbbi Blaschke karakterizációja az ellipszoidokra (legalább 3 dimenzió esetén). Ezért kapjuk, hogy:

Tétel

Legyen $d \geq 3$. Ekkor:

a tér (SRSd) tér

$$\Longleftrightarrow$$

belsőszorzat tér.

Konvex geometriai átfogalmazások

Tétel

Legyen $m \geq 2$, K *egy konvex, kompakt halmaz* $\mathbb{R}^m$*-ben, melynek az origó belső pontja és* $K = -K$. *Ekkor:*

bármely $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ *számok és* $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ *lineárisan független vektorok esetén a*

$$\mathrm{Conv}\,(0, v_1, v_2) \cap (\partial K) \cap (v_1 + \lambda_1 \cdot \partial K) \cap (v_2 + \lambda_2 \cdot \partial K)$$

metszet elemszáma ≤ 1,

$$\iff$$

a K *test szigorúan konvex.*

Konvex geometriai átfogalmazások (folyt.)

Tétel

Legyen $m \geq d \geq 3$, K egy konvex, kompakt halmaz $\mathbb{R}^m$-ben, melynek az origó belső pontja és $K = -K$. Ekkor:

tetszőleges $\lambda_1, \dots \lambda_d \in (0, \infty)$ számok és $v_1, \dots v_d \in \mathbb{R}^m$ lineárisan független vektorok esetén a

$$\mathrm{Conv}\,(0, v_1, \dots v_d) \cap (\partial K) \cap \left(\cap_{j=1}^{d} (v_j + \lambda_j \cdot \partial K) \right)$$

metszet legfeljebb 1 elemű,

$$\Longleftrightarrow$$

a K test ellipszoid.

Kérdés: Mi történik a fenti jellemzésekkel, ha a centrál szimmetrikusságot nem tesszük fel?

Konvex kombináció helyett affin kombináció?

Következmény (G. K. Kalisch and E. G. Straus $\subsetneq$)

Legyen X valós normált tér, melynek dimenziója legalább $d \geq 2$. Ekkor:

bármley $d+1$ affin független pont rezolválja az affin burkukat

$$\Longleftrightarrow$$

a norma belsőszorzatból származik

Komplex normált terek

Tétel

Legyen X egy komplex normált tér. Ekkor:
X egy (SRS2) tér $\iff$ szigorúan konvex.

Ok: A szigorú konvexitás egy "valós tulajdonság".

Komplex normált terek

Tétel

Legyen X egy komplex normált tér. Ekkor:
X egy (SRS2) tér $\iff$ szigorúan konvex.

Ok: A szigorú konvexitás egy ”valós tulajdonság”.

Tétel

Legyen $d \geq 3$, X pedig egy komplex normált tér. Ekkor:
a tér (SRSd) tér $\iff$ belsőszorzat tér.

Ok: A von Neumann-Jordan tétel miatt egy komplex normált tér pontosan akkor belsőszorzat tér, ha valós normált térként tekintve belsőszorzat tér.

D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications, **20**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

S. Bau and A. F. Beardon, The metric dimension of metric spaces, *Comput. Methods Funct. Theory* **13** (2013), 295–305.

L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1953.

W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2te Aufl. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1956

Á. G. Horváth, On bisectors in Minkowski normed spaces, *Acta Math. Hungar.* **89** (2000), 233–246.

Gy. P. Gehér, An elementary proof for the non-bijective version of Wigner's theorem, *Phys. Lett. A*, **378** (2014), 2054–2057.

Gy. P. Gehér, Is it possible to determine a point lying in a simplex if we know the distances from the vertices?, submitted.

P. Jordan and J. Von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, *Ann. of Math. (2)* **36**, (1935), 719–723.

G. K. Kalisch and E. G. Straus, On the determination of points in a Banach space by their distances from the points of a given set, *An. Acad. Brasil Ci.* **29** (1957), 501–519.

- H. Martini, K. J. Swanepoel and G. Weifi, The geometry of Minkowski spaces - a survey part I., *Expo. Math.* **19** (2001), 97–142.
- H. Martini and K. J. Swanepoel, The geometry of Minkowski spaces - a survey part II., *Expo. Math.* **22** (2004), 93–144.
- L. Molnár and G. Nagy, Isometries and relative entropy preserving maps on density operators, *Linear Multilinear Algebra* **60** (2012), 93–108.
- L. Molnár and W. Timmermann, Maps on quantum states preserving the Jensen-Shannon divergence, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), Article ID 015301, 9 pp.

Köszönöm a Figyelmet!