

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

Algebrai görbék lokális paraméterezése

BSc Szakdolgozat

Készítette:
Csibor László
matematika BSc szakos
hallgató

Témavezető:
Dr. Nagy Gábor Péter
egyetemi docens

Szeged
2013

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	4
Bevezetés	5
1. Alapfogalmak	6
2. Formális hatványsorok	7
2.1. Formális hatványsorok inverze	11
2.2. Formális hatványsorok deriválása	12
2.3. Az $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1}$ formális hatványsor vizsgálata . . .	14
3. Algebrai görbék lokális paraméterezése	18
Irodalomjegyzék	22
Nyilatkozat	23

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Nagy Gábor Péternek, hogy elvállalta a témavezetői teendőket. Köszönöm, hogy a konzultációk során türelmével, tudásával és szakmai tapasztalatával nagymértékben segítette munkámat, és irányított a szakdolgozat felépítésének megalkotásában.

Bevezetés

A matematika algebrai geometriai ágához kapcsolódik a dolgozatom. Az algebrai geometria a geometriai fogalmak algebrai vonatkozásait tárgyalja. Az én dolgozatom az algebrai görbék témakörbe nyújt betekintést.

A szakdolgozatomat 3 fejezetre osztottam fel. A dolgozat első részében ismertetem a szükséges algebrai alapfogalmakat.

A második fejezetben a formális hatványsorokról lesz szó. Ezekre nagy szükség van az algebrai görbék lokális paraméterezésénél.

A harmadik fejezetben tárgyaljuk az algebrai görbék lokális paraméterezését.

1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben definiálom a szükséges alapfogalmakat.

1.1. Definíció. $(A, +)$ struktúra Abel-csoport ha $+$ kétváltozós művelet A -n az alábbi tulajdonságokkal:

- asszociatív: $\forall a, b, c \in A : a + (b + c) = (a + b) + c$
- kommutatív: $\forall a, b \in A : a + b = b + a$
- egységelemes: $\exists 0 \in A : 0 + A = A + 0$
- inverzelemes: $\forall a \in A : a + (-a) = (-a) + a = 0$

1.2. Definíció. Az $(R, \cdot)$ félcsoportha $\cdot$ művelet asszociatív.

1.3. Definíció. $(R, +, \cdot)$ gyűrű, ha $(R, +)$ Abel csoport, $(R, \cdot)$ félcsoportha és a szorzás az összeadásra nézve disztributív, azaz $\forall a, b, c \in R$ esetén $a(b + c) = ab + ac$.

Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű kommutatív egységelemes, ha a multiplikatív félcsoportha kommutatív és egységelemes.

1.4. Definíció. $(D, +, \cdot)$ struktúra integritástartomány, ha $+$ és $\cdot$ kétváltozós művelet D -n az alábbi tulajdonságokkal:

- ($D, +$) Abel-csoport
- szorzás asszociativitása: $\forall a, b, c \in D : a(bc) = (ab)c$
- szorzás kommutativitása: $\forall a, b \in D : ab = ba$
- Multiplikatív egységelem: $\exists 1 \in D$, hogy $\forall a \in D : 1a = a1 = a$
- disztributív: $\forall a, b, c \in D : a(b + c) = ab + ac$
- Zérusosztómentesség: $\forall a, b \in D$ esetén, ha $ab = 0$ akkor $a = 0$ vagy $b = 0$

1.5. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ struktúrát testnek nevezzük, ha $0, 1 \in K$ és $+$ és $\cdot$ kétváltozós műveletek K -n az alábbi tulajdonságokkal:

- ($K, +, 0$) Abel-csoport
- ($K^*, \cdot, 1$) Abel-csoport, ahol $K^* = K \setminus \{0\}$
- Disztributivitás: $\forall a, b, c \in K$ esetén $a(b + c) = ab + ac$

1.6. Definíció. Legyen K egy test. Egy V nemüres halmazt vektortérnek nevezzük K felett, ha:

-a V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, $V \times V \rightarrow V$ függvény, $\forall u, v \in V$ elempárhoz hozzárendel egy és csak egy V -beli elemet ($u + v$)

- K és V között értelmezve van egy skalárral való szorzás nevű művelet, $K \times V \rightarrow V$ függvény, $\forall \lambda \in K$ és $v \in V$ elempárhoz egyértelműen hozzárendel egy V -beli elemet (λv) úgy, hogy az alábbi úgynevezett vektortér-axiómák teljesülnek:

1. V az összeadásra nézve Abel-csoportot alkot

2. Skálárral való szorzás disztributivitási szabályai:

- $\forall \lambda \in K \text{ és } u, v \in V : \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall \lambda, \mu \in K \text{ és } v \in V : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- $\forall \lambda, \mu \in K \text{ és } v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda \mu)v$
- $\forall v \in V : 1v = v$, ahol 1 a K test egységeleme.

1.7. Definíció. Legyen adott egy D integritástartomány és egy X szimbólum. Az $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ (ahol $a_0, a_1, \dots, a_n \in D$) jel-sorozatot D feletti polinomnak, ezek halmazát pedig D feletti polinomgyűrűnek nevezzük. Jelölés $D[X]$.

Az X a polinom változójának vagy ismeretlenjének hívjuk. Az $a_i X^i$ kifejezések a polinom tagjai, az a_i számok a polinom együtthatói. Az a_0 a polinom konstans tagja.

2. Formális hatványsorok

Az algebrai görbék lokális paraméterezéséhez elengedhetetlenül fontosak a formális hatványsorok. Ezek ismertetése következik.

2.1. Definíció. Legyen $(K, +, \cdot)$ test. Defináljuk a K test feletti formális hatványsorokat:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_i t^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

ahol $a_i \in K$ minden $i = 0, 1, \dots$ esetén. Jelölje $K[[t]]$ a K feletti formális hatványsorok halmazát.

Az $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ és $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ formális hatványsorok összege legyen $z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ formális hatványsor, melyre $c_i = a_i + b_i$.

Az $x(t), y(t)$ formális hatványsorok szorzata pedig $z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ formális hatványsor, melyre $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$.

2.2. Definíció. Két formális hatványsort akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek vagyis, ha $\forall i \geq 0$ egészen az x^i -en együtthatója a két hatványsornak ugyanaz.

2.3. Tétel. $K[[t]]$ ezekre a műveletekre nézve integritástartományt alkot.

Bizonyítás.

Belátjuk, hogy $K[[t]]$ az additív művelettel Abel-csoportot alkot.

Asszociativitás:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \right) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) t^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} ((a_i + b_i) + c_i) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i + c_i) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + (b_i + c_i)) t^i =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + c_i) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \right).$$

Kommutativitás:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + a_i) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.$$

Additív egységelem:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + 0 = 0 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

ahol $0 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ megállapodás szerint azt jelenti, hogy $b_i = 0 \forall i$ -re.

Inverzelem:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} -a_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + (-a_i)) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} 0 t^i = 0.$$

Belátjuk a multiplikatív műveletre vonatkozó feltételeket.

Asszocitivitás:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j = \sum_{l=0}^{\infty} d_l t^l,$$

ahol $d_l = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{l-i}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_l t^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{m=0}^{\infty} e_m t^m,$$

ahol

$$e_m = \sum_{l=0}^{\infty} d_l c_{m-l} = \sum_{i,l} a_i b_{l-i} c_{m-l} = \sum_{i+j+k=m} a_i b_j c_k,$$

ha $l - i = j$ és $m - l = k$.

Így

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{m=0}^{\infty} e_m t^m = \sum_{i+j+k=m} a_i b_j c_k t^m$$

Ehhez hasonlóan:

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{l=0}^{\infty} d_l t^l,$$

ahol $d_l = \sum_{j=0}^{\infty} b_j c_{l-j}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{l=0}^{\infty} d_l t^l = \sum_{m=0}^{\infty} e_m t^m,$$

ahol

$$e_m = \sum_{l=0}^{\infty} a_{m-l} d_l = \sum_{j,l} a_{m-l} b_j c_{l-j} = \sum_{i+j+k=m} a_k b_j c_i.$$

Így

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \right) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m t^m = \sum_{i+j+k=m} a_k b_j c_i t^m.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k &= \sum_{i+j+k=m} a_i b_j c_k t^m = \\ \sum_{i+j+k=m} a_k b_j c_i t^m &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \right). \end{aligned}$$

Kommutativitás:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0) t^i = \\ \sum_{i=0}^{\infty} (b_0 a_i + b_1 a_{i-1} + \dots + b_i a_0) t^i &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i. \end{aligned}$$

Multiplikatív egységelem:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot 1 = 1 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

ahol $1 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$, úgy hogy $b_0 = 1$ $b_i = 0$, ha $i > 0$.

Disztributivitás:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (b_i + c_i) t^i = \\ \sum_{i=0}^{\infty} (a_0(b_i + c_i) + a_1(b_{i-1} + c_{i-1}) + \dots + a_i(b_0 + c_0)) t^i &= \\ \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_0 c_i + a_1 b_{i-1} + a_1 c_{i-1} + \dots + a_i b_0 + a_i c_0) t^i &= \\ \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0 + a_0 c_i + a_1 c_{i-1} + \dots + a_i c_0) t^i &= \\ \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0) t^i + \sum_{i=0}^{\infty} (a_0 c_i + a_1 c_{i-1} + \dots + a_i c_0) t^i &= \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i. \end{aligned}$$

Zérusosztómentesség:

Legyen $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ Ha $x(t) = 0$ vagy $y(t) = 0$ akkor kész vagyunk.

Tegyük fel, hogy $x(t) \neq 0$ és $y(t) \neq 0$. Ekkor legyen k az a legkisebb index, melyre $a_k \neq 0$ és m pedig az a legkisebb, melyre $b_m \neq 0$. Ekkor $x(t)y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$, ahol $i=k+m$ esetén

$$c_{k+m} = a_0 b_{k+m} + a_1 b_{k+m-1} + \dots + a_k b_m + \dots + a_{k+m} b_0,$$

mivel $a_k \neq 0$ és $b_m \neq 0$, ezért $a_k b_m \neq 0$, így $c_{k+m} \neq 0$. Így az következik, hogy $x(t)y(t) \neq 0$. Ezzel beláttuk a zérusosztómentességet.

Minden feltételt beláttunk ami szükséges ahhoz, hogy $K[[t]]$ integritástartomány legyen. Így $K[[t]]$ integritástartomány.

□

2.1. Formális hatványsorok inverze

2.4. Állítás. Az $x(t), y(t)$ formális hatványsorokra az $x(t)y(t) = 1$ akkor és csak akkor teljesül, ha az együtthatók kielégítik a következőket:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 b_0 \\ 0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ 0 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ &\vdots \\ 0 &= a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bizonyítás.

$\Rightarrow$

$$\text{Legyen } x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$$

$$x(t)y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = z(t) = 1,$$

ahol $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$

$\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = 1$ akkor és csak akkor, ha a szorzat formális hatványsor konstans tagja 1-gyel egyenlő a többi együttható pedig 0-val. A szorzat hatványsor konstans tagja c_0 és $c_0 = a_0 b_0 = 1$. Ekkor teljesül az első egyenlet, hogy $1 = a_0 b_0$.

A többi egyenlet azért fog teljesülni, mert a $z(t)$ hatványsor c_i együtthatói 0-val egyenlők és ezzel az együtthatók pontosan megegyeznek a bizonyítandó egyenletek jobb oldalán levő összegekkel.

Tehát $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0 = 0$ ha $i > 0$. Ebből következik az állítás egyik iránya.

$\Leftarrow$

A feltételekben szereplő egyenletek jobb oldalai pontosan megfelelnek az $x(t)$ és az $y(t)$ formális hatványsorok szorzathatványsorának együtthatóival. Így $x(t)y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$, ahol $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$. Az első egyenlet miatt $c_0 = 1$ így $a_0 b_0 = 1$. Az $a_0 b_0$ szorzat megegyezik az $x(t)y(t)$ konstans tagjával. A többi egyenletből következik, hogy $c_i = 0$ ha $i > 0$. Ez azt jelenti, hogy $x(t)y(t)$ -nek a konstans tagtól különböző együtthatója mind 0-val egyenlő. Így $x(t)y(t) = 1$.

Ebből következik az állítás másik iránya is.

□

2.5. Tétel. Az $x(t)$ formális hatványsornak akkor és csak akkor van multiplikatív inverze, ha a_0 konstans tagja nem egyenlő 0.

Bizonyítás.

$\Rightarrow$

Legyen $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ úgy, hogy az $y(t)$ multiplikatív inverze az $x(t)$ -nek. Ekkor $x(t)y(t) = 1$.
 $x(t)y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$, ahol $c_i = (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} \dots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0)$ a formális hatványsorok szorzatára vonatkozó definíció miatt.

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = 1 \Leftrightarrow a_0 b_0 = 1 \text{ és } c_i = 0, \text{ ha } i > 0.$$

Tehát

$$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{b_0} \Rightarrow a_0 \neq 0.$$

Az állítást így beláttuk az egyik irányban.

$\Leftarrow$

Tegyük fel, hogy $a_0 \neq 0$.

Definiáljuk a $b_0, b_1, b_2 \dots$ értékeket a következő módon:

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, b_1 = \frac{-1}{a_0}(a_1 b_0), b_2 = \frac{-1}{a_0}(a_1 b_1 + a_2 b_0) \dots,$$

$$b_n = \frac{-1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)$$

A b_n -nek egyértelműen meghatározottak.

Ekkor az $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ formális hatványsor multiplikatív inverze az $x(t)$ -nek. Ezzel az állítás másik irányát is beláttuk.

□

2.2. Formális hatványsorok deriválása

2.6. Definíció. Az $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ formális hatványsor deriváltja:
 $x'(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i t^{i-1}$ vagyis:

$$x'(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots$$

2.7. Állítás. A derivált tulajdonságai:

Linearitás: $(x(t) + y(t))' = x'(t) + y'(t)$ és $(cx(t))' = cx'(t)$

Szorzat-szabály: $(x(t)y(t))' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$

Hatvány-szabály: $(x(t)^n)' = nx(t)^{n-1}x'(t)$

Lánc-szabály: $x(y(t))' = x'(y(t))y'(t)$

Bizonyítás. Legyen $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$

Linearitás:

$$(cx(t))' = \left(c \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} ca_i t^i \right)' = \sum_{i=0}^{\infty} ica_i t^{i-1} = c \sum_{i=0}^{\infty} ia_i t^{i-1} = cx'(t)$$

$$\begin{aligned} (x(t) + y(t))' &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) t^i \right)' = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i(a_i + b_i) t^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i t^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} ib_i t^{i-1} = x'(t) + y'(t). \end{aligned}$$

Szorzat-szabály:

$$(x(t)y(t))' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \right)' = \sum_{i=1}^{\infty} ic_i t^{i-1},$$

ahol $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0 = \sum_{j=1}^i a_j b_{i-j}$.

$$x'(t)y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i t^{i-1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i t^{i-1},$$

ahol $d_i = a_1 b_{i-1} + 2a_2 b_{i-2} + \dots + (i-1)a_{i-1} b_1 + ia_i b_0 = \sum_{j=1}^i ja_j b_{i-j}$.

$$x(t)y'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \cdot \sum_{i=1}^{\infty} ib_i t^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} e_i t^{i-1},$$

ahol $e_i = b_1 a_{i-1} + 2b_2 a_{i-2} + \dots + (i-1)b_{i-1} a_1 + ib_i a_0 = \sum_{j=1}^i ja_{i-j} b_j$.

Az előzőeket felhasználva:

$$\begin{aligned} x'(t)y(t) + x(t)y'(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} d_i t^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} e_i t^{i-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (d_i + e_i) t^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i ja_j b_{i-j} + \sum_{j=1}^i ja_{i-j} b_j \right) t^{i-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) t^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} ic_i t^{i-1} = (x(t)y(t))'. \end{aligned}$$

Hatvány-szabály: $(x(t)^n)' = nx(t)^{n-1}x'(t)$. Teljes indukcióval bizonyítunk n szerint.

Legyen $n = 1$. Ekkor:

$$x'(t) = (x(t)^1)' = 1x(t)^{1-1}x'(t) = x'(t).$$

Tegyük fel, hogy igaz az állításra n -re nézzük meg $n + 1$ -re:

$$(x(t)^{n+1})' = (x(t)^n x(t))'.$$

Használjuk a szorzat-szabályt ekkor:

$$\begin{aligned} (x(t)^n x(t))' &= (x(t)^n)' x(t) + x(t)^n x'(t) = nx(t)^{n-1} x'(t) x(t) + x(t)^n x'(t) = \\ &= nx(t)^n x'(t) + x(t)^n x'(t) = (n+1)x(t)^n x'(t) \end{aligned}$$

Lánc-szabály:

$$x(y(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y(t)^i \text{ és } x'(y(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i y(t)^{i-1}$$

Ezek segítségével és felhasználva a linearitást és a hatvány-szabályt következik:

$$\begin{aligned} x(y(t))' &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i y(t)^i \right)' = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (y(t)^i)' = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i y(t)^{i-1} y'(t) = \\ &= x'(y(t)) y'(t) \end{aligned}$$

□

2.3. Az $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1}$ formális hatványsor vizsgálata

2.8. Tétel. Algebra alaptétele: Minden $K[X]$ -beli n -ed fokú polinomnak multiplicitásokkal együtt legfeljebb n gyöke van.

2.9. Definíció. A K test karakterisztikája az a p legkisebb pozitív egész szám, melyre $1 + \dots + 1 = 0$. Ha nincs ilyen szám akkor K karakterisztikája 0.

Továbbiakban feltesszük, hogy a K 0 karakterisztikájú test.

2.10. Definíció. Tetszőleges $z \in K$ szám és n nem negatív egész esetén legyen:

$$\binom{z}{n} = \frac{z \cdot (z-1) \cdot \dots \cdot (z-n+1)}{n!}$$

2.11. Definíció. Legyen $\forall \mathbb{N} : b_n(m) = \binom{m}{n}$. $b_n(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0, 1, \dots, n-1$

2.12. Állítás. Legyen $f(X, Y) \in K[X, Y]$ polinom és $U, V \subseteq K$ végtelen halmazok azzal a tulajdonsággal, hogy minden $u \in U, v \in V$ esetén $g(u, v) = 0$. Ekkor $g(X, Y)$ azonosan nulla.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy f nem azonosan 0. Legyen f a következő alakú:

$$f(X, Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{(n-1)} + \dots + a_nX$$

, ahol $a_0(X) \neq 0$. $a_0(X)$ k -ad fokú polinomja X -nek, U végtelen halmaz, ezért nem lehet minden pontja $a_0(X)$ -nek zérushelye, mert akkor $a_0(X) \equiv 0$ lenne. Ezért $\exists u \in U$ hogy $a_0u \neq 0$, mivel f nem azonosan 0. Ekkor az $f(u, Y) \in K[Y]$ egyváltozós polinom n -edfokú és legfeljebb n gyöke van az algebra alaptétele miatt. Az előző indokláshoz hasonlóan kapjuk, hogy $\exists v \in V$, hogy $f(u, v) \neq 0$. Ez pedig ellentmondás. $\square$

2.13. Tétel. *Binomiális tétel: Bármely n természetes számra és tetszőleges a, b valós számokra :*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i =$$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

2.14. Állítás. *Minden $n, m, k \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

Bizonyítás.

Tekintsük a következő összeget: $\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$ és használjuk a binomiális tételt úgy, hogy $a = 1, b = x, n = n + k$ és $i = k$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k = (1+x)^{n+m} =$$

Az asszociativitás és a binomiális tétel felhasználásával:

$$(1+x)^n (1+x)^m = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j$$

Mivel $k = i + j$ és használjuk a formális hatványsorok definícióját kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{k-i=0}^m \binom{m}{k-i} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \right) x^k$$

Ebből pedig következik, hogy:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

□

2.15. Állítás. Teljesül az alábbi polinomiális egyenlőség:

$$b_k(X+Y) = \sum_{i=0}^k b_i(X) b_{k-i}(Y)$$

Bizonyítás. Legyen $f(X, Y) = b_k(X+Y) - \sum_{i=0}^k b_i(X) b_{k-i}(Y) \in K[X, Y]$ polinom.

Belátjuk, hogy $\forall n, m \in \mathbb{N}$ esetén $f(n, m) = 0$.

$$f(n, m) = b_k(n+m) - \sum_{i=0}^k b_i(n) b_{k-i}(m) = \binom{n+m}{k} - \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

A 2.12. állítás miatt $U = V = \mathbb{N}$ -t véve kapjuk, hogy $f(X, Y)$ azonosan 0.

□

2.16. Következmény. Minden $x, y \in K$ esetén $b_k(x+y) = \sum_{i=0}^k b_i(x) b_{k-i}(y)$.

2.17. Definíció. Tetszőleges $x \in K$ értékre legyen $u_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} t^i \in K[[t]]$ formális hatványsor.

2.18. Állítás. Az $u_n(t)$ formális hatványsorra $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy $u_n(t) = (1+t)^n$

Bizonyítás. $u_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} t^i$.

A binomiális tétel miatt $(1+t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} t^i$, ahol $\binom{n}{i} = 0$, ha $i > n$ ez igaz, mivel $b_i(n) = 0$, ha $n=0, 1, \dots, i-1$.

□

2.19. Állítás. Az $u_x(t), u_y(t)$ formális hatványsorokra teljesül, hogy $u_x(t)u_y(t) = u_{x+y}(t)$.

Bizonyítás. Mivel $u_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} t^i$ és $u_y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{y}{i} t^i$ ezért:

$$u_x(t)u_y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{y}{i} t^i$$

A formális hatványsorok szorzatára vonatkozó definíció:

$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ és $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ formális hatványsorok szorzata:

$z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ formális hatványsor, melyre $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$. Itt $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$.

Így $x(t)y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) t^i$

Ezt használva:

$$\begin{aligned} u_x(t)u_y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} t^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{y}{i} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i \binom{x}{j} \binom{y}{i-j} \right) t^i = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x+y}{i} t^i = u_{x+y}(t) \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség igaz lesz a 2.16. következmény miatt. □

2.20. Definíció. Azt az origó körüli szimmetrikus intervallumot, amelyben az origó körüli hatványsor abszolút konvergens, konvergenciaintervallumnak nevezzük, ennek sugarát konvergenciasugárnak. Ha a hatványsor mindenütt konvergens, akkor a konvergenciasugarat végtelennek tekintjük, ha a hatványsor csak az origóban konvergál, akkor azt mondjuk, hogy a konvergenciasugár nulla.

2.21. Tétel. (Cauchy-Hadamard)

A $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ hatványsor konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\limsup_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_i|}},$$

ha a $|t| < r$, akkor a hatványsor abszolút konvergens, ha pedig $|t| > r$, akkor a hatványsor divergens, ha $|t| = r$ akkor pedig nem tudjuk.

Megjegyzés: ha a hatványsor együtthatói között legfeljebb véges sok nulla van, akkor:

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right|$$

2.22. Állítás. Az $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1}$ formális hatványsorra teljesül, hogy $x(t)^2 = t^2 + t^3$. Vizsgáljuk az $x(t)$ konvergenciasugarát a $K = \mathbb{C}$ esetben.

Bizonyítás.

A 2.18. és a 2.19. állítások felhasználásával kapjuk, hogy:

$$u_{1/2}(t)^2 = u_1(t) = 1 + t$$

Ebből pedig következik az állítás helyessége, mivel:

$$x(t)^2 = t^2 + t^3 = t^2(1 + t)$$

Az $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} t^{i+1}$ konvergenciasugarának meghatározása:

A következő formulát használhatjuk, mivel az $x(t)$ -nek legfeljebb csak véges 0 együtthatója van.

$$r = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{1/2}{i}}{\binom{1/2}{i+1}} \right| =$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - i + 1)}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - i + 1)(\frac{1}{2} - i)} \frac{(i+1)!}{i!} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{i+1}{\frac{1}{2} - i} \right| = 1$$

Így az $x(t)$ formális hatványsor konvergenciasugara 1.

□

3. Algebrai görbék lokális paraméterezése

3.1. Definíció. (Algebrai görbe)

Legyen K rögzített test. Ekkor algebrai görbén egy $f(X, Y) = \sum_{i,j \geq 0}^{i+j \leq n} a_{ij} X^i Y^j$ ($a_{ij} \in K$) kétváltozós n -edfokú polinom zérushelyeinek halmazát értjük, azaz a $V(f) := \{(X, Y) \in K^2 : f(X, Y) = 0\}$ halmaz elemeit.

3.2. Definíció. (Affin transzformáció)

A koordináta sík $P(x, y) \mapsto P(x', y')$ alakú transzformációit, ahol

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

és $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, affin transzformációknak nevezzük.

3.3. Definíció. (Sima pont)

Az $f(X, Y) = 0$ görbe $P(a, b)$ pontját *sima pontnak* nevezzük, ha (a, b) -ben nem tűnnek el a parciális deriváltak egyszerre, azaz ha $(f'_X(a, b), f'_Y(a, b)) \neq (0, 0)$.

3.4. Definíció. Legyen $P(a, b)$ a $\Gamma : f(X, Y) = 0$ algebrai görbe *sima pontja*. Ekkor azt az egyenest, amelynek a P -beli metszési multiplicitása 1-nél nagyobb, a Γ P -beli érintőjének nevezzük.

Az érintő egyenlete a $P(a, b)$ pontban:

$$f'_X(a, b)(X - a) + f'_Y(a, b)(Y - b) = 0$$

3.5. Állítás. Legyen $\Gamma : f(X, Y) = 0$ K feletti algebrai görbe melynek $(0, 0)$ *sima pontja* $Y = 0$ érintővel.

(a)

Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan K elemeiből álló $a_1, a_2, \dots$ sorozat létezik, amelyre

$$t^{i+1} | f(t, a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_i t^i)$$

teljesül minden $i > 0$ esetén.

(b)

Legyen $u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ a fenti $a_1, a_2, \dots$ sorozattal. Ekkor igaz, hogy $f(t, u(t)) = 0$

Bizonyítás.

(a)

Legyen $f(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} X^i Y^j$.

Tudjuk, hogy $f(0, 0) = 0$, amiből következik, hogy $b_{00} = 0$.

Mivel a $(0, 0)$ *sima pont*, ezért a *sima pont definíciója* miatt

$$(f'_X(0, 0), f'_Y(0, 0)) \neq (0, 0).$$

Az adott pontba húzható érintő egyenlete definíció szerint az $a = 0, b = 0$ esetben :

$$f'_X(0, 0)X + f'_Y(0, 0)Y,$$

mivel a $(0, 0)$ pontban az érintő $Y = 0$, így $f'_X(0, 0) = 0$ és $f'_Y(0, 0) \neq 0$.

Mivel $f'_X(0, 0) = 0 \rightarrow b_{10} = 0$ továbbá leosztva b_{01} -gyel feltehetjük, hogy $b_{01} = 1$.

Ekkor

$$f(X, Y) = Y + b_{20}X^2 + b_{11}XY + b_{02}Y^2 + \dots$$

Az $i=1$ esetben:

$$f(t, a_1 t) = a_1 t + t^2(\dots)$$

Ebből az következik, hogy $t^2 | f(t, a_1 t)$ -t akkor és csak akkor, ha $a_1 = 0$.

i=2 esetben:

$$t^3|f(t, a_1t + a_2t^2) = f(t, a_2t^2) = t^2(a_2 + b_{20}) + t^3(\dots)$$

Ebből az következik, hogy $t^3|f(t, a_1t + a_2t^2)$ -t akkor és csak akkor, ha $a_1 = 0$ és $a_2 = -b_{20}$.

i=3 esetben:

$$t^4|f(t, a_2t^2 + a_3t^3) = t^2(a_2 + b_{20}) + t^3(a_3 - a_2b_{11} + b_{30}) + t^4(\dots) =$$

$$t^3(a_3 - b_{20}b_{11} + b_{30}) + t^4(\dots)$$

Ebből az következik, hogy $t^4|f(t, a_1t + a_2t^2 + a_3t^3)$ -t akkor és csak akkor, ha $a_1 = 0$, $a_2 = -b_{20}$, $a_3 = b_{20}b_{11} - b_{30}$.

Látható, hogy minden a_i értéket ki tudunk fejezni a b_{ij} -k segítségével egyértelmű módon.

(b)

Mivel $u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$, ezért az (a) állítás miatt $t^{i+1}|f(t, u(t))$ minden i -re igaz. Ez csak akkor fordulhat elő ha $f(t, u(t)) = 0$.

□

3.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $u(t), v(t)$ formális hatványsorok a $\Gamma : f(X, Y) = 0$ K feletti algebrai görbe lokális paraméterezése a $P(a, b)$ pontban, ha $u(0) = a$, $v(0) = b$ és $f(u(t), v(t)) = 0$.

3.7. Állítás. Ha a P a Γ sima pontja és $(u(t), v(t))$ lokális paraméterezés P -ben, akkor $(u'(0), v'(0))$ a P -beli érintő irányvektora.

Bizonyítás.

Mivel $f(u(t), v(t)) = 0$ és $f(u(0), v(0)) = f(a, b)$, ezért:

$$\begin{aligned} f'(u(t), v(t)) &= f'_X(u(t), v(t))u'(t) + f'_Y(u(t), v(t))v'(t) = \\ &f'_X(a, b)u'(t) + f'_Y(a, b)v'(t) \end{aligned}$$

$t=0$ esetben pedig

$$f'(u(0), v(0)) = f'_X(a, b)u'(0) + f'_Y(a, b)v'(0) = 0$$

Ebből az látszik, hogy az $(f'_X(a, b), f'_Y(a, b))$ vektor skalárisan össze van szorozva a $(u'(0), v'(0))$ vektorral és a szorzat 0-át ad így $(u'(0), v'(0))$ merőleges $(f'_X(a, b), f'_Y(a, b))$ -re.

A P pontba húzott érintő egyenlete:

$$f'_X(a, b)(X - a) + f'_Y(a, b)(Y - b) = 0$$

Az érintő normálvektora: $(f'_X(a, b), f'_Y(a, b))$

Az érintő normálvektora merőleges az érintő irányvektorára. Így, mivel $(u'(0), v'(0))$ merőleges $(f'_X(a, b), f'_Y(a, b))$ -re következik, hogy a P-beli érintő irányvektora: $(u'(0), v'(0))$

□

3.8. Állítás. *Mutassa meg, hogy ha $P(a, b)$ a $\Gamma : f(X, Y) = 0$ algebrai görbe sima pontja, akkor van Γ -nak lokális paraméterezése.*

Bizonyítás. Legyen $\Gamma : f(X, Y) = 0$ algebrai görbe és tegyük fel, hogy a $(0, 0)$ sima pontja $Y=0$ érintővel. Ekkor a 3.5 állítás alapján tudjuk, hogy létezik olyan $u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ formális hatványsor, hogy $f(t, u(t)) = 0$. Ez pontosan azt jelenti, hogy ebben a pontban van lokális paraméterezés, mivel t is egy formális hatványsor és $t = 0$ -ban $(t, u(t)) = (0, 0)$.

Nézzük a Γ görbe $P(a, b)$ sima pontját t érintővel. Ekkor alkalmazzunk egy α affin transzformációt, ami a P-t elviszi a $(0, 0)$ -ba és t -t elviszi az $Y = 0$ -ba azaz az x -tengelybe. Legyen Γ α melletti képe Γ' .

Jelölje $(t, u(t))$ a Γ' lokális paraméterezését $(0, 0)$ -ban. Az α inverze szintén affin transzformáció, az inverz koordináták alakja:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

Ekkor $(t, u(t))$ képe α inverze mellett $(v(t), w(t))$, ahol:

$$v(t) = a_{11}t + a_{12}u(t) + b_1$$

$$w(t) = a_{21}t + a_{22}u(t) + b_2$$

Ezek szintén formális hatványsorok, és $(v(t), w(t))$ a keresett lokális paraméterezése Γ -nak az (a, b) -ben.

□

Hivatkozások

- [1] Dr. Nagy Gábor Péter, *Algebrai görbék előadásjegyzete*, 2012.
- [2] Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába*, Typotex, 2007.
- [3] Dr. Leindler László, *Analízis*, Polygon, 2004.
- [4] Dr. Szabó László, *Bevezetés a lineáris algebra*, Polygon, 2003.
- [5] Dr. Szendrei Ágnes, *Diszkrét matematika*, Polygon, 2009.
- [6] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Komplex függvénytan*, Polygon, 2009.
- [7] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer, 2003.

Nyilatkozat

Alulírott Csibor László kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2013. május 10.

.....
aláírás