

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

**Harmadrendű görbék kanonikus
egyenlete**

BSc szakdolgozat

Készítette:
Csányi János Dániel
matematika szakos
hallgató

Témavezető:
Dr. Nagy Gábor Péter
egyetemi docens

Szeged
2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Az affin és a projektív sík	4
1.1. A projektív sík heurisztikus konstrukciója	4
1.2. A konstrukció matematikai formalizációja	4
1.3. Projektív és affin lineáris leképezések	5
2. Algebrai görbék, görbe foka és irreducibilitása	6
3. Görbe és egyenes metszési multiplicitása	7
3.1. Egyenes paraméterezése	7
3.2. A metszési polinom	8
3.3. Metszési multiplicitás egy adott pontban	9
4. Pont multiplicitása, sima és szinguláris pontok	10
4.1. Pont multiplicitása egy adott görbén	10
4.2. Sima és szinguláris pontok	11
5. Algebrai görbék érintői	12
5.1. Az általános definíció	12
5.2. Érintők sima pontban	13
6. Inflexiós pontok	13
7. Irreducibilis harmadrendű görbék	14
7.1. A szinguláris pontok száma	15
7.2. Kanonikus alak (1. lépés)	15
7.3. Kanonikus alak (2. lépés)	17
7.4. Szinguláris pont létezése	18
7.5. Kanonikus alak (3. lépés)	18
Irodalomjegyzék	21
Nyilatkozat	22

Bevezetés

A dolgozat az algebrai geometria témaköréhez kapcsolódik. Ezen tudományterület az algebra és a geometria kapcsolatát tanulmányozza, geometriai fogalmakat, problémákat kezel algebrai eszközök segítségével. Központi fogalma az algebrai görbe, mely alatt egy két-illetve háromváltozós polinom zérushelyeinek halmazát értjük. Ezeket a zérushelyeket (rendezett (X, Y) számpárokat illetőleg (X, Y, Z) számhármassokat) tudjuk a síkon ábrázolni, és ezeket nevezzük a görbe pontjainak, adva ezzel geometriai értelmet az algebrai manipulációnak.

A dolgozat célja a témakör fogalmainak (algebrai görbe, görbe foka és irreducibilitása, görbe és egyenes metszési multiplicitása, pont multiplicitása, sima és szinguláris pont, érintő, inflexiós pont) felépítése algebrai úton. A szinguláris pontoknak kitüntetett szerepe van a görbék geometriája szempontjából. Ezek olyan pontok, ahol a görbe többszörösen átmetszi önmagát, vagy csúcsos fordulópontja van, illetve lehetnek izolált pontok. Célunk a fogalmak felépítése mellett speciálisan annak megmutatása, hogy egy irreducibilis harmadrendű görbének legfeljebb egy szinguláris pontja van, és minden ilyen görbe projektív lineáris transzformációk alkalmazásával olyan alakúra (kanonikus alakúra) hozható, melyből könnyen leolvasható, hogy a görbének létezik-e szinguláris pontja, és ha igen, az milyen típusú.

Minden fogalmat definiálni fogunk affin-és projektív síkon is, és leírjuk majd az ezek közötti kapcsolatot és átmenetet. Elsőként az affin és a projektív sík kapcsolatáról lesz szó, és a nagy jelentőséggel bíró affin-és projektív lineáris transzformációkról. Ezek után csakis olyan geometriai fogalmakat vezetünk majd be, melyek projektív lineáris transzformációk során változatlanok maradnak. Leírjuk először is, mit értünk algebrai görbén, görbe fokán-és irreducibilitásán, majd a metszési polinom és a többszörös gyök fogalmának segítségével definiáljuk, mit értünk görbe és egyenes metszési multiplicitásán. Ezen fogalom segítségével definiáljuk majd a pont multiplicitását, és a görbe pontjait sima-illetve szingulárisnak nevezzük majd a multiplicitásuktól függően. Az analízisből már ismert érintő illetve inflexiós pont fogalmakat ezúttal algebrai eszközökkel definiáljuk majd, eddigi fogalmainkból kiindulva. Ezután irreducibilis harmadrendű görbékkel foglalkozunk. Belátjuk, hogy minden ilyen görbének legfeljebb egy szingularitása van, és adunk egy szükséges és elegendő feltételt ennek létezésére. Végül igazoljuk, hogy minden irreducibilis harmadfokú görbe 3 lépésben (egy projektív-és két affin lineáris transzformáció egymás utáni alkalmazásával) kanonikus alakúra hozható, és ebből vonunk le következtetést a görbe esetleges szinguláris pontját illetően.

1. Az affin és a projektív sík

Legyen K rögzített test. Affin síkon általában a hagyományos K^2 koordinátasíkot értjük, ahol a pontok reprezentálhatók rendezett (x, y) számpárokkal, ahol $x, y \in K$. Az affin síkra az $AG(2, K)$ jelölést használjuk.

1.1. A projektív sík heurisztikus konstrukciója

A $PG(2, K)$ -val jelölt projektív sík konstrukciója elképzelhető a következőképpen: Tekintsünk egy tetszőleges L síkot a K^3 vektortérben, amely nem megy át a $(0, 0, 0)$ ponton (vagyis az origón), továbbá jelölje L_0 azt a síkot, mely párhuzamos L -el, és átmegy az origón. Ekkor minden origón áthaladó f egyenes, mely nem az L_0 síkon fekszik, pontosan 1 pontban metszi L -t, és fordítva, az L sík minden egyes P pontjához létezik egy (és csak egy) olyan f egyenes, amely áthalad a P ponton és az origón, valamint L_0 nem tartalmazza. Ha az L síkot tekintem az affin K^2 síknak, akkor az eddigi konstrukcióval létesítettünk egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót) az affin sík (K^2) elemei és K^3 azon egyenesei között, melyek átmennek az origón, és nincsenek az L_0 síkban. $PG(2, K)$ pontjai tehát tulajdonképpen K^3 origón áthaladó egyenesei, melyek közül azokat, melyek nem haladnak át L_0 -on, közönséges, míg azokat, melyek igen, végtelen távoli pontoknak nevezzük.

A projektív sík tekinthető tehát úgy, mint az affin sík kibővítése a végtelen távoli pontokkal.

1.2. A konstrukció matematikai formalizációja

A konstrukció matematikai vetülete a következő: minden K^3 -beli $X \neq (0, 0, 0)$ vektor egyértelműen meghatároz egy $PG(2, K)$ -beli pontot (jelesül az X -en valamint az origón áthaladó egyenest). Fontos észrevétel, hogy tetszőleges $X \neq (0, 0, 0)$ vektor esetén $\forall \lambda \in K, \lambda \neq 0 : \lambda X$ ugyanazt a projektív pontot határozza meg. Ezek szerint $PG(2, K)$ pontjai tekinthetők $(x : y : z)$, úgynevezett homogén számhármassoknak, ahol:

$$(x_1 : y_1 : z_1) = (x_2 : y_2 : z_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 : x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2.$$

Mivel a projektív sík függ L megválasztásától, praktikus L -t a $z = 1$ egyenletű síknak választani. Ekkor K^2 -et a következőképpen azonosítjuk L -el: $(x, y) \sim (x : y : 1)$, ahol $(x, y) \in K^2$ és $(x : y : 1) \in PG(2, K)$. Ekkor L_0 nyilván a $z = 0$ egyenletű sík, ezt nevezzük végtelen távoli egyenesnek.

Fontos még annak a tisztázása, hogy mit értünk projektív egyeneseken. Az eddigi konstrukcióhoz hasonlóan vegyük észre, hogy egy origón áthaladó S sík ($S \neq L_0$) az L síkot egy egyenesben metszi. Az L_0 sík pedig a végtelen távoli pontokat (origón átmenő egyenesek, melyek L_0 -on fekszenek) tartalmazza. Projektív egyeneseken definíció szerint origón átmenő síkokat értünk, más olvasatban olyan homogén $(x : y : z)$ számhármak halmazát, melyek kielégítenek egy $ax + by + cz = 0$ homogén lineáris egyenletet. A $z = 0$ végtelen távoli egyenest l_∞ -el jelölve teljesül, hogy $AG(2, K) = PG(2, K) \setminus l_\infty$.

1.3. Projektív és affin lineáris leképezések

Legyen $A = a_{ij}$ 3×3 -as invertálható mátrix ($\det(A) \neq 0$). Ekkor az A által meghatározott φ_A projektív lineáris transzformáció a $P(x : y : z)$ pontot a $P'(x' : y' : z')$ pontba viszi, ahol:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

Megmutatható, hogy az imént definiált φ_A leképezés jóldefiniált, egyenestartó bijekció, továbbá invertálható, inverze $\varphi_{A^{-1}}$ és $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$. A projektív lineáris leképezések csoportot alkotnak. Megmutatható, hogy φ_A pontosan akkor hagyja fixen l_∞ -t, ha $a_{31} = a_{32} = 0$. Ekkor affin transzformációról beszélünk. Abban az esetben, ha $a_{33} \neq 0$, a φ_A transzformáció megszorítható $AG(2, K)$ -ra a következőképpen: a $P(x, y)$ pont képe φ_A mellett az a $P'(x', y')$ pont, melyre:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_{11}}{a_{33}}x + \frac{a_{12}}{a_{33}}y + \frac{a_{13}}{a_{33}} \\ y' = \frac{a_{21}}{a_{33}}x + \frac{a_{22}}{a_{33}}y + \frac{a_{23}}{a_{33}} \end{cases}$$

Az affin transzformációk speciális projektív transzformációk. S és S' alakzatokról azt mondjuk, hogy projektív (affin) ekvivalensek, ha létezik olyan φ_A projektív (affin) lineáris transzformáció, mely S -et S' -be viszi. Egy tetszőleges alakzat valamely tulajdonságáról, speciális pontjáról vagy egyeneséről azt mondjuk, hogy affin (projektív) invariáns, ha jellege változatlan marad a transzformáció során.

A téma tárgyalásánál nagy jelentőséggel bír az alábbi tétel, melyet úgy is emlegetnek, mint a projektív leképezések alaptétele:

1.1. Tétel. Legyen P_0, P_1, P_2, P_3 és Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 két általános helyzetű pontnégyes (azaz semelyik 3 pont nem esik egyazon egyenesre). Ekkor létezik pontosan egy olyan φ_A projektív lineáris transzformáció, melyre: $\varphi_A(P_0) = Q_0$, $\varphi_A(P_1) = Q_1$, $\varphi_A(P_2) = Q_2$, $\varphi_A(P_3) = Q_3$.

2. Algebrai görbék, görbe foka és irreducibilitása

A témához kapcsolódó fogalmak, definíciók és tételek felépítésénél szükség van azok affin és projektív értelmezésére is. Az algebrai görbe fogalma affin síkon a következő:

2.1. Definíció. Legyen K rögzített test. Ekkor algebrai görbén egy $f(X, Y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} X^i Y^j$ ($a_{ij} \in K$) kétváltozós n -edfokú polinom zérushelyeinek halmazát értjük, azaz a $V(f) := \{(X, Y) \in K^2 : f(X, Y) = 0\}$ halmaz elemeit.

Fontos észrevétel, hogy ha $f(X, Y)$ egy kétváltozós n -edfokú polinom, akkor $\forall \lambda \in K : \lambda \neq 0$ nemzéró skalár esetén $\lambda f(X, Y)$ ugyanazt a görbét határozza meg.

A $PG(2, K)$ projektív sík pontjai homogén $(X : Y : Z)$ számhármassok. Ez alapján, az affin definícióhoz analóg módon, az algebrai görbe definíciója projektív síkon a következő:

2.2. Definíció. Legyen K rögzített test. Ekkor algebrai görbén egy $F(X, Y, Z) = \sum_{i+j+k=n} a_{ijk} X^i Y^j Z^k$ ($a_{ijk} \in K$) háromváltozós, n -edfokú homogén polinom zérushelyeinek halmazát értjük, azaz a $V(F) = \{(XYZ) \in PG(2, K) : F(X, Y, Z) = 0\}$ halmaz elemeit.

Itt fontos megvizsgálni a jóldefiniáltságot. Az, hogy egy $(X : Y : Z)$ homogén számhármass eleme-e a $V(F)$ halmaznak, nem függ a homogén számhármass reprezentánsának megválasztásától. Ez azonnal adódik abból a tényből, hogy $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^n F(X, Y, Z)$, ahol $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, valamint $F(X, Y, Z)$ n -edfokú homogén polinom. Ekkor ugyanis nyilvánvaló, hogy: $F(X, Y, Z) = 0 \Leftrightarrow F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = 0$.

A következő lépés annak tisztázása, hogy mit értünk egy algebrai görbe fokán affin, illetve projektív síkon.

2.3. Definíció. Egy Γ algebrai görbe fokán affin síkon a meghatározó $f(X, Y)$ polinom totális fokát értjük, azaz a legmagasabb fokú monómiájának a fokát.

2.4. Definíció. Egy Γ algebrai görbe fokán projektív síkon a meghatározó $F(X, Y, Z)$ homogén polinom fokát értjük.

A görbe foka projektív invariáns, azaz ha Γ d -edfokú görbe, φ_A projektív lineáris transzformáció, és Γ' a Γ görbe φ_A melletti képe, akkor Γ' szintén d -edfokú.

Emlékeztetőül, $AG(2, K)$ és $PG(2, K)$ közönséges pontjai között létesítettünk egy bijekciót a következőképpen: $(X, Y) \sim (X : Y : 1)$ és fordítva: $(X : Y : Z) \sim (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$. Ez alapján, az algebrai görbéket meghatározó $f(X, Y)$ és $F(X, Y, Z)$ polinomok közötti átmenet a következőképpen történik: $f(X, Y) = F(X, Y, 1)$ illetve $F(X, Y, Z) = Z^n f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$.

A harmadfokú görbéket más néven harmadrendű görbének nevezzük. Az általános harmadrendű görbe egyenlete affin síkon:

$$f(X, Y) = a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3 + a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{10}X + a_{01}Y + a_{00} = 0$$

Ugyanez a projektív síkon homogén polinommal kifejezve:

$$F(X, Y, Z) = a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3 + a_{20}X^2Z + a_{11}XYZ + a_{02}Y^2Z + a_{10}XZ^2 + a_{01}YZ^2 + a_{00}Z^3 = 0$$

2.5. Definíció. Egy Γ algebrai görbét irreducibilisnek nevezünk, ha a meghatározó $f(X, Y)$ vagy $F(X, Y, Z)$ polinom irreducibilis, azaz nem bomlik fel alacsonyabb fokú tagok szorzatára.

A definíció alapján belátható, hogy egy harmadrendű görbe pontosan akkor irreducibilis, ha nem bomlik fel egy egyenes és egy másodrendű görbe uniójára, illetve nem bomlik fel 3 egyenes uniójára.

3. Görbe és egyenes metszési multiplicitása

Ebben a szakaszban bevezetjük a metszési multiplicitás definícióját mind affin, mind projektív síkon. Erre a fogalomra támaszkodva építjük majd fel a további definíciókat.

3.1. Egyenes paraméterezése

Be fogjuk vezetni az egyenes paraméterezésének fogalmát affin, illetve projektív síkon.

3.1. Definíció. Legyen adott az affin síkon egy $e : aX + bY + c = 0$ egyenletű egyenes. Az e egyenes egy paraméterezésén egy $r : K \rightarrow e$,

$$r(t) = (u_1t + v_1, u_2t + v_2)$$

alakú bijekciót értünk.

Az (u_1, u_2) vektort az e egyenes irányvektorának nevezzük. Vegyük észre, hogy a (v_1, v_2) pont rajta van az e egyenesen, nevezetesen $(v_1, v_2) = r(0)$. Egy egyenes paraméterezése tehát felfogható úgy, mint az egyenes megadása egy pontjával és egy irányvektorával. Mivel a pont tetszőleges, illetve az irányvektor csak skalárszorzó erejéig egyértelműen meghatározott, egy egyenesnek végtelen sok paraméterezése létezik. Igaz azonban a következő tétel:

3.2. Tétel. *Legyenek $r(t) = (u_1t + v_1, u_2t + v_2)$ és $r'(t) = (u'_1t + v'_1, u'_2t + v'_2)$ az e egyenes 2 paraméterezése. Ekkor léteznek $\alpha \in K, \beta \in K$, melyekre $r'(t) = r(\alpha t + \beta)$.*

Fontos észrevétel, hogy az e egyenesnek megadható paraméterezése, ha ismerjük két különböző $(A$ és $B)$ pontját, a következőképpen:

$$r(t) = ((1-t)A_1 + tB_1, (1-t)A_2 + tB_2)$$

Ezután térjünk át az egyenes paraméterezésének projektív definíciójára. A projektív sík egyenesei $e : aX + bY + cZ = 0$ alakúak, és pontjai homogén $(X : Y : Z)$ számhármakok. A projektív síkon bármely egyenest egyértelműen meghatározza 2 különböző $(A = (A_1 : A_2 : A_3)$ és $B = (B_1 : B_2 : B_3))$ pontja, és e paraméterezhető a következő módon:

$$r(t, s) = (A_1t + B_1s : A_2t + B_2s : A_3t + B_3s)$$

3.2. A metszési polinom

3.3. Definíció. *Legyen Γ d -edfokú algebrai görbe az affin síkon, a meghatározó polinom legyen f . Legyen l egy tetszőleges egyenese $AG(2, K)$ -nak, továbbá legyen $r(t) = (u_1t + v_1, u_2t + v_2)$ az l egyenes egy paraméterezése. Ekkor a $\Phi(t) = f(u_1t + v_1, u_2t + v_2)$ polinomot a Γ és az l egyenes által meghatározott metszési polinomnak nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy a metszési polinom legfeljebb d -edfokú, a gyökeket jelöljük $t_0, t_1, \dots$ -el. Vegyük észre továbbá, hogy a $t_0, t_1, \dots$ paraméterekhez tartozó $r(t_0), r(t_1), \dots$ pontok éppen a Γ és az l egyenes metszéspontjait adják meg. A metszési polinom gyökeinek számát (multiplicitásokkal számolva) a Γ és l metszési számának nevezzük. Nagy jelentőséggel bír a következő tétel:

3.4. Tétel. *Legyen Γ d -edfokú affin algebrai görbe ($d \geq 1$), és legyen l egy egyenes. Ekkor Γ és l metszési száma $\leq d$, vagy pedig az l egyenes komponense a Γ görbének. Ebből adódóan, minden olyan d -edfokú Γ görbe esetén, melynek nincs lineáris komponense, d jó felső becslés Γ -nak akármely l egyenessel vett metszési számára.*

Az eddigi gondolatmenet kiterjeszthető $PG(2, K)$ -ra a következő módon.

3.5. Definíció. Legyen F az a d -edfokú homogén polinom, mely a Γ projektív görbét határozza meg. Legyen L egy tetszőleges projektív egyenes, és legyen $r(t, s) = (A_1t + B_1s : A_2t + B_2s : A_3t + B_3s)$ L egy paraméterezése. Ekkor a $\Phi(t, s) = F(A_1t + B_1s, A_2t + B_2s, A_3t + B_3s)$ kétváltozós polinomot a Γ és L által meghatározott metszési polinomnak nevezzük.

Ez esetben a metszési polinom gyökeit (t_0, s_0) rendezett számpárok alkotják. Ezeknek a számát nevezzük Γ és L metszési számának. Projektív esetben is megfogalmazható egy, az affin esethez teljesen analóg tétel:

3.6. Tétel. Legyen Γ d -edfokú projektív algebrai görbe ($d \geq 1$), és legyen L egy egyenes. Ekkor Γ és L metszési száma $\leq d$, vagy pedig az L egyenes komponense a Γ görbének. Ebből adódóan, minden olyan d -edfokú Γ görbe esetén, melynek nincs lineáris komponense, d jó felső becslés Γ -nak akármely L egyenessel vett metszési számára.

3.3. Metszési multiplicitás egy adott pontban

3.7. Definíció. Legyen Γ d -edfokú algebrai görbe az affin síkon, a meghatározó polinom pedig f , ezenkívül legyen adott egy l egyenes, és l -nek egy $r(t)$ paraméterezése. A hozzájuk tartozó metszési polinom legyen $\Phi(t)$. Legyen $P \in \Gamma \cap l$ a görbe és az egyenes egy metszéspontja, és legyen t_0 az a paraméter, melyre $P = r(t_0)$. Ekkor azt mondjuk, hogy Γ és l metszési multiplicitása a P pontban r , ha t_0 r -szeres gyöke $\Phi(t)$ -nek.

Jelölés: $r = i(P, \Gamma, l)$. Fontos kimondani a következő lemmát, mely garantálja a jóldefiniáltságot:

3.8. Lemma. Az $i(P, \Gamma, l)$ metszési multiplicitás csak P -től, Γ -tól és l -től függ, azaz nem függ l paraméterezésének megválasztásától.

Nagy jelentőséggel bír továbbá a következő lemma is:

3.9. Lemma. A metszési multiplicitás affin invariáns, azaz ha a P pont, a Γ görbe és az l egyenes képei az α affin lineáris transzformáció mellett rendre P' , Γ' illetve l' , akkor $i(P, \Gamma, l) = i(P', \Gamma', l')$.

A metszési multiplicitás projektív definíciója az affin definícióhoz hasonlóan építhető fel.

3.10. Definíció. Legyen F a Γ görbét meghatározó d -edfokú homogén polinom, és legyen L egy projektív egyenes, $r(t, s)$ paraméterezéssel. A hozzájuk tartozó metszési polinom legyen $\Phi(t, s)$. Végül legyen $P \in \Gamma \cap L$ a görbe és az egyenes egy metszéspontja, és (t_0, s_0) az a paraméter, melyre $P = r(t_0, s_0)$. Azt mondjuk, hogy Γ és L metszési multiplicitása a P pontban r , ha (t_0, s_0) r -szeres gyöke $\Phi(t, s)$ -nek. Ez azt jelenti, hogy r az a legnagyobb kitevő, melyre $(s_0 t - t_0 s)^r$ osztója a $\Phi(t, s)$ polinomnak.

Az affin síkon korábban kimondott 2 lemma érvényes lesz projektív síkon is.

3.11. Lemma. A metszési multiplicitás ($i(P, \Gamma, L)$) csak P -től, Γ -tól és L -től függ, azaz nem függ L paraméterezésének megválasztásától.

3.12. Lemma. A metszési multiplicitás projektív invariáns, azaz ha a P pont, a Γ görbe és az L egyenes képei az α projektív lineáris transzformáció mellett rendre P' , Γ' illetve L' , akkor $i(P, \Gamma, L) = i(P', \Gamma', L')$.

A metszési multiplicitás projektív és affin esetének kapcsolatát írja le az alábbi lemma:

3.13. Lemma. Legyen P a projektív Γ görbe és az L projektív egyenes egy metszéspontja. Valamely változó segítségével dehomogenizálva kapjuk a p pontot, a γ görbét és az l egyenest az affin síkon. Ekkor $i(P, \Gamma, L) = i(p, \gamma, l)$.

4. Pont multiplicitása, sima és szinguláris pontok

A következő fontos fogalom, amire szükség van a felépítés során, az a pont multiplicitása egy adott görbén. Ez alapján fogjuk majd osztályozni a görbe pontjait.

4.1. Pont multiplicitása egy adott görbén

Megint csak az affin esetet vizsgáljuk meg először. Legyen adott egy Γ görbe, és rögzítsük le egy $p(a, b)$ pontját. Tekintsük azon l egyenesek sorát, melyek átmennek a p ponton, és minden ilyen l esetén vegyük a Γ -val vett metszési multiplicitását a p pontban. A p pont multiplicitásán ezen metszési multiplicitások minimumát értjük, azaz a p pont multiplicitása a Γ görbén m pontosan akkor, ha minden p -n átmenő l egyenes esetén $i(p, \Gamma, l) \geq m$, és létezik olyan p -n átmenő l egyenes, melyre $i(p, \Gamma, l) = m$. Ekkor azt is mondjuk, hogy a p pont a Γ görbe m -szeres pontja.

Egy p pont multiplicitása egy Γ görbén jellemezhető a Γ -t meghatározó f polinom parciális deriváltjaival. Ezt írja le a következő lemma:

4.1. Lemma. Legyen $p(a, b)$ az f polinom által meghatározott Γ görbe egy pontja az affin síkon. Ekkor p multiplicitása a Γ görbén m pontosan akkor, ha az f polinom minden m -nél alacsonyabb rendű parciális deriváltja eltűnik a p pontban, és létezik olyan m -edik parciális deriváltja, mely a p pontban nullától különböző.

A pont multiplicitásának definíciója affin és projektív esetben egybeesik. Azaz a $PG(2, K)$ síkon egy P pont multiplicitásán egy Γ görbén ($P \in \Gamma$), a P -n átmenő egyeneseknek a Γ -val (a P pontban vett) metszési multiplicitásának minimumát értjük. Egy pont multiplicitásának affin és projektív olvasatát kapcsolja össze az alábbi lemma:

4.2. Lemma. Legyen P pont a Γ görbe egy pontja a $PG(2, K)$ síkon. Dehomogenizálva az x, y, z változók valamelyikének segítségével, kapjuk a p pontot és a γ görbét az $AG(2, K)$ síkon. Ekkor P multiplicitása Γ -n megegyezik p multiplicitásával γ -n.

Fontos még annak megemlítése, hogy mivel a görbe és egyenes metszési multiplicitása projektív invariáns, ezért a pont multiplicitása is az.

4.2. Sima és szinguláris pontok

4.3. Definíció. Projektív és affin síkon egyaránt akkor nevezzük a Γ görbe egy P pontját szingulárisnak, ha P multiplicitása a Γ görbén ≥ 2 .

Ellenkező esetben a görbe adott pontját sima pontnak nevezzük. A szinguláris pontoknak nagy jelentősége van a görbék geometriájának megértése szempontjából. Mint később látni fogjuk, a sima pontok azok, ahova minden esetben egyértelmű érintőt tudunk húzni.

Projektív és affin síkon is karakterizálni lehet egy adott görbe szinguláris pontjait a görbét meghatározó polinom parciális deriváltjainak segítségével. Ezt fejezi ki az alábbi 2 lemma:

4.4. Lemma. Legyen adott egy Γ görbe az $AG(2, K)$ síkon, az őt meghatározó polinom pedig legyen f . Ekkor egy $p(a, b)$ pont pontosan akkor szinguláris pontja a Γ görbének, ha $f(p) = f_x(p) = f_y(p) = 0$.

4.5. Lemma. Legyen adott egy Γ görbe a $PG(2, K)$ síkon, az őt meghatározó homogén polinom legyen F . Ekkor a $P(a, b)$ pont pontosan akkor szinguláris pontja a Γ görbének, ha $F(P) = F_x(P) = F_y(P) = F_z(P) = 0$.

A szinguláris pontok ezek alapján megkaphatók egy kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásaiként (affin esetben), és egy háromváltozós

egyenletrendszer megoldásaiként (projektív esetben). A megoldandó rendszer adott esetben lehet meglehetősen komplikált, főleg ha magasabb rendű görbéket tekintünk. Az alábbi, affin esetre vonatkozó lemma könnyíthet a számoláson némely esetben:

4.6. Lemma. *Legyen a P pont az f polinom által meghatározott Γ_1 görbe m -szeres pontja, továbbá a g polinom által meghatározott Γ_2 görbe n -szeres pontja. Ekkor a P pont a $h = fg$ polinom által meghatározott Γ_3 görbe $(m + n)$ -szeres pontja.*

Ennek következményeként, ha egy Γ görbét komponensekre bontunk, akkor a komponensek közös pontjai szükségszerűen Γ szinguláris pontjai lesznek. Tehát, ha adott esetben a görbét meghatározó polinomot alacsonyabb fokú tényezők szorzatára tudjuk bontani, akkor a tényező-polinomok közös gyökeinek kinyerésével az eredeti görbe szinguláris pontjait nyerjük, és általában alacsonyabb fokú polinomokkal könnyebb számolni.

Végül itt is lényeges megemlíteni, hogy mivel egy adott P pont multiplicitása projektív invariáns, ezért P szingularitása és nemsingularitása (simasága) szintén projektív invariáns.

5. Algebrai görbék érintői

Az érintők fontos szerepet játszanak a görbék geometriája szempontjából, és nélkülözhetetlenek a görbék inflexiós pontjának definiálásához. Az érintőt először általános értelemben definiáljuk, majd speciálisan, felírjuk a görbe egy adott sima pontjában a görbéhez húzható érintő egyenletét affin, illetve projektív síkon.

5.1. Az általános definíció

Az általános definíció egybeesik affin és projektív esetben, és a következőképpen építhető fel:

5.1. Definíció. *Legyen P a Γ algebrai görbe m -szeres pontja. Tudjuk, hogy ekkor minden P -n átmenő l egyenes esetén $i(P, \Gamma, l) \geq m$. Azon l egyeneseket pedig, melyekre $i(P, \Gamma, l) > m$, érintőnek nevezzük.*

Lényeges kérdés, hogy egy görbe egy adott pontjába hány érintő húzható. Erre ad választ az alábbi lemma:

5.2. Lemma. *Legyen a Γ görbének P egy m -szeres pontja. Ekkor Γ -hoz a P pontban legfeljebb m érintő húzható.*

Ennek a következménye az, hogy egy görbének pontosan az egyszeres (sima) pontjaiba húzható egyértelmű érintő.

Mivel a pont multiplicitása és a görbének az egyenessel vett metszési multiplicitása is projektív invariáns, ezért az érintő is projektív invariáns, a következő értelemben: Ha a P pont, a Γ görbe és az L egyenes képe az α projektív lineáris transzformáció mellett rendre a P' pont, a Γ' görbe, valamint az L' egyenes, akkor L a Γ érintője a P pontban pontosan akkor, ha L' a Γ' érintője a P' pontban.

Teljesül továbbá a következő: Egy Γ görbének a P pontban az L egyenes érintője a $PG(2, K)$ síkon pontosan akkor, ha a dehomogenizálással nyert γ görbére, p pontra és l egyenesre ugyanez teljesül az $AG(2, K)$ síkon, vagyis ha γ -nak a p pontban az l egyenes érintője.

A következőkben felírjuk az érintő egyenletét mind affin, mind projektív síkon, abban a speciális esetben, amikor P sima pontja az adott görbének, tehát amikor egyértelmű érintő húzható.

5.2. Érintők sima pontban

Legyen $p(a, b)$ a γ görbe sima pontja az $AG(2, K)$ síkon, a görbét meghatározó polinom pedig legyen f . Ekkor a γ görbe p pontjához húzható érintő egyenlete:

$$f_x(p)(x - a) + f_y(p)(y - b) = 0$$

Tekintsük most a $PG(2, K)$ síkot, és legyen a $P(a : b : 1)$ pont a Γ görbe sima pontja, a Γ -t meghatározó homogén háromváltozós polinom pedig legyen F . Ekkor a Γ görbéhez a P pontban húzható érintő egyenlete:

$$F_x(P)(x - a) + F_y(P)(y - b) + F_z(P)(z - 1) = 0$$

A $PG(2, K)$ síkon az érintő egyenlete, felhasználva az Euler-lemmát, a következő, egyszerűbb alakra írható:

$$F_x(P)x + F_y(P)y + F_z(P)z = 0$$

Tudjuk, hogy ha a Γ görbének P egy sima pontja, akkor a görbéhez a P pontban húzható L érintőre teljesül: $i(P, \Gamma, L) \geq 2$. Bizonyos speciális esetekben az is teljesül, hogy $i(P, \Gamma, L) > 2$. Ezen fontos esetet tárgyalja röviden a következő rész.

6. Inflexiós pontok

Az inflexiós pont definíciója affin és projektív síkon egyaránt a következő:

6.1. Definíció. Legyen P a Γ görbe sima pontja. Ekkor a P pontot inflexiós pontnak nevezzük pontosan akkor, ha P -re, Γ -ra, valamint Γ -nak a P -beli L érintőjére a következő teljesül: $i(P, \Gamma, L) \geq 3$.

Az inflexiós pontok tárgyalása akkor válik érdekessé, amikor legalább harmadrendű görbékről beszélünk, ugyanis egy elsőfokú görbének (egyenesnek) minden pontja inflexiós pont, egy másodrendű görbének pedig nem létezik inflexiós pontja.

Érdekes megjegyezni, hogy a Γ görbe P sima pontját akkor is inflexiós pontnak nevezzük, ha $i(P, \Gamma, L) = \infty$, azaz ha a P -beli L érintő komponense a görbének. Abban az esetben, ha $i(P, \Gamma, L) = 3$, közöséges inflexiós pontról, ha pedig $i(P, \Gamma, L) > 3$, akkor "hullámos" inflexiós pontról beszélünk.

Most mutatunk egy módszert algebrai görbék inflexiós pontjainak ki-nyerésére. Ez a görbe Hesse mátrixának segítségével történik, a következőképpen: Tekintsük a projektív síkot. Legyen a Γ görbét meghatározó d -edfokú homogén polinom F . Ekkor $F_2(P) = (F_{ij}(P))$ jelölje azt a 3×3 -as mátrixot, mely az F polinom másodrendű parciális deriváltjainak a P pontban felvett értékeit tartalmazza. Legyen továbbá $H_F(P) = \det(F_2(P))$, ekkor F_2 -t a görbe Hesse mátrixának, H_F -et pedig a görbe Hesse determinánsának nevezzük. Kimondható az alábbi fontos lemma:

6.2. Lemma. Legyen a Γ görbének P egy sima pontja, a Γ -t meghatározó polinom legyen F . Ekkor P akkor és csak akkor inflexiós pontja Γ -nak, ha $H_F(P) = 0$.

Egy görbe inflexiós pontjai tehát a görbe Hesse determinánsának gyökeiként kaphatók meg.

Fontos ezentúl megemlíteni azt is, hogy mivel az érintő és a metszési multiplicitás projektív invariánsok, ezért az inflexiós pont fogalma is projektív invariáns.

7. Irreducibilis harmadrendű görbék

A továbbiakban speciálisan irreducibilis harmadrendű görbékről lesz szó, azaz olyan Γ görbékről, melyek esetén a meghatározó polinom harmadfokú, ami nem bomlik alacsonyabb fokú tagok szorzatára. Úgy is fogalmazhatunk, hogy olyan harmadrendű görbékről van szó, melyeknek nincs egyenes komponense. Célunk az, hogy megmutassuk, minden ilyen tulajdonságú görbe bizonyos speciális alakúra (kanonikus alakúra) hozható. A kanonikus alakból pedig könnyen leolvasható lesz, hogy a görbének léteik-e szinguláris pontja, és ha igen, az milyen típusú.

7.1. A szinguláris pontok száma

Első lépésben azt vizsgáljuk meg, hány szinguláris pontja lehet egy irreducibilis harmadrendű görbének. Legyen Γ irreducibilis harmadrendű görbe, és tegyük fel, hogy P és Q Γ -nak 2 különböző szinguláris pontja. Ekkor P és Q egyaránt legalább 2-szeres pontok, ebből következően bármely rajtuk átmenő egyenesnek Γ -val vett metszési multiplicitása az adott pontban ≥ 2 . Ha most a P és Q által egyértelműen kifeszített L egyenest tekintjük, az adódik, hogy Γ és L metszési száma ≥ 4 . A 4.6.tételből pedig ekkor az következik, hogy az L egyenes egy komponense a Γ görbének, ami ellentmondana Γ irreducibilitásának. Az eddigiek alapján kimondható a következő állítás:

7.1. Állítás. *Egy irreducibilis harmadrendű görbének legfeljebb 1 szinguláris pontja van.*

7.2. Kanonikus alak (1. lépés)

Ebben a részben azt fogjuk megmutatni, hogy egy tetszőleges irreducibilis harmadrendű görbe megfelelő projektív lineáris transzformációval

$$Y^2 + \alpha XY + \beta Y = u(X)$$

alakúra hozható, ahol $\deg(u) = 3$.

Ehhez szükség lesz az alábbi tételre:

7.2. Tétel. *Ha K a valós számok teste, vagy algebrailag zárt, és Γ K feletti irreducibilis harmadrendű görbe, akkor Γ -nak létezik inflexiós pontja.*

Legyen most Γ tetszőleges irreducibilis harmadrendű görbe. A tételből következik, hogy létezik inflexiós pontja, ezt jelöljük P -vel, Γ P -beli érintőjét jelöljük L -el, és legyen Q L -nek egy P -től különböző pontja. A projektív leképezések alaptétele szerint létezik olyan φ projektív lineáris transzformáció, mely P -t a $(0 : 1 : 0)$ pontba, Q -t pedig az $(1 : 1 : 0)$ pontba viszi.

A Γ görbe φ melletti képét jelöljük Γ' -vel. Mivel az inflexiós pont projektív invariáns, ezért a $(0 : 1 : 0)$ pont Γ' -nek inflexiós pontja lesz. Az érintő szintúgy projektív invariáns, ebből következően a $(0 : 1 : 0)$ és az $(1 : 1 : 0)$ pontok rajta lesznek Γ' $(0 : 1 : 0)$ -beli érintőjén. Mivel 2 különböző pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, a Γ' görbe $(0 : 1 : 0)$ -beli érintője a $(0 : 1 : 0)$ és $(1 : 1 : 0)$ pontok által egyértelműen meghatározott $Z = 0$ végtelen távoli egyenes lesz. Tehát Γ' -nek a $(0 : 1 : 0)$ inflexiós pontja, a $(0 : 1 : 0)$ -beli érintője pedig a $Z = 0$ egyenletű egyenes.

Γ' általános alakja a $PG(2, K)$ síkon:

$$F(X, Y, Z) = a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3 + a_{20}X^2Z + \\ + a_{11}XYZ + a_{02}Y^2Z + a_{10}XZ^2 + a_{01}YZ^2 + a_{00}Z^3 = 0$$

Tudjuk, hogy a $(0 : 1 : 0)$ inflexiós pont, vagyis sima pont, és a $(0 : 1 : 0)$ -beli érintő $(Z = 0)$ Γ' -vel vett metszési multiplicitása a $(0 : 1 : 0)$ pontban ≥ 3 . Ahhoz, hogy ez teljesüljön, vegyük először a végtelen távoli egyenes egy paraméterezését. Legyen $A = (1 : 0 : 0)$ és $B = (0 : 1 : 0)$ a végtelen távoli egyenes 2 különböző pontja. Ekkor:

$$r(t, s) = (1t + 0s : 0t + 1s : 0t + 0s), \text{ tehát } r(t, s) = (t : s : 0).$$

Ezen paraméterezés mellett a metszési polinom:

$$\Phi(t, s) = F(t, s, 0) = a_{30}t^3 + a_{21}t^2s + a_{12}ts^2 + a_{03}s^3.$$

A $(0 : 1 : 0)$ ponthoz tartozó paraméter: $(t_0, s_0) = (0, 1)$. A $(0 : 1 : 0)$ inflexiós pont, tehát szükségképpen $(t_0, s_0) = (0, 1)$ legalább 3-szoros gyöke $\Phi(t, s)$ -nek. Ez azzal ekvivalens, hogy:

$$(s_0t - t_0s)^3 = t^3 | a_{30}t^3 + a_{21}t^2s + a_{12}ts^2 + a_{03}s^3 = \Phi(t, s).$$

Ebből szükségképpen következik, hogy $a_{21} = a_{12} = a_{03} = 0$. Ebből pedig az adódik, hogy $a_{30} \neq 0$, hiszen ellenkező esetben a Γ' görbe nem lenne harmadrendű. Γ' egyenlete a $PG(2, K)$ síkon tehát a következő:

$$F(X, Y, Z) = a_{30}X^3 + a_{20}X^2Z + a_{11}XYZ + a_{02}Y^2Z + \\ + a_{10}XZ^2 + a_{01}YZ^2 + a_{00}Z^3 = 0, \text{ ahol } a_{30} \neq 0.$$

Mivel $F_x(0, 1, 0) = F_y(0, 1, 0) = 0$ és $F_z(0, 1, 0) = a_{02}$, ezért szükségképpen $a_{02} \neq 0$, hiszen a $(0 : 1 : 0)$ sima pontja a görbének, és nem tűnhetnek el a parciális deriváltak egyszerre ebben a pontban. Ezután az F polinomot dehomogenizálva a $Z = 1$ helyettesítéssel, majd átrendezve, és a_{02} -vel átosztva, Γ' egyenlete a kívánt,

$$Y^2 + \alpha XY + \beta Y = u(X)$$

alakú, ahol $\deg(u) = 3$.

7.3. Kanonikus alak (2. lépés)

A célunk most annak belátása, hogy tetszőleges irreducibilis harmadrendű görbe megfelelő projektív lineáris transzformációval

$$Y^2 = u(X)$$

alakúra hozható, ahol $\deg(u) = 3$.

Legyen Γ tetszőleges irreducibilis harmadrendű görbe. Az előző lépésben láttuk, hogy létezik megfelelő φ projektív lineáris transzformáció, amely Γ -t a Γ' -be viszi, és Γ' egyenlete

$$Y^2 + \alpha XY + \beta Y = u(X)$$

alakú, ahol $\deg(u) = 3$. Alkalmazzuk Γ' -re a következő Ψ affin lineáris transzformációt:

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y + \frac{\alpha}{2}X + \frac{\beta}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' - \frac{\alpha}{2}X' - \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Γ' Ψ melletti képe legyen Γ'' , ekkor Γ'' egyenlete:

$$\begin{aligned} & (Y' - \frac{\alpha}{2}X' - \frac{\beta}{2})^2 + \alpha X'(Y' - \frac{\alpha}{2}X' - \frac{\beta}{2}) + \beta(Y' - \frac{\alpha}{2}X' - \frac{\beta}{2}) = \\ & = (Y')^2 + \frac{\alpha^2}{4}(X')^2 + \frac{\beta^2}{4} - \alpha X'Y' + \frac{\alpha\beta}{2}X' - \beta Y' - \frac{\alpha^2}{2}(X')^2 + \alpha X'Y' - \\ & - \frac{\alpha\beta}{2}X' - \frac{\alpha\beta}{2}X' + \beta Y' - \frac{\beta^2}{2} = (Y')^2 - \frac{\alpha^2}{4}(X')^2 - \frac{\alpha\beta}{2}X' - \frac{\beta^2}{4} = u(X'), \end{aligned}$$

ahol $\deg(u) = 3$. Bevezetve a $v(X') := u(X') - \frac{\alpha^2}{4}(X')^2 - \frac{\alpha\beta}{2}X' - \frac{\beta^2}{4}$ jelölést, Γ'' egyenlete a kívánt,

$$(Y')^2 = v(X'), \text{ vagy másképpen írva } Y^2 = v(X)$$

alakú lesz, ahol $\deg(v) = 3$. Elmondható tehát, hogy Γ -ra végrehajtva a $\Psi \circ \varphi$ transzformációt, a megfelelő alakot kapjuk. Mivel a projektív lineáris transzformációk csoportot alkotnak, ezért $\Phi = \Psi \circ \varphi$ szintén projektív lineáris transzformáció lesz.

7.4. Szinguláris pont létezése

Most adni fogunk egy szükséges és elégséges feltételt szinguláris pont létezésére, irreducibilis harmadrendű görbék esetén.

Azt már láttuk, hogy minden ilyen görbe

$$Y^2 = u(X)$$

alakúra hozható, ahol $\deg(u)=3$. Tegyük fel, hogy egy tetszőleges irreducibilis köbös görbét már ilyen alakra hoztunk, és jelöljük ezt a transzformált görbét Γ -val. Ekkor a Γ -t meghatározó polinom: $f(X, Y) = Y^2 - u(X)$. Γ -nak pontosan akkor van szinguláris pontja, ha van megoldása az $f = f_x = f_y = 0$, azaz a

$$\begin{cases} Y^2 - u(X) = 0 \\ 2Y = 0 \\ u'(X) = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek. Ebből szükségképpen $Y = 0$, ebből pedig $u(X) = u'(X) = 0$. Az utóbbi rendszer pedig pontosan akkor megoldható, ha u -nak létezik többszörös gyöke. Kimondható tehát a következő állítás:

7.3. Állítás. *Egy $Y^2 = u(X)$ alakú görbének pontosan akkor van szinguláris pontja, ha u -nak létezik többszörös gyöke.*

Mivel azt már láttuk, hogy egy irreducibilis harmadrendű görbének legfeljebb 1 szinguláris pontja van, ezért ha teljesül az előbbi feltétel, akkor a görbének pontosan 1 szinguláris pontja van, ellenkező esetben nincs neki.

7.5. Kanonikus alak (3. lépés)

Legyen adott egy tetszőleges irreducibilis köbös görbe, és jelöljük Γ -val azt a transzformáltját, amely

$$Y^2 = u(X)$$

alakú, ahol $\deg(u) = 3$. Az eddigiek során azt feltételeztük, hogy olyan K test feletti görbéket tekintünk, ahol K a valós számok halmaza, vagy pedig algebrailag zárt. Most tekintsünk el a valós esettől, tehát tekintsünk olyan görbéket, melyek esetén a meghatározó polinom egy algebrailag zárt test feletti polinom. Ebben az esetben $u(X)$ K felett lineáris tényezők szorzatára bomlik, azaz $u(X)$ a következő alakba írható:

$$u(X) = \gamma(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3).$$

A továbbiak során 2 esetet különböztetünk meg.

1. eset: Tegyük fel, hogy $u(X)$ -nek 3-szoros gyöke van, azaz $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Ebben az esetben alkalmazzuk a következő affin transzformációt:

$$\begin{cases} X' = X - \alpha \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = X' + \alpha \\ Y = \sqrt{\gamma} Y' \end{cases}$$

Γ ezen transzformáció melletti képét jelöljük Γ' -vel. Ezek alapján Γ' egyenletére a következő adódik:

$$\gamma(Y')^2 = Y^2 = \gamma(X - \alpha)^3 = \gamma(X')^3.$$

Ezután γ -val egyszerűsítve adódik Γ' egyenletére:

$$Y'^2 = X'^3.$$

2. eset: Most tegyük fel, hogy az $u(X)$ polinomnak létezik legalább 2 különböző gyöke. Ekkor a Γ görbe egyenlete

$$Y^2 = \gamma(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$$

alakú, ahol $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Ebben az esetben az alábbi affin transzformációt alkalmazzuk:

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} X - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)^3}} Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = (\alpha_2 - \alpha_1)X' + \alpha_1 \\ Y = \sqrt{\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)^3} Y' \end{cases}$$

Ekkor $Y'^2 = \gamma(\alpha_2 - \alpha_1)^3(Y')^2$ adódik a lineáris behelyettesítéssel, továbbá

$$\begin{aligned} u(X) &= \gamma(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) \\ &= \gamma[(\alpha_2 - \alpha_1)X'][(\alpha_2 - \alpha_1)X' + \alpha_1 - \alpha_2][(\alpha_2 - \alpha_1)X' + \alpha_1 - \alpha_3] \\ &= \gamma(\alpha_2 - \alpha_1)^3 X'(X' - 1)(X' - c). \end{aligned}$$

Ezeket összevetve, és $\gamma(\alpha_2 - \alpha_1)^3$ -al osztva kapjuk a keletkezett, Γ' görbe egyenletét:

$$(Y')^2 = X'(X' - 1)(X' - c).$$

Eddigi eredményeinket összegezve kapjuk az alábbi tételt:

7.4. Tétel. Legyen Γ egy algebrailag zárt K test feletti irreducibilis harmadrendű görbe. Ekkor megfelelő projektív lineáris transzformációval Γ egyenlete

$$Y^2 = X^3$$

vagy

$$Y^2 = X(X - 1)(X - c)$$

alakúra hozható.

Végül azt vizsgáljuk meg, hogy ezen kanonikus alakokból hogyan vonhatunk le következtetést a görbe szinguláris pontjait illetően.

Azt már láttuk, hogy egy $Y^2 = u(X)$ ($\deg(u) = 3$) alakú görbének pontosan akkor van szinguláris pontja, ha u -nak van többszörös gyöke, és ebben az esetben pontosan egy szinguláris pontja van. Az $Y^2 = X^3$ esetben a 0 3-szoros gyöke $u(X)$ -nek, tehát a görbének létezik szinguláris pontja, és ebben az esetben azt mondjuk, hogy "fordulópont" típusú szingularitása van.

A másik esetben, amikor a görbe egyenlete $Y^2 = X(X - 1)(X - c)$ alakú, $u(X)$ -nek pontosan akkor lesz többszörös gyöke, ha $c = 0$ vagy $c = 1$, ekkor $u(X)$ -nek 1 darab 1-szeres és 1 darab 2-szeres gyöke lesz, és azt mondjuk, hogy a görbének közösleges szingularitása van. Ha c 0-tól és 1-től különböző értéket vesz fel, $u(X)$ -nek 3 különböző gyöke lesz, és a görbe nem rendelkezik szinguláris ponttal.

Hivatkozások

- [1] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves*, University Press, Cambridge, 1998.
- [2] Dr. Nagy Gábor Péter, *Algebrai síkgörbék (előadásjegyzet)*, 2012.

Nyilatkozat

Alulírott Csányi János Dániel kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2013. május 9.

.....
aláírás