


**JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
GEOMETRIA TANSZÉK**

Rácsgeometria
SZAKDOLGOZAT

Konzulens: Dr. Kincses János

**Készítette: Bódi Szilvia
V. mat-fiz. szakos
hallgató**

**SZEGED
2000**



TARTALOM

I.	Elméleti összefoglaló.....
I/1.	A négyzetrács.....
I/2.	Egyenlő oldalú rácssokszögek.....
I/3.	A rácssokszögek területe.....
I/4.	Síkbeli tartományok rácspontjai.....
I/5.	Rácspontok az egyenesen.....
I/6.	Rácspontok és racionális számok.....
I/7.	Kör a négyzetrácson.....
II.	Feladatok a rácsgéometria köréből.....
	Irodalom

RÁCSGEOMETRIA

I. Elméleti összefoglaló

A geometriának ez a határterülete részben a számelméleti tételek és összefüggések geometriai jellemzését adja, részben pedig geometriai jellegű tételeket vizsgál számelméleti úton. A geometria szemléletessége sok esetben ad ötletet a számelméleti kérdések megoldásához.

I/1. A négyzetrács. A számelmélet és a geometria összekapcsolásának közvetlen módszerét a koordinátagometria szolgáltatja. Azok a pontok, amelyeknek a koordinátái egy síkbeli koordináta-rendszerben egész számok, a *rácspontok*, a rácspontok összessége a négyzetrács. A négyzetoldalak két, egymásra merőleges egyenesekből álló egyeneshalmazt alkotnak, ezek az egyenesek a *rács főegyenesei*. A koordináta-rendszer i és j alapvektorai egy-egy egységnégyzetet feszítenek ki, ennek eltolásával kapjuk az *elemi rácsnégyzeteket*, ezek csúcsai rácspontok.

A rácspontok helyvektorai $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{v}$ alakban állnak elő, ahol x és y egész számok. Az AB szakaszt *rácsszakasznak* mondjuk, ha A és B rácspontok. Egy $\mathbf{v}$ rácsvektor, ha koordinátái egészek.

A négyzetrács alapvető tulajdonságai:

A) A rácsszakaszok között van legrövidebb hosszúságú (ennek hosszát egységnyi-nek választjuk).

B) A rácsot valamely rácspont körül 90° -kal elforgatva a rács önmagába megy át, azaz minden rácspont 90° -os elforgatottja is rácspont.

C) A rács egy tetszőleges rácsvektorral eltolva önmagába megy át.

D) A rácsot egy tetszőleges rácsszakasz felezőpontjára tükrözve a rács önmagába megy át.

E) A rácsnak egy korlátos alakzaton belül csak véges sok pontja lehet, hiszen a rácspontok koordinátái is az egész számok egy korlátos, tehát véges halmazából valók.

F) A rács önmagának egy részhalmazába megy át, ha egy rácspontból egész számszorosára nagyítjuk.

1/2. Egyenlő oldalú rácssokszögek. A rácssokszög csücsai rácspontok. A rácssokszögek számos érdekes geometriai, ill. számelméleti jellegű tulajdonsággal rendelkeznek. Mindenekelőtt bizonyos típusú rácssokszögek létezését vizsgáljuk meg.

Tétel: *Az egyenlő oldalú rácssokszög oldalszáma páros.*

Egyszerűbb egy ennél általánosabb tételt bizonyítani: *az egyenlő oldalú zárt töröttvonal oldalszáma páros, ha csücsai rácspontok.*

Bizonyítás: Legyenek az n -oldalú zárt töröttvonal valamilyen körüljárás szerint irányított oldalvektorai rendre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$; $\mathbf{v}_i$ koordinátái, (x_i, y_i) egészek, hiszen $\mathbf{v}_i$ rácsvektor. Feltételünk szerint

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

és

$$\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2^2 = \dots - \mathbf{v}_n^2 = a^2.$$

Ezek következménye

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ és } y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0,$$

$$(2) \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \dots = x_n^2 + y_n^2 = a^2$$

Az a^2 egész, és mivel két négyzetszám összege, $4k$, $4k + 1$ vagy $4k + 2$ alakú. Az a^2 csak akkor $4k + 1$ alakú, ha x_i^2 és y_i^2 közül az egyik páros, a másik páratlan, az (1) miatt az x_i -k és az y_i -k között is szükségképpen páros számú páratlannak kell lennie, különben összegük nem lenne páros, ezért az x_i -k és y_i -k között is összesen páros számú a páratlan. A (2)-ben minden négyzetösszegben pontosan egy páratlan van, tehát a négyzetösszegek száma, azaz n , páros.

Ha $a^2 = 4k + 2$ alakú, akkor (2)-ben minden négyzetösszegben két páratlan szám áll, ezért valamennyi x_i páratlan, tehát összegük csak akkor lehet páros, ha n páros.

Ha $a^2 = 4k$ alakú, akkor a (2)-ben a négyzetösszeget mindenütt két páros szám állítja elő, ezért az összes x_i és y_i páros. Válasszuk ki az x_i -k és y_i -k együttes halmazából azt, amelyik 2-nek legalacsonyabb hatványával osztható, mondjuk 2^s -nel, és kicsinyítsük le a rácssokszöget az origóból 2^s -ed részére; így minden sokszögcsúcs ismét rácspontba kerül, de a koordinátáik között már lesz páratlan, így az előző két eset valamelyike áll majd elő, ami azt jelenti, hogy az oldalszám ebben az esetben is páros.

A tétel következménye, hogy *nincs páratlan oldalú szabályos rácssokszög*, vagy más megfogalmazásban: *egy rácspontból kiindulva, és mindig ugyanakkora távolságú rácspontba lépve, csak páros számú lépés után juthatunk vissza a kiindulási pontba.*

A következmény két egyszerű alkalmazása:

1., a sakktáblán a huszár csak páros számú lépéssel tud visszajutni a kiindulási mezőre

2., ha például 35 ember ül öt sorban és hét oszlopban elhelyezett székeken, akkor nem ültethetők át úgy az emberek, hogy mindegyikük a korábbi székének a közvetlen szomszédjára üljön (szomszéd egy szék akkor, ha egy másik szék mellett közvetlenül jobbra vagy balra, avagy előtte vagy mögötte van)

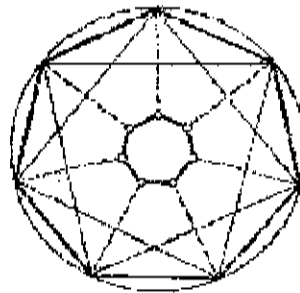
Megjegyzés: Természetesen a székek számára elég annyi kikötést tenni, hogy az páratlan legyen, a sorok és oszlopok számának szorzata pedig éppen a székek számával egyezzen meg.

Visszatérve a szabályos rácssokszögek létezésének kérdésére, megmutatjuk, hogy:

Tétel: *Rácsnégyzeten kívül nincs más szabályos rácssokszög.*

Bizonyítás: Páratlan oldalszámokra már megmutattuk ennek igaz voltát, ebből következik, hogy ha n -nek van páratlan osztója, akkor nem létezik n -oldalú szabályos sokszög: legyen ugyanis p az n -nek egy páratlan osztója, akkor a sokszög minden n/p -edik csúcsát véve, p -oldalú szabályos sokszöget kapnánk, ami lehetetlen. Ezért a már bizonyított tétel eleve kizárja pl. a szabályos rácshatszög (2×3) vagy a szabályos rácstízszög (2×5) létezését.

Nagyon egyszerűen bizonyíthatjuk azonban közvetlenül is, hogy nincs szabályos rácsháromszög, ha $n \neq 4$. (Bizonyításunk az $n = 3$, $n = 6$ esetre nem alkalmazható.) Tegyük fel ugyanis, hogy van egy szabályos n -oldalú rácssokszögünk. Tükrözzük ennek minden csúcsát a két szomszédos csúcsot összekötő átló felezőpontjára (1. ábra).



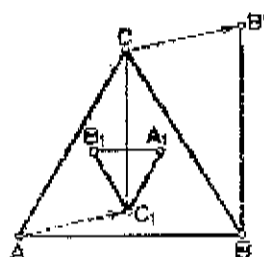
1. ábra

A rácscokszög D) alaptulajdonsága miatt a kapott pontok is rácspontok, sőt szabályos rácsháromszöget alkotnak, mivel az eredeti szabályos sokszög középpontja körül $360^\circ/n$ szöggel elforgatva ezek egymásba mennek át. Az adott sokszögön belül ezért létezik újabb n rácspont, az ezek alkotott sokszögön belül ismét n , és így tovább: azt kapjuk tehát, hogy a sokszögön belül tetszőleges sok rácspont létezik, ami ellentmond a rácscokszög E) alaptulajdonságának.

Bizonyításunk nem alkalmazható az $n = 3, 4, 6$ esetben. Ha ugyanis $n = 3$, a tükrözéssel kapott három pont az eredeti háromszögön kívül van, tehát nem jutunk ellentmondásra; $n = 4$ esetben hasonló a helyzet, mert a tükrözéssel kapott négyzet azonos az eredetivel; ha viszont $n = 6$, a tükröképek egybeesnek, és így a "pontgyártás nem folytatható".

Ha bebizonyítjuk, hogy nincs szabályos rácsháromszög, akkor, mint fentebb megmutattuk, szabályos rácshatszög sem lehetséges, ezért most az utóbbi bizonyítás

Tegyük fel ugyanis, hogy van egy ABC szabályos rácsháromszög
(2. ábra).



Az A csúcsot B körül 90° -kal elforgatva egy B' rácsponthoz jutunk (B' legyen AB -nek C -vel egyező oldalán), az A pontot a CB' rácsvektorral eltolva olyan C_1 rácsponthoz jutunk, amely ABC belsejében van, rajta van a C -n átmenő szimmetriatengelyen, ott nem esik ABC középpontjába. Hasonlóan szerkeszthetünk A_1 , B_1 rácspontokat az A -hoz, ill. B -hez tartozó szimmetriatengelyeken is, és ezek szabályos rácsháromszöget alkotnak, hiszen ABC középpontja körül 120° -kal elforgatva egymásba mennek át. $A_1B_1C_1$ -re megismételve az előbbi szerkesztést $A_1B_1C_1$ belsejében is kapunk egy újabb szabályos rácsháromszöget, és így tovább; ismét ellentmondásra jutunk a rácscokk E) alaptulajdonságával.

I/3. A rácssokszögek területe. A rácssokszög területe egyszerűbb esetben rendszerint nagyon könnyen meghatározható, mert csak azt kell megszámolnunk, hány elemi rácsnégyszetet tartalmaz. Meglepő azonban, hogy bármilyen bonyolult rácssokszög területe is csupán attól függ, hogy hány rácspontot tartalmaz a határán, illetve a belsejében. Ennek bizonyításához először az üres rácsháromszögek területét vizsgáljuk meg.

Egy rácsháromszöget *üresnek* nevezünk, ha a csúcsokon kívül sem a határán, sem a belsejében nem tartalmaz rácspontot. Először megmutatjuk, hogy:

Tétel: *minden rácssokszög felbontható üres rácsháromszögekre.*

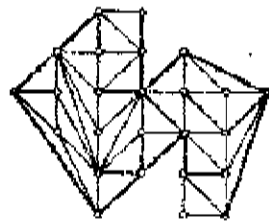
Bizonyítás: Mivel minden sokszög felbontható átlókkal háromszögekre, tehát rácsháromszögekre, ezért elegendő belátni, hogy minden háromszög szétvágható üres rácsháromszögekre. A szétvágásra konkrét eljárást adhatunk meg. Ha van a háromszögnek belső rácspontja, ezt kössük össze a csúcsokkal, ezáltal olyan három rácsháromszöget kapunk, amelyekben a belső rácspontok száma kisebb az eredetinél. Folytassuk ezt az eljárásunkat az új részháromszögekre, a rácspontok E) alaptulajdonsága miatt véges sok lépés után elfogynak a belső rácspontok, a felosztás háromszögeinek most már legfeljebb a határán van rácspont.

Ha egy háromszögnek csak a határán van rácspont, kössük össze az egyik oldalon levő belső rácspontokat a szemközti csúcsokkal. Az újonnan kapott háromszögek közül legfeljebb a két szélső tartalmazhat legfeljebb egyik oldalán — belső rácspontokat, ezekre az előző módszert alkalmazva már a teljes háromszög üres rácsháromszögre bomlik.

Egy rácssokszöget általában többféle módon vághatunk szét üres rácsháromszögekre; éppen ezért meglepő, hogy:

Tétel: *egy rácssokszög üres rácsháromszögekre való felbontásánál a háromszögek száma független a felbontás módjától.*

Bizonyítás: Legyen ugyanis az n -oldalú rácssokszögben a belső rácspontok száma b , a határán levők száma pedig (a csúcsokat is beleértve) h . Tegyük fel, hogy a sokszöget N üres rácsháromszögre bontottuk fel. Az összes üres rácsháromszög szögei együttesen $N \cdot 180^\circ$ -ot tesznek ki. Ez összetevődik a sokszög szögeinek összegéből $[(n - 2) \cdot 180^\circ]$, a belső pontok körüli szögekből ($b \cdot 360^\circ$) és az oldalak belső pontjaiban fellépő 180° -os szögekből $[(h - n) \cdot 180^\circ]$ (3. ábra),



3. ábra

tehát

$$N \cdot 180^\circ = (n - 2)180^\circ + b \cdot 360^\circ + (h - n)180^\circ,$$

azaz

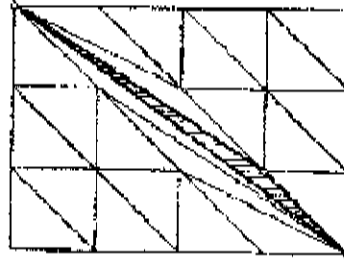
$$(3) \quad N = 2b + h - 2,$$

N tehát valóban csak b -től és h -től függ.

Ez az eredményünk módot ad a rácssokszögek területének egyszerű meghatározására, ha megmutatjuk, hogy:

Tétel: minden üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$ -del egyenlő.

Bizonyítás: Foglalkozunk ugyanis egy tetszőleges üres rácsháromszöget egy főegyenesekkel határolt téglalapha úgy, hogy a háromszögnek legalább két csúcsa a téglalap határán legyen (4. ábra).



4. ábra

Ha a téglalaphoz levágunk néhány olyan derékszögű háromszöget, amelyeknek befogói főegyenesen vannak, tehát egész a hosszuk, maradékon az üres rácsháromszöget kapjuk. Mivel pedig a téglalap területe egész, a derékszögű háromszögeké is egész vagy egész szám fele, ezért az üres rácsháromszög területe is egész vagy egész szám fele; ebből következik, hogy az üres rácsháromszög területe legalább $\frac{1}{2}$.

Osszuk most fel az előbbi téglalapot üres rácsháromszögekre először úgy, hogy az adott üres rácsháromszög is része legyen a felbontásnak, és legyen az üres rácsháromszögek száma N . Majd vágjuk szét üres egyenlő szárú derékszögű rácsháromszögekre (az elemi rácsnégyzetek felére), a (3) szerint ezek száma is N , tehát a téglalap területe $\frac{N}{2}$. Akkor az első felbontásban is minden háromszögnek $\frac{1}{2}$

területűnek kell lennie, mivelhogy a téglalap területe $N \cdot \frac{1}{2}$, ha lenne az N háromszög között $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb területű, akkor kellene lennie $\frac{1}{2}$ -nél kisebb területűnek is, ami előbbi eredményünk szerint lehetetlen.

Most már megállapíthatjuk, hogy:

Tétel: *ha a rácssokszög belső rácspontjainak száma b , határán pedig h számú rácspont van, akkor területe*

$$(4) \quad t = b + 1 + \frac{h}{2},$$

hiszen (3) szerint $2b + 2 + h$ üres rácsháromszögre bontható fel, és mindegyik háromszög területe $\frac{1}{2}$.

Eredményünk néhány egyszerű következményét adjuk most meg.

Tétel: *Ha egy rácsháromszögnek a határán nincs rácspont és belsejében csak egy van, akkor ez a háromszög súlypontja.*

Bizonyítás: Ennek belátására tegyük fel, hogy ABC a szóban forgó rácsháromszög, és egyetlen belső rácspontja S . Az ABS , BCS , CAS üres rácsháromszögek, tehát mindegyikük területe $\frac{1}{2}$, és ez harmada az egész háromszög területének, ennek következtében az ABS -nek az S -hez tartozó magassága harmada az

ABC rácsháromszög C -hez tartozó magasságának, s így az S -en át AB -vel húzott párhuzamos átmegy az ABC rácsháromszög súlypontján. Ezek szerint S olyan pont, amelyen át bármelyik háromszögoldallal húzott párhuzamos átmegy a súlyponton, ez azonban csak úgy lehetséges, ha maga S a súlypont.

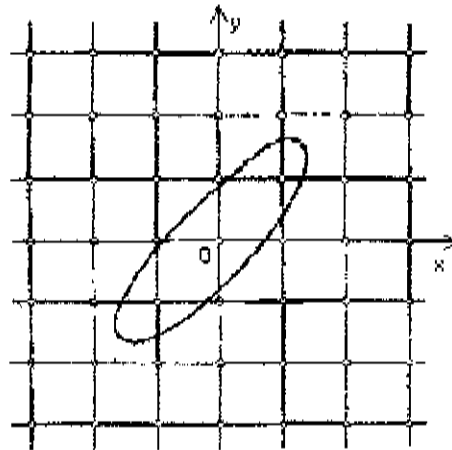
A (4)-nek egyszerű következménye, hogy egy rácssokszög területe akkor és csak akkor egész, ha határán páros számú rácspont van. Például, ha egy rácsháromszög területe egész, akkor legalább az egyik oldalán kell lennie belső rácspontnak.

Az üres rácsparalelogramma területe 1, mivel két üres rácsháromszögből áll, és megfordítva: ha egy üres rácsháromszöget egyik oldalának felezőpontjaira tükrözzünk, akkor üres rácsparalelogrammát kapunk. A (4)-ből természetesen adódik, hogy minden rácssokszög területének kétszerese egész szám.

I/4. Síkbeli tartományok rácspontjai. Már eddigi összefüggéseink között is több olyan volt, amely egy tartomány területe és rácspontjai között létesít kapcsolatot. Ebben a témakörben egyik legnevezetesebb — éppen számelméleti alkalmazásai miatt — a Minkowskitól származó tétel:

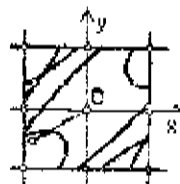
Ha egy origóra szimmetrikus T konvex tartomány területe nagyobb 4-nél, akkor tartalmaz az origón kívül is rácspontot.

Bizonyítás: Osszuk fel a négyzetrácsot az $x = 1, x = -1, x = 3, x = -3, x = 5, x = -5, \dots$ és az $y = 1, y = -1, y = 3, y = -3, y = 5, y = -5, \dots$ egyenesekkel 2×2 -es négyzetekre (5. ábra),



5. ábra

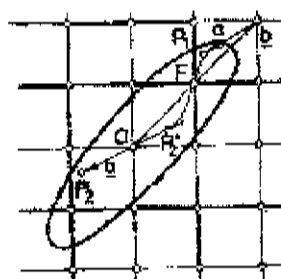
és válasszuk ki azokat, amelyek tartalmaznak pontot T -ből. Toljuk ezeket rá az origót tartalmazó középső négyzetre. Mivel T területe nagyobb 4-nél, a középső négyzetben lesz olyan területrész, amely legalább kétszeresen lesz fedve, válasszunk ki ezen egy origótól különböző P pontot, és legyen P helyvektora a (6. ábra).



6. ábra

Toljuk most vissza a négyzeteket P -vel és az a vektorral együtt eredeti helyzetükbe. A P -t tartalmazó két négyzet közül az egyik középpontjának helyvektora legyen b , a másiké c ; mind b , mind c koordinátái páros számok. A visszatolt P pont helyzetei legyenek P_1 és P_2 , helyvektoraik $b+a$ és $c+a$. T középpontos szimmetriája miatt P_2 -nek O -ra vonatkozó tükörképe, P_2' is T -ben van, és helyvektora $-c-a$. A P_1P_2'

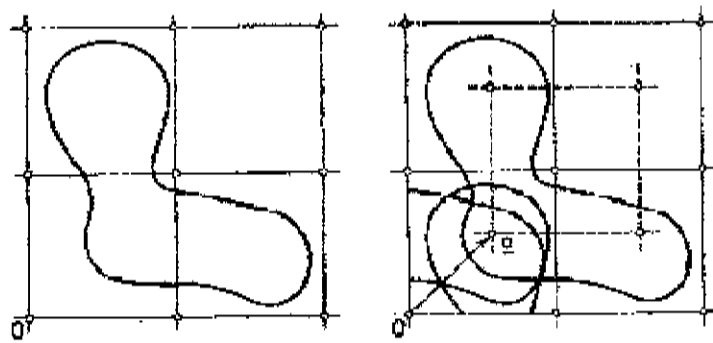
szakasz F felezőpontja T konvex volta miatt benne van T -ben; F helyvektora, $\mathbf{b}-\mathbf{c}/2$ rácsvektor, mert $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ koordinátái párosak, F tehát rácspon; F nem azonos az origóval, mert $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, s így állításunkat bizonyítottuk (7. ábra, a $\mathbf{c}$ ezen 0).



Némileg hasonló tartalmú Blichfeldt tétele:

Ha egy síkbeli T tartomány területe nagyobb, mint n (pozitív egész), akkor eltolható úgy, hogy $n + 1$ rácspon; a belsejében tartalmazzon.

A bizonyításnál az előzőhöz hasonló gondolatmenetet használunk. Az összes olyan elemi rácsnégyzetet, amelyben van pontja T -nek, a benne lévő tartományrészekkel együtt toljuk el az origót és az $(1, 1)$ pontot átellenes csúcsokként tartalmazó rácsnégyzetbe. Mivel T területe n -nél nagyobb, lesz olyan belső P pont ebben az elemi négyzetben, amelyet legalább $n + 1$ összetolt tartományrész tartalmaz. Legyen ennek helyvektora $\mathbf{a}$. Tolvuk most vissza az elemi négyzeteket eredeti helyzetükbe, legyenek ennek a visszatolásnak a vektorai $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{n+1}$ rácsvektorok. A P pont megfelelőinek visszatolljai a $\mathbf{p}_1+\mathbf{a}, \mathbf{p}_2+\mathbf{a}, \dots, \mathbf{p}_{n+1}+\mathbf{a}$ helyvektorú pontokba kerülnek, ezek a pontok mind belső pontjai T -nek. Tolvuk most el a T -t a $-\mathbf{a}$ vektorral, az előbbi belső pontok eloltjainak helyvektorai rendre $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{n+1}$ lesznek, tehát rácspon; T ebben a helyzetében ezért tartalmaz legalább $n + 1$ rácspon; (8. ábra).



8. ábra

Több rácspont tartalmazását általában már nem tudjuk biztosítani, ugyanis egy egységnyi négyzet egyik oldalát igen kis szakasszal eltolva olyan, 1-nél nagyobb területű tartományt kapunk, amely belsejében legfeljebb 2 rácspontot tartalmazhat.

Azonban igaz a következő:

Tétel: *Ha egy tartomány területe 1-nél kisebb, eltolható úgy, hogy ne tartalmazzon belsejében rácspontot.*

Bizonyítás: Foglaljuk be ugyanis T -t egy, a rács fővonalai által határolt $n \times n$ -es N rácsnégyzetbe, és jelöljük $\bar{N}$ -sal azt a tartományt, amelyet N -ből T kivágásával nyerünk. $\bar{N}$ területe nagyobb, mint $n^2 - 1$, ezért az előző tételünk szerint eltolható úgy, hogy belsejében n^2 rácspontot tartalmazzon. Egy $n \times n$ -es négyzet, amelynek oldalai a rács fővonaláival párhuzamosak, nem tartalmazhat n^2 -nél több rácspontot, mert a négyzet minden oldalát legfeljebb n főegyenes metszheti, és ezek legfeljebb n^2 rácspontot hozhatnak létre. Az eltolt $\bar{N}$ tehát n^2 rácspontot tartalmaz, tehát a négyzet határán belül az összes rácspontot, T eltoltságában ezért nem lehet rácspont.

I/5. Rácspontok az egyenesen. *Egy tetszőleges rácsponton átmenő egyenesen vagy csak egyetlen rácspont van, vagy végtelen sok.*

Ha ugyanis egy egyenes iránytangense irracionális, az $y = mx$ egyenletet csak a $(0, 0)$ origó elégíti ki. Ha viszont m racionális, mondjuk $\frac{p}{q}$ alakú, akkor $y = \frac{px}{q}$, és ezért végtelen sok rácsponton megy át, mivel az összes (kq, kp) alakú rácspontot tartalmazza, ahol k tetszőleges egész szám. Az origón átmenő egyeneseket egyszerűség kedvéért irracionális, ill. racionális egyeneseknek fogjuk nevezni aszerint, hogy iránytangensük irracionális-e vagy racionális. (Racionálisnak tekintjük az y -tengelyt is.)

A racionális egyeneseken a szomszédos rácspontok egymástól egyenlő távolságra vannak. (A koordinátatengelyekre ez nyilván igaz, ezért feltehetjük, hogy a racionális egyenes ezektől különbözik.)

Legyen ugyanis (a, b) egy racionális egyenes origóhoz legközelebbi egyik rácspontja, az egyenes egyenlete tehát $bx - ay = 0$. Ebben az esetben a és b relatív prímek, mert ha lenne egy $k \neq 1$ közös osztójuk, azaz $a = ka'$, $b = kb'$ (a', b' egész) teljesülne, az (a, b) pontra az origóból $\frac{1}{k}$ arányú kicsinyítést alkalmazva, az egyenesen olyan (a', b') pontot kapnánk, amely közelebb van az origóhoz, mint (a, b) , és ez lehetetlen. A (ka, kb) pontok ($k = 1, 2, \dots$) mind kielégítik az egyenes egyenletét, más rácspontok azonban nem; mert ha pl. (A, B) rajta van az egyenesen, $bA - aB = 0$. Mivel a és b relatív prímek, a osztója bA -nak, tehát A -nak is, ezért $A = ka$ (k egész), de ezt az egyenes egyenletébe helyettesítve $kab = Ba$ adódik, és $a \neq 0$ miatt

$B = kb$, ezért az egyenes minden pontja hozzátartozik a (ka, kb) alakú pontok halmazához.

A racionális egyenesek érdekes tulajdonsága, hogy nem mennek túl közel a többi rácsponthoz, pontosabban:

Ha egy racionális egyenesen a szomszédos rácspontok távolsága d , nincs olyan rácspont, amelynek az egyenestől mért távolsága $\frac{1}{d}$ -nél kisebb lenne.

Legyen ugyanis az egyenesen két szomszédos rácspont A és B , és legyen C az egyenesen kívüli rácspont, amelynek az egyenestől mért távolsága m . Az ABC rácsháromszög területe legalább $\frac{1}{2}$, azaz

$$\frac{dm}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{ebből } m \geq \frac{1}{d}.$$

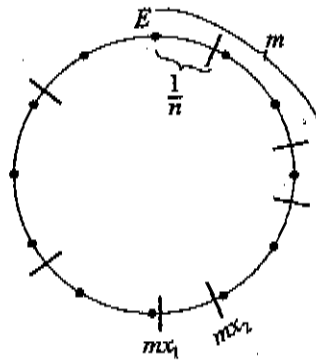
Ezzel szemben az irracionális egyenesek már tetszőlegesen megközelíthetik a rácspontokat, pontosabban:

Tétel: *Bármely irracionális egyeneshez található olyan rácspont, amelynek az egyenestől mért távolsága kisebb egy adott pozitív értéknél.*

Bizonyítás: Ennek bizonyítására használjuk fel, hogy az (x, y) pontnak az $mx = 0$ egyenestől mért távolsága

$$\frac{|mx - y|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Azt kell belátnunk, hogy van olyan (x, y) pont, amelyre a fenti tört értéke tetszőlegesen adott értéknél kisebb (de nem 0). Osszuk fel ehhez az egységi kerületű kört n egyenlő részre, egy - egy beosztás hossza tehát $\frac{1}{n}$.



Mérjük fel az egyik osztópontból, E -ből kiindulva a körvonalra rendre m hosszúságú íveket. Mivel m irracionális, a felméréseivel kapott osztópontok nem eshetnek egybe az első felosztás osztópontjaival, mert ez azt jelentené, hogy valamilyen

k_1 és k_2 pozitív egészekkel $k_1 m = \frac{k_2}{n}$ teljesülne, azaz $m = \frac{k_2}{k_1 n}$ racionális lenne, ami

lehetetlen. Nem lehetséges az sem, hogy az m felméréseivel kapott két osztópont egybeessen, mert ez azt jelentené, hogy valamilyen c_1, c_2, c_3 egészekkel $c_1 m = c_2 m +$

c_3 , azaz $m = \frac{c_3}{c_1 - c_2}$ teljesülne, ami m irracionális volta miatt szintén lehetetlen.

Ennélfogva az m hosszúságú ívet elég sokszor felmérve lesz olyan $\frac{1}{n}$ hosszúságú ív,

amelynek belsejében már két osztópont lesz, például azok, amelyek közül az egyik m -nek x_1 -szeri, a másik x_2 -szeri felméréscével került oda, a felmért ívhosszak különbsége a

körkerület egész számú többszöröse — mondjuk y -szorosa — és még egy $\frac{1}{n}$ -nél

kisebbséget, ezért

$$|mx_1 - (mx_2 + y \cdot 1)| < \frac{1}{n},$$

vagy $x_1, x_2 = x$ jelöléssel

$$|mx - y| < \frac{1}{n},$$

tehát van olyan (x, y) egészekből álló számpár — azaz rácspont —, amelyre

$$\frac{|mx - y|}{\sqrt{m^2 + 1}} < \frac{1}{n\sqrt{m^2 + 1}},$$

viszont n választásával $\frac{1}{n\sqrt{m^2 + 1}}$ tetszőlegesen kicsiny lehet; $mx - y \neq 0$, mert az

egyenes nem megy át az origón kívül más rácsponton, és $x_1 \neq x_2$ miatt $x \neq 0$.

A fentiek kapcsán felvetődik a kérdés, hogy általában mely egyenletek tartalmazzanak rácspontokat, vagyis az $ax - by = c$ típusú egyenleteknek, ahol a, b, c egészek, van-e megoldása az egész számok körében. Ezeket az egyenleteket elsőfokú (lineáris) diofantikus egyenleteknek nevezzük. Az elsőfokú diofantikus egyenletek elmélete szorosan összefügg a rácsgéometriával.

Ha az $ax - by = c$ egyenleteknek van egész megoldása, akkor kell, hogy c osztható legyen a és b minden közös osztójával, tehát legnagyobb közös osztójával is, ez tehát a megoldhatóságnak egy szükséges feltétele. Megmutatjuk, hogy ez elegendő is.

Tegyük fel először, hogy a és b relatív prímek, és $c = 1$. Legyen A a (b, a) koordinátákkal rendelkező rácspont; láttuk, hogy az OA szakaszon nincsen rácspont.

Az OA bármelyik oldalára szerkesztett OA -val egyenlő oldalú négyzet azonban tartalmaz rácspontot, például a koordinátatengelyek O -hoz legközelebbi rácspontját. Legyen a négyzetek egyikében az OA -hoz legközelebbi rácspont $P_0(x_0, y_0)$. Az OAP_0 rácsháromszög üres, mert különben nem P_0 lenne az OA -hoz legközelebbi rácspont, ezért az OAP_0 területe

$$\frac{1}{2}|ax_0 - by_0| = \frac{1}{2}.$$

Válasszuk P_0 -t az OA egyenes olyan oldalán, amelyre $ax_0 - by_0$ pozitív, akkor

$$ax_0 - by_0 = 1,$$

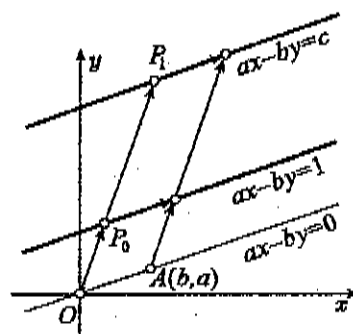
tehát $c = 1$ esetben megmutattuk a lineáris diofantikus egyenlet megoldásának a létezését.

A fenti egyenlőség egyébként azt jelenti, hogy $ax - by = 1$ egyenesen van egy $P_0(x_0, y_0)$ rácspont. Láttuk, hogy az $ax - by = 0$ egyenletű egyenes összes rácspontjai (kb, ka) alakúak, ahol k tetszőleges egész, (b, a) pedig az egyenes origóhoz legközelebbi egyik rácspontja.

Mivel az $ax - by = 1$ egyenes az $ax - by = 0$ egyenesből az $OP_0(x_0, y_0)$ vektorral való eltolással származtatható, az $ax - by = 1$ egyenes összes rácspontjainak koordinátái, azaz egyenletmegoldásai

$$x = x_0 + kb, \quad y = y_0 + ka$$

alakban állíthatók elő.



Az $ax - by = c$ egyenletű egyenes az $ax - by = 1$ egyenesből a $c \cdot \text{OP}_0(cx_0, cy_0)$ vektorral való eltolással származtatható; ti. a $P_1(cx_0, cy_0)$ rajta van az egyenesen, mert

$$acx_0 - bcy_0 = c(ax_0 - by_0) = c,$$

ezért $ax - by = c$ összes megoldásai (azaz összes rácspontjai)

$$x = cx_0 + kb, \quad y = cy_0 + ka$$

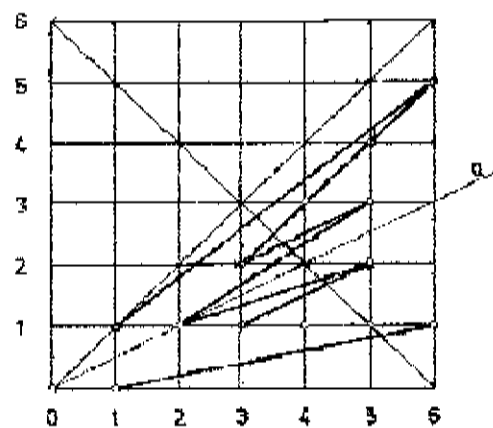
alakúak.

A lineáris diofantikus egyenleteknél mindig feltehetjük, hogy x és y együtthatói relatív prímek, mert ez elérhető, ha legnagyobb közös osztójukkal elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát.

I/6. Rácspontok és racionális számok. A négyzetrácsot a racionális számok egy szemléltetésére is felhasználhatjuk. Minden $\frac{p}{q}$ alakú racionális számhoz hozzárendelhető az $R(q, p)$ rácspont, $\frac{p}{q}$ éppen az OR irányszögének a tangensét (iránytangensét) jelöli. Ily módon természetesen minden racionális számot végtelen sok rácspont ábrázol; mindazok, amelyek az origón átmenő $\frac{p}{q}$ iránytangensű egyenesen vannak, ugyanazt a racionális számot ábrázolják. Egy ilyen egyenesnek az origóhoz legközelebbi rácspontját, amelynek y koordinátája pozitív, nevezzük el az egyenes főpontjának. Azt már beláttuk, hogy a főpont koordinátái relatív prímek; az x -tengely főpontja legyen az $(1, 0)$ pont.

Foglalkozzunk most a $[0, 1]$ intervallumba eső racionális számokkal, és ábrázolja ezeket a hozzájuk tartozó, origón átmenő egyenes főpontja. Válasszuk ki

közülük azokat, amelyeknek abszcisszája nem nagyobb n -nél, majd forgassuk el pozitív irányban az x -tengelyt, és kössük össze a kiválasztott pontokat abban a sorrendben, ahogy a forgó félegyenes egymás után átmegy rajtuk, ez nyilván nagyságrendi sorrendet is jelent közöttük, mert minél nagyobb az elforgatás szöge, annál nagyobb a tangense; a félegyenes irántangense pedig magával az érintett racionális számmal egyenlő.



11. ábra

Ezeknek a törteknek a nagyság szerint rendezett véges sorozatát n -edik *Farey-sorozatnak* (a továbbiakban: F_n -nek) nevezzük, a 11. ábra az F_6 -ot ábrázolja; ezek elemei:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Első pillantásra úgy látszik, hogy a sorozat elemeinek megfelelő rácspontok nagy szabálytalansággal helyezkednek el, azonban jó néhány meglepően "szabályos" tulajdonsággal rendelkeznek. Ezek közül néhány:

A) Ha $\frac{p}{q}$ elem F_n -nek, akkor $\frac{q-p}{q}$ is az. F_n minden eleménél ugyanis $q \geq p$,

mert $\frac{p}{q} \leq 1$, ezért $\frac{q-p}{q}$ is 1-nél nem nagyobb tört; nem egyszerűsíthető, ezért $\frac{p}{q}$ -val

együtt elem F_n -nek. A $\frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$ egyenlőség csakis akkor teljesül, ha $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Eredményünk egyébként azt jelenti, hogy az azonos nevezőjű F_n -beli elemek párokba szedhetők úgy, hogy a párok összege 1 legyen, ezért F_n azonos nevezőjű elemeinek számtani közepe $\frac{1}{2}$, és következésképpen

$$F_n \text{ elemeinek számtani közepe } \frac{1}{2}.$$

Az A) tulajdonság a négyzetrácson úgy mutatkozik meg, hogy az O -n átmenő $\frac{1}{2}$ iránytangensű egyenest a -val jelölve az az a -tengelyű affinitás, amelynek iránya párhuzamos az y -tengellyel és aránya 1 (azaz az a -tengely egyik oldalán levő pontokat a másik oldalára viszi át úgy, hogy a pont és képe által meghatározott szakasz felezőpontja a -n legyen), az F_n -nek megfelelő rácsponthalmazt önmagára képezi le.

B) Két szomszédos elem különbsége olyan törttel egyenlő, amelynek a számlálója 1, nevezője a két szomszédos elem nevezőjének a szorzata.

Legyen ugyanis $\frac{p}{q}$ és $\frac{p'}{q'}$ H_n két szomszédos eleme, a hozzájuk tartozó rácspontok $P(q, p)$ és $P'(q', p')$. Az OPP' üres rácsháromszög, mert ha lenne belsőjében rácspont, akkor az OP félegyenest pozitív irányba forgatva előbb érnének el ezt a rácspontot, mint a P -vel szomszédos P' -t; OPP' területe ezért $\frac{1}{2}$, tehát

$$qp' - pq' = 1,$$

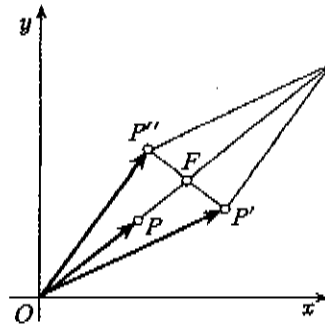
$$\text{és így } \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'} = \frac{1}{qq'}, \text{ állításunkkal egyezésben.}$$

C) Három egymást követő elem közül a középső olyan törttel egyenlő, amelynek számlálója a két szélső tört számlálójának az összege, a nevezője pedig a két szélső tört nevezőjének az összege.

Ez részletesen kiírva azt jelenti, hogy ha $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p''}{q''}$ három egymást követő tört az H_n sorozatban, akkor

$$\frac{p}{q} = \frac{p' + p''}{q' + q''},$$

azaz, ha a törttekhez rendre a $P'(q', p')$, $P(q, p)$, $P''(q'', p'')$ rácspontok tartoznak, akkor P az $OP' + OP''$ irányvektorú egyenes főpontja, hiszen $OP' + OP''$ koordinátái $(q' + q'', p' + p'')$.

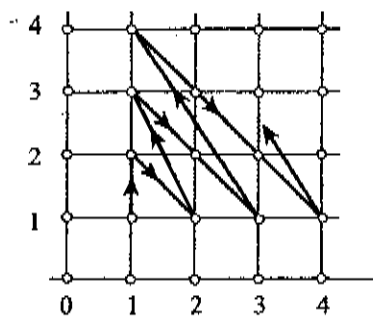


Ahhoz, hogy ezt belássuk, vegyük figyelembe, hogy P', P, P'' az F_n egymást követő elemeihez tartozó rácspontok, s mivel azt a B) tulajdonság vizsgálatánál igazoltuk, hogy az $OP'P$, OPP'' üres rácsháromszögek, ezért egyenlő területűek, egyenlő következésképpen a két háromszög közös OP oldalához tartozó magasság is, ennél fogva a $P'P''$ szakasz F felezőpontja rajta van az OP egyenesen, tehát F helyvektora, $\frac{1}{2}(OP' + OP'')$, kollineáris az OP vektorral, és így az OF egyenesnek valóban P a főpontja.

Egy klasszikus halmazelméleti tétel.

Azt már említettük, hogy minden rácsponthoz hozzárendelhetünk egy racionális számot, az $R(q, p)$ ponthoz a $\frac{p}{q}$ -t. Nézzük most a pozitív koordinátájú rácspontokat, ezek mindegyikéhez tartozik egy racionális szám a fentiek szerint, előfordul természetesen, hogy egy racionális számot több (sőt végtelen sok) ponthoz is hozzárendelünk így módon, mivel a (q, p) és a

$(\lambda q, \lambda p)$ pontokhoz ugyanaz a racionális szám tartozik. Ez módot ad arra, hogy a pozitív racionális számokat sorba rendezzük, pl. az ábrán látható módon:



Ennek lényege az, hogy egymás mellett vannak felsorolva azok a törtek, amelyekben a számláló és a nevező összege ugyanakkora. A rendezett sorozat így kezdődik:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \dots$$

Egy-egy ferde (135° -os irányszögű) sorban olyan pontok vannak, amelyek koordinátáinak az összege állandó; az n -edik ferde sorban éppen n darab rácspont van, és a sorra az jellemző, hogy a benne levő rácspontoknál a két koordináta összege $n + 1$ (az első sor csak egyetlen pontból áll).

Válasszunk ki most egy tetszőleges $P(x, y)$ rácspontot. A P -t tartalmazó ferde sorban a koordináták összege $x + y$, a P -t megelőző ferde sorban pedig $x + y - 1$, ez tehát az $x + y - 2$ -edik sor, P ferde soráig tehát a felfűzött rácspontok száma

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x + y - 2) = \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2},$$

a P -t tartalmazó $x + y - 1$ -edik sorban P éppen az x -edik, tehát a rácspontok

13. ábrán látható elrendezésében P sorszáma

$$(5) \quad x + \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2}.$$

Mellékcredményként megjegyezhető, hogy (5) alatti formula minden pozitív egészet előállít, és mindegyiket pontosan egyszer, ha x és y egymástól függetlenül befutják a pozitív egészek halmazát.

Ha a most sorba rendezett racionális számok elé odairjuk a 0-t, és mindegyik szám mellé az ellentettjét, továbbá elhagyunk belőle minden olyan számot, amelynek értéke már előfordult a sorozatban, akkor a racionális számok egy sorozatba rendezését kapjuk:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 4, -4, \dots$$

Ez a sorba rendezés tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a természetes és a racionális számok között, és így bizonyítja azt a klasszikus halmazelméleti tételt, mely szerint a természetes és a racionális számok számossága azonos.

I/7. Kör a négyzetrácson. A rácsháromszög köréírt körének a középpontja racionális koordinátákkal rendelkezik, mivel a csúcsok egész koordinátaiból kiindulva a középpont koordinátáinak kiszámítása során (felezőmerőlegcesek, metszéspontok) nem lépünk ki a racionális számtestből. Ebből már következik, hogy

ha egy kör középpontjának a koordinátái nem racionálisak, a körvonal nem tartalmazhat kettőnél több rácspontot.

Az r sugarú kör területe $r^2\pi$, tehát nagyobb, mint $[r^2\pi]$, azért Blichfeldt tétele szerint elmozgatható úgy, hogy legalább $[r^2\pi] + 1$ rácspontot lefedjen.

Ha viszont tetszőleges N pozitív egészet adunk meg, elhelyezhető a síkon olyan kör, amely pontosan N rácspontot fed le. Válasszuk ugyanis középpontnak pl. a $K(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ pontot. A K körül szerkesztett egyetlen kör sem tartalmazhat egynél több rácspontot; mert ha lenne két rácspontja, ezek szakaszának felezőmerőlegese $ax + by = c$ alakú egyenlettel rendelkezne, ahol a, b, c egész számok, és mivel ez tartalmazná a középpontot, teljesülnie kellene az

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$$

egyenletnek, amiből négyzetre emeléssel és rendezéssel

$$\sqrt{6} = \frac{c^2 - 2a^2 - 3b^2}{2ab}$$

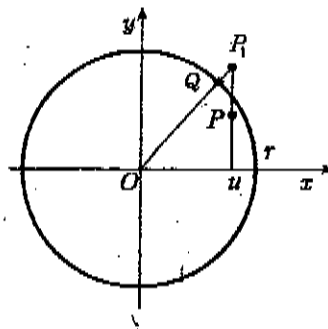
következnék, ami lehetetlen, hiszen $\sqrt{6}$ nem racionális. (a és b közül nem lehet az egyik 0, mert akkor ebből az következne, hogy $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{3}$ racionális; mindkettő pedig nem lehet 0, hiszen (a, b) egy egyenes normálvektora!). Írjunk most K köré olyan kis kört, amely még nem tartalmaz rácspontot, majd növeljük a sugarát folytonosan; a növekedő kör egyszerre mindig csak egy rácsponton lép túl, és így növelhető mindaddig, míg pontosan N pont nem lesz a belsejében.

Ezzel a folytonos növeléssel természetesen az is elérhető, hogy a négyzetrácson olyan kört adjunk meg, amely nem tartalmaz a területén rácspontot, sugara viszont tetszőlegesen nagy.

Ha viszont egy rácspont körül írunk elég nagy sugarú kört, ez már csak "kissé" tudja elkerülni a rácspontokat; pontosabban igaz a következő:

Tétel: Egy rácspont köré írt körnek a hozzá legközelebbi rácsponttól mért távolsága tetszés szerinti kicsinnyé tehető, ha a kör sugarát elég nagyra választjuk.

Bizonyítás: Legyen az O köré írt kör sugara r , és keressünk a körhöz közeli rácspontot a rácsnak olyan főegyenesén, amely még metszi a kört, de a középpontjától a lehető legtávolabb van. Legyen a főegyenes egyenlete $x = u$, ahol $u < r < u + 1$ (u egész). Legyen a főegyenesen a kört közrefogó rácsszakasz PP_1 (14. ábra) a megfelelő koordináták $P(u, v)$ és $P_1(u, v + 1)$. Az OP_1 egyenes messe a kört Q -ban, ekkor P_1 -nek a körtől mért távolsága $d = P_1Q$.



Az $OP \leq r < OP_1$ miatt

$$(6) \quad u^2 + v^2 \leq r^2 < u^2 + (v+1)^2.$$

Ezt figyelembe véve d -re a következő becslést kapjuk:

$$\begin{aligned} d = OP_1 - r &= \sqrt{u^2 + (v+1)^2} - r = \frac{u^2 + (v+1)^2 - r^2}{\sqrt{u^2 + (v+1)^2} + r} = \\ &= \frac{2v+1 - [r^2 - (u^2 + v^2)]}{\sqrt{u^2 + (v+1)^2} + r} < \frac{2v+1}{2r}. \end{aligned}$$

Az (6)-ból kapjuk, figyelembe véve, hogy $r+u \leq 2r$, és $r \cdot u < 1$, a

$$v \leq \sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{(r+u)(r-u)} < \sqrt{2r \cdot 1} = \sqrt{2r}$$

becslést. Ha most feltesszük, hogy $r > 1$,

$$d < \frac{2v+1}{2r} < \frac{2\sqrt{2r}+1}{2r} < \frac{3\sqrt{r}+\sqrt{r}}{2r} = \frac{2}{\sqrt{r}}.$$

így tehát, ha megadunk egy tetszőleges δ távolságot, és a kör r sugarát $\frac{4}{\delta^2}$

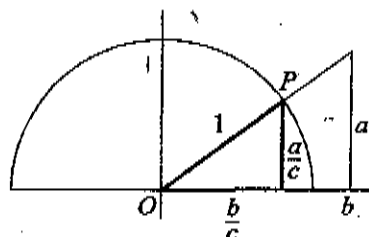
nél nagyobbra választjuk, akkor $\sqrt{r} > \frac{\delta}{2}$ miatt

$$d < \frac{2}{\sqrt{r}} < \frac{2}{\frac{\delta}{2}} = \delta.$$

Az origó körül szerkesztett egységkörön csak négy rácspont van, a koordinátatengelyekkel képzett metszéspontok ezek; racionális pont (azaz racionális koordinátákkal rendelkező) viszont végtelen sok van, s ezeket meg is tudjuk adni. Állítsuk elő a pozitív koordinátájú racionális körpontokat. Válasszuk ki e célból az egységkör $E(-1, 0)$ pontját, legyen ennek helyvektora r_0 , és az E -n átmenő egyenes irányvektora $e(u, v)$, ezért az E -n az egységkör pontjaival összekötő egyenesek egyenlete

$$(7) \quad r = r_0 + et$$

alakú.



Megmutatjuk, hogy r akkor és csak akkor lehet helyvektora az egységgör szőben forgó racionális pontjainak, ha u és v pozitív egészek választható.

Ha ugyanis $Q(a, b)$ az egységgör racionális pontja, akkor az $EQ(a + 1, b)$ koordinátái racionálisak, és így EQ -nak van olyan egész számú többszöröse, amelynek koordinátái egészek, ezt választhatjuk e -nek.

Legyen most u és v pozitív egész. Ha r az egységgör egy pontjának helyvektora, akkor $r^2 = 1$, azaz (7)-ből

$$1 = r^2 = (r_0 + et)^2 = 1 + e^2 t^2 + 2r_0 et.$$

A $t = 0$ az E ponthoz tartozik, ezért feltehetjük, hogy $t \neq 0$ és így

$$e^2 t = -2r_0 e,$$

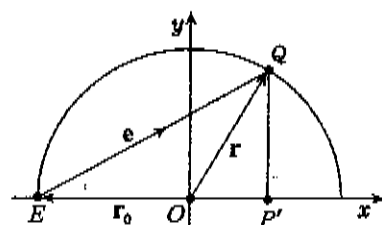
$$t = -\frac{2r_0 e}{e^2} = -\frac{2u}{u^2 + v^2},$$

és így az egyenes és az egységgör $P(x, y)$ metszéspontjának koordinátái

$$(8) \quad x = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

valóban racionálisak, ha $u > v$, a kiválasztott negyedkörön vannak. Az egységgör racionális pontjai tehát (a kiválasztott negyedkörön) mind (8) alakúak, s ha u és v egymástól függetlenül befutja a pozitív egészek halmazát, ebben a formában minden racionális pont elő is áll, egy pont általában többször is.

Legyen most egy egész oldalakkal rendelkező derékszögű háromszög átfogója c , befogói pedig b és a . Erre $1 : c$ arányú kicsinyítést alkalmazva olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelynek átfogója 1, befogói pedig $\frac{b}{c}$, ill. $\frac{a}{c}$. Ha ezt most elhelyezzük a koordináta-rendszerben úgy, hogy átfogója az egységgör sugara, $\frac{b}{c}$ oldala az x -tengelyen legyen, akkor az origótól különböző hegyesszögű csúcsa az egységgörnek egy olyan P pontja, amelynek koordinátái $\left(\frac{b}{c}, \frac{a}{c}\right)$.



De akkor (8) miatt

$$\frac{a}{c} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}, \quad \frac{b}{c} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2},$$

tehát valamilyen k pozitív egészszel

$$(9) \quad a = 2kuv, \quad b = k(u^2 - v^2), \quad c = k(u^2 + v^2) \quad (u > v).$$

A gondolatmenetből következik tehát, hogy a (9) alatti előállítás olyan derékszögű háromszög oldalait adja meg három paraméter függvényében, amelyeknek oldalai egészek (pitagoraszi számhármások). Valamennyi egész oldalú derékszögű háromszöget számba vettük (lehet, hogy egyet többször is).

II. Feladatok a rácsgeometria köréből



Milyen n természetes számokra igaz az alábbi állítás: ha a síkbeli négyzetrácson adott n rácspont úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesre, akkor az általuk meghatározott háromszögek között van olyan, amelyiknek a súlypontja is rácspont.

Megoldás:

Tekintsük a síkbeli négyzetrács rácspontjait egy derékszögű koordináta-rendszer egész koordinátájú pontjainak. Ismeretes, hogy az $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ csúcsú háromszög súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ és } y_s = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Egy háromszög súlypontja tehát pontosan akkor rácspont, ha a csúcsok első, illetve második koordinátáinak összege osztható 3-mal. Hívjunk három rácspontot "jónak", ha ez fennáll rájuk.

Megmutatjuk, hogy a feladatban kimondott állítás a 8-nál nagyobb természetes számokra igaz. Ehhez nyilván elegendő egyrészt 9 pontra igazolni az állítást, másrészt mutatni 8 olyan rácspontot, amelyre az állítás nem teljesül.

Az egyes koordináták háromféle maradékot adhatnak 3-mal osztva, így összesen $3 \cdot 3 = 9$ típusú rácspont lehetséges. Ezeket a lehetőségeket tartalmazza az 1. ábra táblázata.

(0;2)	(1;2)	(2;2)
(0;1)	(1;1)	(2;1)
(0;0)	(1;0)	(2;0)

1. ábra

Tekintsünk most 9 rácspontot, és helyezzük el őket az 1. ábra celláiban aszerint, hogy koordinátáik milyen maradékot adnak 3-mal osztva. Ha van olyan cella, ahová legalább három pont kerül, akkor nyilván készen vagyunk, hiszen három egyenlő maradék összege osztható 3-mal.

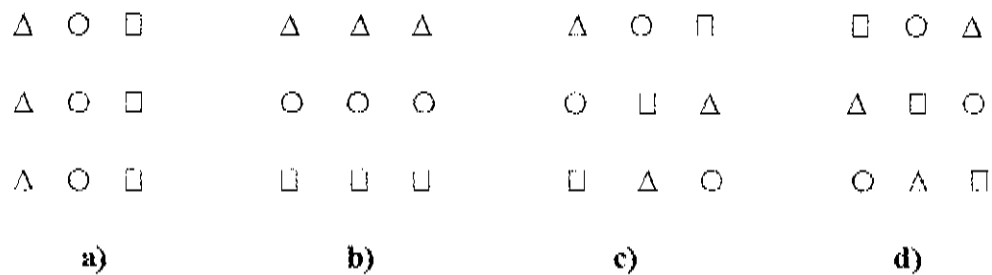
Ha sehol sincs kettőnél több, akkor legalább 5 cellába kerül rácspont, hisz a pontok száma 9. Válasszunk ki öt ilyen "foglalt" cellát, illetve mindegyikükben egy-egy rácspontot. Azt állítjuk, hogy ezek között van három jó.

Nyilván bármely két különböző cellához van egy és csak egy olyan harmadik, hogy az a három cellába kerülő három rácspont jó, így összesen $\frac{9!}{2!7!} / 3 = 12$ olyan jó hármas van, ahol különböző cellákból valók az elemek.

Tekintsük ezután az 5 kiválasztott rácspont által meghatározott $\frac{5!}{2!3!} = 10$ jó hármas. Ha belátjuk, hogy ezek a hármasok nem lehetnek valamennyien különbözők, akkor készen vagyunk, ugyanis két különböző pontpár éppen akkor határozza meg

ugyanazt a jó hármas, ha az éppen a két pár pontjainak az egyesítése, és így mindhárom pontja szerepel a megadott pontok között.

Osszuk ehhez az összesen 12 jó hármas négy, egyenként három elemű csoportra a 2. ábra szerint. (Az egyes csoportokban az azonos jelű pontok alkotják a jó hármasokat.)



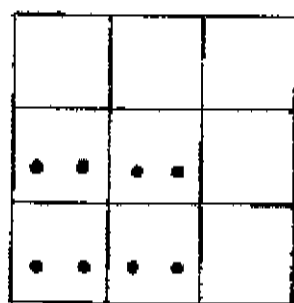
2. ábra

Ha az 5 pont által meghatározott 10 jó hármas között nincsenek azonosak, akkor a 2. ábra négy csoportja közül legalább egynek mindhárom eleme ott van a fenti 10 jó hármas között. Az egyes csoportokon belül viszont semelyik két hármasnak nincs közös pontja, vagyis egy csoport három hármasának meghatározásához 6 pontra van szükség! Mivel nekünk csak öt pontunk van, a 10 hármas között valóban kell, hogy legyenek azonosak, amiből a fentiek szerint következik, hogy a feladat állítása 9 pont esetén igaz.

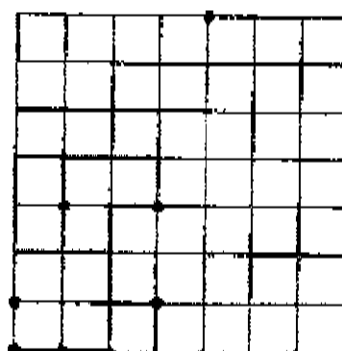
Egy nyolc elemű ellenpélda a következő:

(0;0), (0;0), (0;1), (0;1), (1;0), (1;0), (1;1), (1;1)

Összesen négy cellába kerülnek pontok, mindegyikbe kettő-kettő (3/a ábra), és a fentiek szerint nyilván nincs közöttük három jó. A 3/b ábrán nyolc olyan rácspont látható, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre, koordinátáik pedig éppen az adott celláknak megfelelő maradékot adják.



3/a ábra



3/b ábra

Megjegyzések:

1. A feladatban nem volt lényeges az a megszorítás, hogy a megadott pontok közül semelyik három ne essék egy egyenesre, amennyiben elfajuló háromszög súlypontját is a csúcsok koordinátái számtani közepeként értelmezzük.

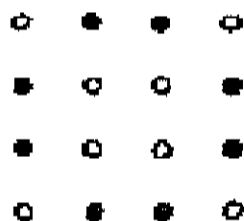
2. A feladat annak az ismert állításnak a "kétdimenziós" általánosítása, mely szerint öt egész szám között mindig van három, amelyek összege 3-mal osztható. Tulajdonképpen azt láttuk be, hogy kilenc, egész számokból álló számpár között mindig van három olyan, ahol mind az első, mind pedig a második elemek összege osztható 3-mal.



Tekintsük a sík azon rácspontjait, amelyek koordinátái a 0, 1, 2, 3 értékeket veszik fel. A (0,1) pontot kékre, a többi pirosra színezzük. Ezután lépésenként vagy egy vízszintes, vagy egy függőleges, vagy egy +1, vagy egy -1 meredekségű egyenesen elhelyezkedő pontok (esetleg 1 pont) színét a másik színre változtatjuk. Mutassuk meg, hogy ilyen lépésekkel nem lehet mind a 16 pontot pirosra színezni.

Megoldás:

Vizsgáljuk az ábrán sötéttel jelölt pontok (0,1); (0,2); (1,0); (1,3); (2,0); (2,3); (3,1); (3,2) között a kékek számát. Kezdetben egy kék van köztük, tehát páratlan számú. Megmutatjuk, hogy egy lépés során ez a szám mindig csak 0-val, 2 -vel vagy -2-vel változhat. Ekkor készen leszünk, hiszen ez azt jelenti, hogy ezen nyolc pont között mindig páratlan számú kék van, s így már ezek sem lehetnek egyszerre mind kék.



Ha vízszintes vagy függőleges egyenes mentén színezzük át a pontokat, akkor a megjelöltek közül pontosan kettőnek változik meg a színe.

Ha mindkettő kék volt, akkor a kékek száma az átszínezés után kettővel kevesebb lett; ha mindkettő piros volt, akkor kettővel több, míg ha az egyik piros volt, a másik meg kék, akkor a kékek száma nem változott.

Ha átlós (+1 vagy -1 meredekségű) egyenes mentén cseréljük meg a színeket, akkor a megjelölt pontok közül ismét vagy kettőnek, vagy nullának változik a színe, így az előbb alkalmazott gondolatmenettel látható, hogy a kékek száma csak 0-val, 2-vel vagy -2-vel változhat.



Egy téglalap alakú kockás papír minden rácspontjában egy-egy nyilat rajzolunk, párhuzamosan a papír valamelyik oldalával. (A papír szélén levő rácspontokból nem mutathat nyíl a papíron kívülre.)

Bizonyítsuk be, hogy van két szomszédos pont — vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan —, amelyekből ellenkező irányú nyilak indulnak el.

Megoldás:

A konkrét feladat helyett egy általánosabb probléma megoldásával jutunk el az eredetileg kitűzött célhoz. A feladat nehezítése mindössze annyi, hogy nem téglalapokra látjuk be az állítást, hanem rácsegyenesek mentén kivágott tömör síkidomokra (amelyekben így nincsen "lyuk", és rácsegyenesek határolta egységnégyzetekből állnak). Az állítást teljes indukcióval fogjuk belátni. A teljes indukciót n -re, az egységnégyzetek számára végezzük.

Ha $n = 1$, akkor vagy van két olyan nyíl, amelyek egy oldalon elhelyezkedő csúcsokból indulnak, és ellentétes irányúak, vagy nincs, de ekkor a nyilak szerint haladva körbe tudjuk járni a négyzetet, s ez csak úgy lehetséges, ha az egy átlón elhelyezkedő nyilak ellentétes irányba mutatnak.

Tegyük fel, hogy minden, k egységnégyzetet tartalmazó síkidomra igaz a feladat állítása, ahol $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ebből a feltevésből kellene belátnunk azt, hogy minden $n + 1$ egységnégyzetet tartalmazó síkidomra is igaz az állítás.

Válasszunk ki egy ilyen, $n + 1$ egységnégyzetet tartalmazó síkidomban egy tetszőleges rácspontot, s menjünk ebből a pontból abba a rácspontba, amely szomszédos ezzel, s amerre az eredeti rácspontból a nyíl mutat. Így lépegetve a nyílak mutatta irányba sose akadhatunk el, mert minden rácspontból egy másik, a síkidomon belüli rácspontba mutat egy nyíl.

Ha ehhez még hozzávesszük, hogy a síkidom véges sok rácspontot tartalmaz, akkor nyilvánvaló, hogy egy idő után olyan rácsponthoz érkezünk, amelynél már voltunk, tehát az utunk bezárul — létrejön egy kör.

Egy ilyen kör határolta S síkidomból nem mutat kifelé nyíl, tehát ha elhagyjuk az eredeti síkidom körön kívüli részét, akkor a maradék S minden tekintetben eleget tesz a feladat feltételeinek.

Ha S kevesebb mint $n + 1$ egységnégyzetet tartalmaz, akkor indukciós feltevésünk szerint készen vagyunk. Még itt kitérünk arra az esetre (amivel az indukciós feltevés nem foglalkozik), amikor a kör egy egységnégyzetet sem fog körül, azaz területe 0. Ekkor nyilván a kör két nyílból áll, amelyek egy egységnégyzet egy oldalán helyezkedik el, és egymás felé, azaz ellentétes irányba mutatnak.

Már csak az az eset van hátra, amikor S mind az $n + 1$ egységnégyzetet tartalmazza, tehát a kör egybeesik az eredeti síkidom határgörbéjével. Válasszunk ki egy, a határon lévő nyílat, és forgassuk el 90° -kal úgy, hogy az elforgatott nyíl a

síkidom belseje felé mutasson. Ezután forgassuk el az összes nyílat 90° -kal ugyanilyen irányba (minden nyílon ugyanazt az α forgatást hajtsuk végre)!

A határon lévő nyílak, amelyek eredetileg egy kört alkottak, most mind a síkidom határára merőlegesek és a síkidom belseje felé mutatnak, tehát nem alkothatnak egy kört (ez alól kivételek az $n = 1$ -nél tárgyalt $\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow$ típusú körök, de itt szemmel látható, hogy az átlós nyílak ellentétes irányúak).

Azonban most, az elforgatott nyílak szerint haladva is eljutunk egy körhöz, s mivel semelyik ilyen kör sem eshet egybe a határral, a kör kevesebb mint $n + 1$ egységnégyzetet tartalmaz.

Az indukciós feltevésünk szerint létezik a kör által körülfogott síkidomban két olyan szomszédos nyíl, amelyek ellentétes irányúak. Most forgassuk vissza eredeti helyzetükbe a nyílat. Könnyen ellenőrizhető, hogy azok a nyílak, amelyek az elforgatás előtt szomszédosak és ellentétes irányúak voltak, az elforgatás után is ilyen tulajdonságúak maradnak, tehát eredetileg is létezett két szomszédos, ellentétes irányba mutató nyíl.

♣

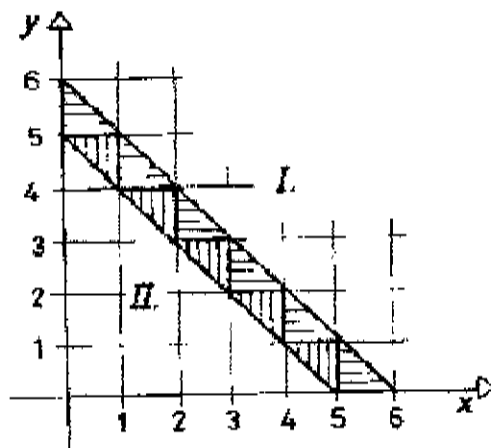
Egy kenguru ugrál a síkbeli koordináta-rendszer pozitív síknegyedében. Az (x, y) koordinátáját pontról az $(x + 1, y - 1)$ vagy az $(x - 5, y + 7)$ pontra ugorhat, amennyiben az a pont is a pozitív síknegyedben van.

Mely pontokról indulva tud a kenguru az origótól legalább 1000 egység távolra eljutni?

Megoldás:

Osszuk föl a (nyílt) pozitív félsíkot az ábra szerinti módon. (Sem az I, sem a II jelzésű rész nem tartalmazza saját határát.)

A továbbiakban az $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$ típusú lépést kis lépésnek, míg a másikat nagynak nevezzük.



4. ábra

Ha a kengurunak módjában áll egy nagy lépést megtenni, akkor utána biztosan tud öt kicsit lépni, melynek eredményeképpen az (x, y) pontból az $(x, y + 2)$ pontra juthat. Ezután ismét léphet nagyot: kezdetben ugyanis akkor léphetett ilyet, ha $x \geq 5$ fennáll, ha ez az új helyzetben is fennmaradt. Ilyen ciklusok segítségével tehát az origótól mért távolságot tetszőlegesen nagyra növelheti.

Tekintsük most az I jelzésű sikrészt. Ebbe azon (x, y) pontok tartoznak, amelyekre $x + y \geq 6$. Ha $x \geq 5$ is teljesül, akkor a leírt módon a kenguru tetszőlegesen messzire eljuthat. Ha $x \leq 5$, akkor néhány kis lépéssel elérhető, hogy $6 \geq x > 5$ legyen, s közben $y > 0$ marad. Innen pedig a már látott módon haladhat tovább.

A II. sikrészből viszont, ahol $x + y \leq 5$ a pontok jellemzője, nem tud kijutni a kenguru: itt csak kicsit léphet, s egy kis lépés során a helykoordináták összege nem változik, vagyis 5-nél kisebb marad.

A vízszintes sávazású kis háromszögek közül a legalsó belsejében ismét teljesül az $x \geq 5, y > 0$ feltétel, így innen a kenguru tetszőlegesen messzire eljuthat. Ugyanez igaz a háromszög átlójának belső pontjaira is. A felső háromszögekből nagy lépés nem tehető, a kis lépések pedig az alsó háromszögbe vezetnek; vagyis azoknak is a belseje, valamint átfogójuk belső pontjai tartoznak a keresett pontok közé.

A függőleges sávazású háromszögekből szintén csak kis lépések tehetők, melyek a legalsó ilyen helyzetű háromszögbe vezetnek. Onnan viszont már egyetlen lépés sem tehető. Ugyanez mondható ezúttal a háromszögek határvonalán levő pontokra is.

Összefoglalva tehát, a keresett pontok az I jelű síkrészben, a vízszintes sávozású háromszögek belsejében, valamint ezen háromszögek átfogóinak belsejében helyezkednek el.

Megjegyzés:

Kicsit más a helyzet, ha a pozitív síknegyedre zártan tekintjük (azaz $x \geq 0$, $y = 0$, valamint az $x = 0$, $y \geq 0$ pontokat is bele vesszük). Ekkor a vízszintes sávozású háromszögek oldalain levő összes pont is a keresettek közé tartozik, továbbá az I síkrész határa is.



A kétdimenziós koordináta-rendszer rácspontjain egy méretei miatt nem látható bolha ugrál. A bolha az origóból indul ki, és minden perc tizedik másodpercében arrébb ugrik a $(99; 0)$, $(-1; 1)$, $(-1, -1)$ vektorok valamelyikével, vagy pedig nem mozdul. Mi minden perc harmincadik és ötvenedik másodpercében egy-egy rácspontot megmérgezhethetünk. Ha a bolha éppen ezek egyikén áll, vagy később mérgezett rácspontra ugrik, jól hallható hangon felkiált és örökre elnémul. El tudjuk-e pusztítani a bolhát?

Megoldás:

Mutatunk egy algoritmust, amelyet követve a bolhát biztosan el tudjuk pusztítani.

A módszer azon múlik, hogy a bolha útvonalát "elő lehet írni": minden pillanatban háromfelé ugorhat, de mi a három lehetséges hely közül kettőt megmérgezhethetünk. Tehát ha a bolha ugrása után nem kiáltott, biztos, hogy ezen az útvonalon van. Az útvonalat pedig úgy választjuk, hogy visszatérjen az origóba.

Jelöljük a három vektort, amellyel a bolha elmozdulhat, u_1 , u_2 , u_3 - mal. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$(1) \quad 2u_1 + 99u_2 + 99u_3 = 0.$$

Ha tehát két ugrás az u_1 vektorral történik, 99 ugrás pedig az u_2 , illetve u_3 vektorral, akkor a bolha visszatér az origóba.

Definiáljuk az $A_0, \dots, A_{200}$ pontokat úgy, hogy A_0 az origó legyen.

$$A_0A_1 = A_1A_2 = u_1, \quad A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{100}A_{101} = u_2,$$

$$A_{101}A_{102} = A_{102}A_{103} = \dots = A_{199}A_{200} = u_3$$

Ezeket a pontokat írjuk elő a bolha útvonalának. Az (1) egyenlőség alapján $A_{200} = A_0$, az útvonal körbeér.

Az A_i pontból az u_1 , u_2 , u_3 vektorok három különböző pontba mutatnak, ezek közül az egyik az A_{i+1} pont. A másik két pontot jelöljük B_i -vel és C_i -vel.

Az első 200 lépésben mérgezzük meg sorban a B_0 és C_0 , B_1 és C_1 , ..., B_{199} és C_{199} pontokat. Azt állítjuk, hogy k perc eltelte után ($0 \leq k \leq 200$) a bolha vagy már cipusztult, vagy az A_0 , ..., A_k pontok valamelyikén tartózkodik. Ezt k szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 0$, akkor állításunk igaz, mert a bolha A_0 -ból indul.

Ha pedig $k = m$ lépés után az A_0 , ..., A_m pontok valamelyikén tartózkodik, akkor a következő percben vagy nem ugrik (és akkor ugyanezek a pontokon marad), vagy pedig továbbugrik az $A_1, \dots, A_{m+1}$, $B_0, \dots, B_m$, $C_0, \dots, C_m$ pontok közül valamelyikre. Viszont az $(m + 1)$ -edik perc végére megmérgeztük a $B_0, \dots, B_m$, ..., $C_0, \dots, C_m$ pontokat. Ha tehát a bolha életben marad, akkor az $A_0, \dots, A_{m+1}$ pontok valamelyikén van.

A 200-adik perc letelte után a bolha már csak az

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{199} \rightarrow A_0$$

körpályán ugrálhat, mert mind megmérgeztük a $B_0, \dots, B_{199}, C_0, \dots, C_{199}$ pontokat. Ha a következő 100 percben sorra megmérgezzük a körpálya pontjait biztosan elpusztítjuk a bolhát.

A feladat általánosítása a következő példa!



A kétdimenziós koordináta-rendszer rácspontjain egy méretei miatt nem látható bolha ugrál. Az origóból indul, és minden perc huszadik másodpercében az u_1, u_2, u_3 vektorok valamelyikével ugrik arrébb, esetleg nem mozdul. Az általunk is ismert u_1, u_2, u_3 vektorok nem fekszenek egy félsíkban. Mi minden perc negyvenedik másodpercében megmérgezhetünk két rácspontot. Ha a bolha éppen ezek egyikén áll, vagy később mérgezett rácspontra ugrik, jól hallható hangon felkiált és örökre elnémul. El tudjuk-e pusztítani a bolhát?

Megoldás:

Meg fogjuk mutatni, hogy létezik egy olyan $A_0, A_1, \dots, A_n$ pontsorozat, amelynek első és utolsó eleme az origó, és a bolha mindegyik A_i -ből tud ugrani A_{i+1} -be. Bebizonyítjuk, hogy ez elégséges ahhoz, hogy a bolhát el tudjuk pusztítani.

Az A_i pontból az u_1, u_2, u_3 vektorok három különböző pontba mutatnak, ezek közül az egyik az A_{i+1} pont. A másik két pontot jelöljük B_i -vel és C_i -vel.

Az első n lépésben mérgezzük meg sorban a B_0 és C_0 , B_1 és C_1 , ..., B_{n-1} és C_{n-1} pontokat. Az előző feladat megoldásában leírtakhoz hasonlóan igazolható, hogy k perc eltelte után ($0 \leq k \leq n$) a bolha vagy már elpusztult, vagy az A_0 , ..., A_k pontok valamelyikén tartózkodik.

Az n -edik perc letelte után a bolha (ha még él) már csak az $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots, A_{n-1} \rightarrow A_0$ körpályán ugrálhat, mert mind megmérgeztük a B_0 , ..., B_{n-1} , C_0 , ..., C_{n-1} pontokat. A körpálya pontjait sorban megmérgezve biztosan elpusztíthatjuk a bolhát.

A megfelelő A_0 , ..., A_n pontok létezése azzal ekvivalens, hogy létezzenek olyan a_1, a_2, a_3 , nemnegatív egész számok, amelyek nem mind 0-k, és teljesül rájuk, hogy

$$(1) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

Bebizonyítjuk, hogy ha az u_1, u_2, u_3 vektorok nincsenek egy félsíkban, akkor léteznek ilyen számok. Először azt mutatjuk meg, hogy ha (1) teljesül valamilyen valós együtthatókkal (feltéve, hogy van köztük 0-tól különböző), akkor az együtthatók közül egyik sem lehet 0, és az együtthatók azonos előjelűek. Ha valamelyik együttható 0 lenne, akkor a másik két vektor konstansszorososa lenne egymásnak, és a három vektor egy félsíkba esne. Az együtthatók tehát 0-tól különböznek.

A három együttható között biztosan van két azonos előjelű; a szimmetria miatt feltehetjük, hogy ez a két szám a_1 és a_2 . Ha a_3 előjele ezekkel ellentétes, akkor u_3 felírható u_1 és u_2 olyan lineáris kombinációjaként, amelyben az együtthatók pozitívak:

$$u_3 = \frac{-a_1}{a_3} u_1 + \frac{-a_2}{a_3} u_2.$$

Ebből viszont következik, hogy u_3 benne van abban a szögtartományban, amelyet u_1 és u_2 zár be, a három vektor ismét egy félsíkba esik, ami ellentmondás. Az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ együtthatók tehát csak azonos előjelűek lehetnek.

Legyenek az u_i vektor koordinátái x_i és y_i . Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) u_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) u_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) u_3 = 0$$

Ebben az azonosságban az együtthatók egész számok, amelyek csak akkor lehetnének 0-k, ha a megfelelő két vektor párhuzamos lenne. Az előbb látottak alapján vagy mind három szám pozitív, vagy mindhárom negatív. Az előbbi esetben ezeket az együtthatókat, az utóbbi esetben az ellentettjeiket választhatjuk $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ -nak. Ezzel bebizonyítottuk, hogy léteznek megfelelő $A_0, A_1, \dots, A_n$ pontok, következésképpen a bolha elpusztítható.

Irodalom:

Reiman István: Geometria és határterületei

Róka Sándor: 1000 feladat az elemi matematika köréből

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok: 1998. januári, 1991. januári,
1993. novemberi és 1995. októberi száma