

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet Geometria Tanszék

Szakdolgozat

**Felületek egymásra való leképezései és néhány
alkalmazásuk a térképészetben**

Készítette: Czurkó Edit

Matematika BSc

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, tartalmi összefoglaló	2
2. Felületek egymásra történő leképezése	3
3. A Föld alakja	7
3.1. Gömb, ellipszoid, geoid	7
3.2. Görbület az ellipszoidon	9
4. Egységes Országos Vetület (EOV)	11
5. Átváltás különböző vetületek között	14
Köszönetnyilvánítás	19
Nyilatkozat	20
Irodalomjegyzék	21

1. fejezet

Bevezetés, tartalmi összefoglaló

A geometria tudományának megszületése Földünk megismerésének igényével hozható kapcsolatba, ugyanis a szó eredetileg földmérést jelent. Már az ókori ember is meg akarta ismerni a körülötte lévő világot, annak jelenségeit, törvényeit. A Föld alakjának felfedezése és a későbbi utazásokhoz, a világ megismeréséhez nélkülözhetlenné váló térképalkotás között azonban felmerült egy igen nagy probléma. Földrajzi tanulmányaink során számtalanszor találkozhattunk azzal a ténnyel, hogy a Földet síkra nem tudjuk torzítás nélkül leképezni. A térképészet nagy feladata, hogy olyan leképezéseket, vetületeket használjon, amivel ez a torzulás minimálissá válik. A különböző vetületek alkalmazása azonban eltérő térképeket eredményezett, így az adatok egyeztetéséhez a különböző vonatkoztatási rendszerek közötti átszámítás szükséges. Erre több weboldal is úgy nyújt lehetőséget, hogy nem tudjuk milyen algoritmusok futnak a háttérben.

A dolgozat a következő módon épül fel: A 2. fejezetben differenciálgeometriai eszközökkel megvizsgáljuk a felületek egymásra történő leképezéseit, majd a 3. fejezetben a Föld alakjának közelítésére szolgáló felületeket tárgyaljuk és megmutatjuk, hogy egyik közelítő felület sem alkalmas a Föld izometrikus leképezésére. A 4. fejezet a Magyarországon használt Egységes Országos Vetület ismertetését tartalmazza, majd zárásul két különböző vetületi rendszer koordinátái közötti átváltás menetét taglaljuk, és konkrét példaként kiszámoljuk egy adott pont GPS koordinátáinak EOV-beli megfelelőit.

Reményeink szerint a dolgozatban közölt számítások megmutatják, hogy a matematika észrevétlenül, mégis nélkülözhetetlen módon adja a tudományok, jelen esetben a térképészet alapját, problémáinak megértését, megoldását.

2. fejezet

Felületek egymásra történő leképezése

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a felületek egymásra való leképezhetőségének feltételeit Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria című [5] könyvének azonos című fejezete alapján és belátjuk, hogy a Föld síkbeli izometrikus leképezése miért nem lehetséges.

Először tisztáznunk kell néhány fogalmat. A felületet többféleképpen is lehet definiálni. Jelen dolgozatban felület alatt az [5] könyvben leírthoz hasonló meghatározást értünk (lásd [5], 57. o.), amelyet pontosan kimondunk az alábbiakban.

A továbbiakban legyen T egyszeres összefüggő, korlátos, nyílt tartomány a síkon. Jelöljön $\underline{r} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy végtelenszer differenciálható, injektív leképezést. Ekkor az $\underline{r}$ leképezés a T és az $\underline{r}(T)$ halmazok között bijekciót határoz meg. Feltesszük továbbá azt is, hogy $\underline{r}$ inverzével együtt folytonos.

Legyen a síkon rögzítve egy Descartes koordináta-rendszer, amelynek koordinátáit u -val és v -vel jelöljük. Ekkor

$$\underline{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v)),$$

ahol $r_i(u, v) : T(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ valós értékű, kétváltozós, végtelenszer differenciálható függvények. Az $\underline{r}$ leképezés u , illetve v szerinti parciális deriváltjai a következők:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{r}}_u(u, v) &= \left(\frac{\partial r_1(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial r_2(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial r_3(u, v)}{\partial u} \right), \\ \dot{\underline{r}}_v(u, v) &= \left(\frac{\partial r_1(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial r_2(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial r_3(u, v)}{\partial v} \right).\end{aligned}$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{r}$ leképezés olyan, hogy $\dot{\mathbf{r}}_u(u_0, v_0)$ és $\dot{\mathbf{r}}_v(u_0, v_0)$ parciális deriváltak lineárisan függetlenek minden $(u_0, v_0) \in T$ esetén.

2.0.1. Definíció. A fentiekben definiált T tartomány $\mathbf{r}$ melletti $\mathcal{F} = \mathbf{r}(T)$ képét elemi felületnek nevezzük.

A T tartományt általában az $\mathcal{F}$ elemi felület paraméter tartományának, illetve az $\mathbf{r}$ leképezést az $\mathcal{F}$ egy paraméterezésének nevezzük.

2.0.2. Definíció. A $\mathcal{F}' \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmaz felület, ha minden pontja rendelkezik olyan U (gömb-)környezettel, hogy a $\mathcal{F}' \cap U$ elemi felület.

Most definiáljuk az $\mathcal{F}$ elemi felület ún. *első alapmennyiségeit*.

2.0.3. Definíció. Legyen $(u_0, v_0) \in T$. Az

$$E(u_0, v_0) = \langle \dot{\mathbf{r}}_u(u_0, v_0), \dot{\mathbf{r}}_u(u_0, v_0) \rangle,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \dot{\mathbf{r}}_u(u_0, v_0), \dot{\mathbf{r}}_v(u_0, v_0) \rangle,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \dot{\mathbf{r}}_v(u_0, v_0), \dot{\mathbf{r}}_v(u_0, v_0) \rangle$$

valós számokat az $\mathcal{F}$ elemi felület $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ -beli első alapmennyiségeinek nevezzük. (A $\langle \cdot, \cdot \rangle$ szimbólum az $\mathbb{R}^3$ -beli skaláris szorzatot jelöli.)

Könnyen látható, hogy az E , F , és G függvények a T tartományon végtelenszer differenciálhatóak.

Legyen a $\mathbf{g} : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow T$ leképezés egy (sík-)görbe paraméterezése. A görbe pontos definíciója megtalálható pl. a [5] könyv 15–16. oldalán. Ekkor

$$\mathbf{r}(t) = (u(t), v(t)),$$

ahol az $u(t)$ és $v(t)$ egyváltozós függvények.

2.0.4. Definíció. A $\mathcal{G}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}(t))$ leképezés képhalmazát felületi görbének nevezzük, és a $\mathcal{G}(t)$ függvény a felületi görbe egy paraméterezése.

Legyenek $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ elemi felületek, amelyeket rendre az r_1 és r_2 paraméterezéssel állítunk elő, azaz

$$\mathbf{r}_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{F}_1 := \mathbf{r}_1(T_1)$$

$$\mathbf{r}_2 : T_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{F}_2 := \mathbf{r}_2(T_2)$$

Ekkor az $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ felületek közötti leképezésen a következőt értjük: az $\mathbf{f} : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ egy bijektív leképezés a felületek pontjai között úgy, hogy az

$$\mathbf{r}_2^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{r}_1 : T_1 \rightarrow T_2$$

összetett függvény inverzával együtt végtelenszer differenciálható.

2.0.5. Definíció. *Azt a két felület közötti bijektív leképezést, amely az egymásnak megfelelő görbeívek ívhosszát megtartja, izometrikus leképezésnek vagy hajlításnak nevezzük.*

Az első alapmennyiségek határozzák meg egy felületi görbe ívhosszát, valamint a szögmérést, és a felszínmérést a felületen. (lásd. [5] 68–74. o.) Azaz a leképezés izometrikus, ha a megfelelő pontokban az első alapmennyiségek megegyeznek.

Egy példa: izometrikus leképezésről beszélünk, ha egy papírlapot meghajlítunk. Ekkor minden pontnak meg tudjuk feleltetni a hajlítással kapott képét, a leképezés bijektív, a papírlapra rajzolt görbeívek, egyenesszakaszok hossza nem változik. A későbbiekben látni fogjuk a hengervetületek fontosságát, hiszen a henger már torzítás nélkül kiteríthető a síkba.

A következő tétel szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy két felület közötti leképezés mikor izometrikus. A tétel és annak bizonyítása megtalálható az [5] könyv 104. oldalán.

2.0.6. Tétel. *Két felület egymásra való bijektív leképezése pontosan akkor izometrikus, ha a megfelelő pontokban egyenlők az első főmennyiségek minden olyan paraméterezésnél, ahol a megfelelő pontok azonos paraméterezéshez tartoznak.*

A tétel alkalmazásához még szükségünk van a következő definíciókra.

2.0.7. Definíció. *Jelölje $\mathbf{m}(u_0, v_0)$ a felület $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ -beli egységnyi normálvektorát, melyet a paramétervonalak érintőinek segítségével a következő módon definiálunk*

$$\mathbf{m}(u_0, v_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u(u_0, v_0) \times \dot{\mathbf{r}}_v(u_0, v_0)}{|\dot{\mathbf{r}}_u(u_0, v_0) \times \dot{\mathbf{r}}_v(u_0, v_0)|}.$$

A felület $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ pontbeli második alapmennyiségei a következők:

$$L(u_0, v_0) = \langle \mathbf{m}(u_0, v_0), \ddot{\mathbf{r}}_{uu}(u_0, v_0) \rangle,$$

$$M(u_0, v_0) = \langle \mathbf{m}(u_0, v_0), \ddot{\mathbf{r}}_{uv}(u_0, v_0) \rangle,$$

$$N(u_0, v_0) = \langle \mathbf{m}(u_0, v_0), \ddot{\mathbf{r}}_{vv}(u_0, v_0) \rangle.$$

Az $\mathcal{F}$ felület $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ -beli $\kappa(u_0, v_0)$ Gauss-görbülete kifejezhető az első és a második alapmennyiségek segítségével a következő módon (lásd 79–81. o. [5])

$$\kappa(u_0, v_0) = \frac{L(u_0, v_0)N(u_0, v_0) - M^2(u_0, v_0)}{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F^2(u_0, v_0)}.$$

A Carl Friedrich Gausstól (1777–1855) származó "Theorema egregium" tétel (lásd. [5] 101. o.) szerint az $LN - M^2$ mennyiség, így a felület Gauss-féle görbülete is csak az első alapmennyiségektől és azok első parciális deriváltjaitól függ. Ezért a 2.0.6. tétel alapján a Gauss görbület izometrikus leképezésnél a megfelelő pontokban egyenlő. Tehát kijelenthetjük, hogy síklemezből hajlítással nem tudunk gömböt készíteni, mert a hajlítás során az E , F , G alapmennyiségek, így κ is változatlan marad. κ értéke a síkon azonosan nulla, míg ez az érték a gömbön a sugár négyzetének reciprokával egyenlő. Tehát, ha a Föld valóban gömb alakú, akkor nem készíthető róla torzítás nélküli térkép.

3. fejezet

A Föld alakja

3.1. Gömb, ellipszoid, geoid

A Föld alakjáról több találgatás után az első tudományosan is elfogadható állítást Pithagorasz (i.e. 6. sz.) tette. A Hold megvilágított felületének körívet leíró határaiból következtetett a Hold, majd ebből a Föld *gömb* alakjára. I.e. 3. században pedig Eratoszthenész már a szüénéi (= Asszuán, Egyiptom) kútban delelő nap és az alexandriai botra vetülő árnyék szögműködéséből adódó számítások alapján arra következtetett, hogy a Föld sugara kb. 7360 km. A csak becsléseken alapuló számítása meglepően jó eredményt adott.

A felfedezések korában, a navigáció egyre nagyobb szerepet kapott. Mivel Földünk felszínét torzítások nélkül nem tudjuk leképezni a síkra, ezért olyan vetületeket, leképezési szabályokat kellett kialakítani, melyek a torzulásokat a célnak megfelelő alacsony szinten tartják. Megkülönböztetünk szögtartó, területtartó, és általános torzulású vetületeket (melyek se nem szögtartó, se nem területtartó vetületek). A navigációhoz szögtartó, a kontinensek ábrázolására területtartó vetület szükséges, azaz mindig az adott célnak megfelelő torzítású térképet kell készíteni.

Dolgunkat tovább bonyolítja, hogy a Föld csak közelítéssel gömb alakú. A tengely körüli forgás miatt létrejövő centrifugális erő hatására a Föld alakja lapult az északi és déli pólusoknál, így *forgási ellipszoid* alakjáról beszélhetünk. A forgási ellipszoid egyenlítői sugara hosszabb, mint a pólusokat összekötő tengely hosszúsága. Az egyenlítő tengelyét az ellipszoid nagytengelyének, a pólusokat összekötő tengelyt az ellipszoid kistengelyének nevezzük. Az ellipszoidot megadhatjuk fél nagytengelyével (a) és fél kistengelyével (b), vagy egy féltengellyel (a vagy b) és a lapultsággal (L). ($L = (a - b)/a$)

3.1.1. Definíció. Azt az ellipszoidot, amelynek középpontja egybeesik a Föld középpontjával és kistengelye a Föld forgástengelyével azonos, földi ellipszoidnak nevezzük.

A sarkoknál lapult ellipszoid hipotézisét, és annak igazolását a Francia Tudományos Akadémia 1735-36-os perui és lappföldi expedícióinak köszönhetjük. Az 1820-as években Gauss megállapította, hogy a Föld felülete minden pontjában merőleges a nehézségi erő irányára. Ebből kiindulva 1873-ban Johann Benedict Listing bevezette a Föld elméleti alakjának következő meghatározását: a Föld felszínének bármely pontjában a nehézségi erő irányára merőleges, a közepes tengerszinttel egybeeső szintfelület a *geoid*. A nehézségi erő a Föld egyenlőtlen tömegeloszlásának következtében szabálytalanul változik, ezért szabálytalan a szintfelület is, így bár a földalak legjobb megközelítője a geoid, az vetületi alapfelületnek nem alkalmas. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a geoid szabálytalansága ellenére közel áll a forgási ellipszoidhoz, tehát a pontok helyzete megadható az ellipszoidra vonatkoztatva. A történelem során több földi ellipszoidot (ún. referencia ellipszoidot) vettek alapul a Föld leképezésére. Ezekből néhányat (paramétereiket négy tizedesjegyre kerekített értékekkel) a következő táblázat tartalmaz:

Név (év)	a (km)	b (km)	$L = (a - b)/a$
Bessel (1841)	6377,3970	6356,0790	1:299,150
Clarke (1866)	6378,2060	6356,5840	1:294,988
Kraszovszkij (1944)	6378,2450	6356,8630	1:298,300
IUGG (1967)	6378,1600	6356,7740	1:298,247
WGS (1984)	6378,1370	6356,7523	1:298,257

Jelenleg a WGS84-es ellipszoid az egyik legelterjedtebb, mert ez képezi a műholdas helymeghatározás alapfelületét. Az ellipszoid alakú Földön a meridiánok (vagy délkörök, melyek a gömbön a két póluson áthaladó, az Egyenlítőre merőleges legnagyobb gömbi körök) már nem körök, hanem ellipszisek és a földfelszín Gauss-görbülete sem állandó, hanem az Egyenlítőtől a pólus felé változik. A többi referencia ellipszoidról és a történelmi előzményekről bővebb információt többek között *Sümeghy Zoltán, Unger János, Gál Tamás: Térképészet* című könyvében [4] is találhatunk.

3.2. Görbület az ellipszoidon

Az előző fejezetben kifejtettük, hogy egy felület síkba fejthető izometrikusan, ha a felületen értelmezett Gauss-görbület bármely pontban azonosan nulla, ezért a következőkben kiszámoljuk egy ellipszoid tetszőleges pontjában a Gauss-görbületet.

Legyen S egy olyan forgási ellipszoid, aminek forgástengelyének fél hosszúsága b , és az arra merőleges féltengelyek hosszúsága a . S kanonikus helyzetben van, azaz középpontja megegyezik a koordináta-rendszer origójával, a tengelyei pedig egybeesnek a koordináta-rendszer tengelyeivel úgy, hogy a forgástengely a z -vel párhuzamos.

Paraméterezzük az ellipszoidot a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben térbeli polárkoordináták segítségével. Ekkor a forgási ellipszoid paraméterezése:

$$\mathbf{r}(\varphi, \vartheta) = (a \sin \varphi \cos \vartheta, a \sin \varphi \sin \vartheta, b \cos \varphi)$$

Az első alapmenntiségek a következők:

$$\begin{aligned} E(\varphi, \vartheta) &= a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \\ F(\varphi, \vartheta) &= 0 \\ G(\varphi, \vartheta) &= a^2 \sin^2 \varphi \\ EG - F^2 &= a^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a^2 b^2 \sin^4 \varphi \end{aligned}$$

A felület egységnyi normálvektora:

$$\mathbf{m}(\varphi, \vartheta) = \left(\frac{b \sin \varphi \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \frac{b \sin \varphi \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \right)$$

Az ellipszoid második alapmenntiségei a következők:

$$\begin{aligned} L(\varphi, \vartheta) &= \frac{-ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\ M(\varphi, \vartheta) &= 0 \\ N(\varphi, \vartheta) &= \frac{-ab \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Mindezekből kiszámolhatjuk az ellipszoid felületének Gauss-görbületét:

$$\kappa(\varphi, \vartheta) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^2}$$

A görbület tehát a féltengelyek hosszától (a és b) és a φ -től függ, azaz nem állandó.

Keressük meg a görbület minimumát az ellipszoidon! Ehhez vesszük a κ -ra kapott hányados nevezőjének maximumát:

Legyen

$$f(\varphi) = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

Ekkor

$$f'(\varphi) = 2a^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) + 2b^2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi (b^2 - a^2).$$

Az $f'(\varphi)$ derivált pontosan akkor 0 a $[0, \pi]$ intervallumon, ha $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Könnyen látható, hogy κ -nak $\varphi = 0$ -nál (és $\varphi = \pi$ -nél) van a minimuma, ahol értéke

$$\kappa(\varphi = 0) = \frac{b^2}{a^4}.$$

A WGS84 földi ellipszoid paramétereit ($a = 6378137$ m, $b = 6356752,3142$ m) behelyettesítve a WGS84 görbületének minimuma $\kappa_{min} = 2.44172 \cdot 10^{-14}$.

A κ -ra levezetett formulából jól látható, hogy mivel a b^2/a^4 hányados mindenütt pozitív értéket vesz fel, az ellipszoidon sem lesz a görbület bármely pontban 0. Ezzel megerősítettük az előző fejezetben foglaltakat, mert beláttuk, hogy a Föld akár gömb, akár ellipszoid alakú, nem képezhető le a síkba torzítás nélkül.

4. fejezet

Egységes Országos Vetület (EOV)

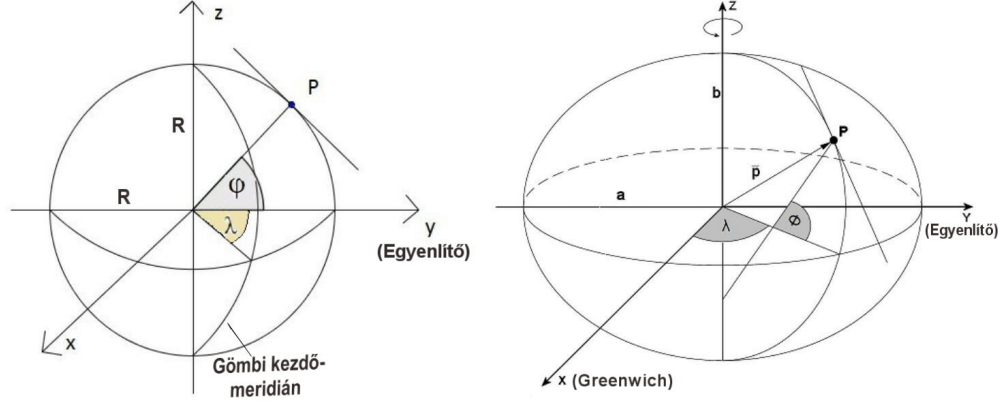
Magyarország területének leképezésére jelenleg az Egységes Országos Vetületet (röviden EOV-t) használják. Ez az 1976 óta alkalmazott EOTR (Egységes Országos Térképrendszer) vetülete, mely az IUGG1967 ellipszoidot veszi alapfelületként. Az EOTR fontossága abban rejlik, hogy ez az első olyan térképrendszer, amely egységbe foglalja a topográfiai (sík- és domborzatrajzot ábrázoló) és a földmérési (természetes és mesterséges tereptárgyakat, valamint ingatlan-, település- és országhatárokat ábrázoló) térképeket, melyek innentől csak méretarányukban különböznek.



4.1. ábra. Kettős vetítés lépései

Az EOV egy kettős vetület, ami először az IUGG1967-es ellipszoidról a Gauss-gömbre, majd a gömből két gömbi kört metsző hengerre történő vetítést jelent. (A Gauss-gömb az a gömb, ami egy forgási ellipszoid valamely pontjához a legjobban simul.) A Gauss-gömbre való leképezés szögtartó. Ma Magyarországon az $R = 6379743,001$ m sugarú Gauss-gömböt használják, amely a $47^{\circ}10'$ földrajzi szélességnél érinti az IUGG67-es ellipszoidot. A gömbi földrajzi hosszúságokat a gelérthegyi meridiántól mérjük (melynek földrajzi szélessége $\varphi_0 = 47^{\circ}06'00''$). Ez az EOV vetületi kezdőpontja.

A számítás teljes bemutatása meghaladja ezen dolgozat kereteit, így itt csak a végső formulákat adjuk meg az [1] könyv megfelelő fejezete alapján. A teljesebb számolás megtalálható többek között Bácsatyai László: Magyarországi vetületek című könyvében (lásd. [1] 88-130. o.), mi is az ott előforduló jelöléseket használjuk.



4.2. ábra. Gömbi és ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság

Legyen az ellipszoidi földrajzi szélesség Φ , a hosszúság Λ , a gömbi földrajzi szélesség φ , a hosszúság pedig λ . Az n és l a Gauss-gömb elhelyezésétől függő állandók, a mi esetünkben $l = 1,003110007693$ és $n = 1,000719704936$. Az a és b az ellipszoid fél nagytengelyének és fél kistengelyének hossza, e -t pedig az ellipszoid excentricitásának nevezzük. Ez az ellipszoid lapultságára jellemző arányszám.

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Az ellipszoidi koordinátákból a gömbi koordinátákba való átszámítás a következő módon történik:

$$\lambda = n(\Lambda - \Lambda_0)$$

ahol a Λ_0 a gellérthegyi meridián ellipszoidi földrajzi hosszúsága.

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = l \left[\tan^n\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \left(\frac{1 - e \sin \Phi}{1 + e \sin \Phi} \right)^{\frac{ne}{2}}$$

A gömbi koordináták kiszámolása után hengerre való vetítést végzük el, melynek eredménye már két síkbeli x , y koordináta. Ezekhez szükségünk van a redukálás mértékére, azaz a henger és a gömb sugárhosszáinak arányára, ami $m_0 = 0,99993$. λ' és φ' pedig a segédparalelkörök lesznek, melyek az alábbi egyenletekből fejezhetők ki:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \lambda \sin \varphi_0$$

$$\sin \lambda' = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi'}$$

Ekkor az x és y koordináta a következő értékeket adja:

$$x = m_0 \cdot R \cdot \lambda'$$

$$y = m_0 \cdot R \cdot \ln \tan \left(\frac{\varphi'}{2} + \frac{\pi}{4} \right),$$

Fontos megjegyezni, hogy a térképészetben használt x - és y -tengely ellentétes a matematikában megszokott x - és y -tengely elhelyezésével, azaz itt a vízszintes tengely lesz az y .

5. fejezet

Átváltás különböző vetületek között

A történelem során számos referencia ellipszoid és vetülettípus született. Aszerint, hogy hol, melyik vetület adja a legpontosabb értékeket, a Föld különböző területein ma is más-más leképezéseket használunk. Sőt, akár egy országon belül is léteznek különböző vetületű térképek. Ahogy az egész világon, Magyarországon is igen népszerűek a GPS készülékek. Ezek a WGS84-es ellipszoidhoz tartozó földrajzi koordinátákat adják meg eligazításul. Ha viszont bemegyünk a Csongrád Megyei Kormányhivatal Földhivatalába és kikérünk egy, az ingatlanunk határait jelölő térképet, akkor azt EOVS koordinátákban kapjuk meg. Tehát ha elképzeljük azt, hogy birtokában vagyunk egy olyan katonai GPS készüléknek, mely *cm*-es pontosságú (azért, hogy ne lehessen a készülékre fogni a hibát), és ki akarjuk mérni az ingatlanunk határait, akkor eltérő koordinátákat kapunk, mint ami a térképünkön szerepel. Az ehhez hasonló problémák megoldására jöttek létre olyan weboldalak, melyek elvégzik helyettünk a vetületi rendszerek közötti átváltásokat. (Például a Földmérési és Távérzékelési Intézet online átváltó programja: [7].) Számos felhasználója akad ezeknek az oldalaknak, de nagyrészüknél fogalma sincs arról, hogy a háttérben milyen számítási folyamatok zajlanak. Többféle átszámítás is lehetséges, ezek nagyrészt csak elemi geometriai transzformációkból állnak. A számítás menetét egy konkrét példa alapján mutatjuk be, itt GPS koordinátáinkat váltjuk át EOVS koordinátákká. (A részletes levezetés megtalálható a [1] 175-193. oldalain, itt csak a formulákat és a végeredményt közöljük) A bemutatáshoz a következő jelöléseket vezetjük be:

Az adott vetületünk az adott ellipszoidon legyen az 1. vetületi rendszer, míg ami-re át akarunk térni legyen a 2. számú vetületi rendszer. Tehát a konkrét példánkra nézve a WGS84 ellipszoid paraméterei 1-es, míg az IUGG67 ellipszoid paraméterei 2-es indexet kapnak.

Jelölje a_1, b_1, a_2, b_2 az ellipszoidok féltengelyeit és legyen x_1, y_1, x_2, y_2 vetületi koordináta a megfelelő rendszerekben.

Az m_1 és m_2 jelölje a tengerszint feletti magasságokat, míg a h_1, h_2 az ellipszoid feletti magasságokat. Ezen kívül e_1 és e'_1 jelölje még a WGS84, e_2 és e'_2 pedig az IUGG67 ellipszoid fél kis- és nagytengelyeire vonatkozó numerikus excentricitását.

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}},$$

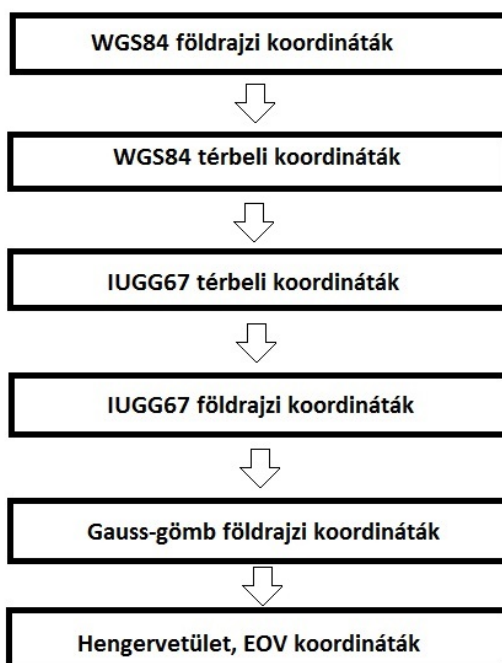
$$e' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2}}$$

Az $N = h - m$ neve: geoidunduláció, harántgörbületi sugár.

$$\left(N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi}} \right)$$

A $\Phi_1, \Lambda_1, \Phi_2, \Lambda_2$ jelöljék az ellipszoidok földrajzi koordinátáit, valamint legyenek az $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ ellipszoidi térbeli koordináták az 1.(WGS84), ill. a 2.(IUGG67) rendszerben.

Ekkor a következő séma alapján számolunk:



5.1. ábra. Átszámítási séma

A GPS a WGS84 földrajzi koordinátáit adja meg (Φ_1, Λ_1, h_1) . Ezekből térbeli (x_1, y_1, z_1) koordináták számolása a következő módon történik:

$$\begin{aligned}x_1 &= (N_1 + h_1) \cdot \cos \Phi_1 \cdot \cos \Lambda_1 \\y_1 &= (N_1 + h_1) \cdot \cos \Phi_1 \cdot \sin \Lambda_1 \\z_1 &= \left(\frac{b_1^2}{a_1^2} \cdot N_1 + h_1 \right) \cdot \sin \Phi_1\end{aligned}$$

Innen a térbeli koordinátákkal már egy hasonlósági transzformációt használva áttérhetünk az IUGG67-es ellipszoid térbeli (x_2, y_2, z_2) koordinátáira. A WGS84 ellipszoidhoz tartozó koordináta-rendszer koordinátatengelyeit alkalmas α , β és γ szögekkel elforgatjuk, $\mathbf{v}(a_0, b_0, c_0)$ vektorral eltoljuk, és a k méretarány-különbséget figyelembevéve kicsinyítjük/nagyítjuk $1 + k$ faktorial.

Legyen $R = (r_{ij})$ a forgatás (3×3) -as mátrixa. Ekkor a hasonlósági transzformáció, amely az egyik koordinátarendszert a másikba viszi az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{v} + (1 + k) \cdot R \cdot \mathbf{p}_1,$$

ahol a $\mathbf{p}_1$ jelöli egy adott P pont helyvektorát az 1. koordináta-rendszerben, és $\mathbf{p}_2$ jelöli a P helyvektorát a 2. koordináta-rendszerben. A fenti egyenletet koordinátánként kiírva a következő egyenleteket kapjuk.

$$\begin{aligned}x_2 &= a_0 + (1 + k) \cdot (r_{11}x_1 + r_{12}y_1 + r_{13}z_1) \\y_2 &= b_0 + (1 + k) \cdot (r_{21}x_1 + r_{22}y_1 + r_{23}z_1) \\z_2 &= c_0 + (1 + k) \cdot (r_{31}x_1 + r_{32}y_1 + r_{33}z_1)\end{aligned}$$

Az R mátrix elemei kifejezhetők az α, β, γ szögek szögfüggvényeinek segítségével. Mivel a szögek kicsik, ezért az R mátrix elemei tovább egyszerűsíthetők annak figyelembevételével, hogy a vonatkoztatási rendszerek koordinátatengelyei egymáshoz képest csak nagyon kis szöggel fordulnak el. Ezen kis szögek szinusza így a szöggel egyenlőnek, koszinusza 1-nek tekinthető. A forgatás mátrix elemei és az α, β, γ szögek konkrétan kiszámolhatók, de a [1] könyvben is ismertettek vannak. (lásd. [1] 192–193. o.)

Az egyenletrendszert tovább egyszerűsítjük annak alapján, hogy mind a k , mind a forgatási szögek kicsik, ezért ezek szorzatait elhagyhatjuk anélkül, hogy a pontosságot nagyon elrontanánk.

Ezek után az egyszerűsítések után több ismert földrajzi pont mindkét rendszerbeli koordinátáinak felhasználásával meghatározzuk az ismeretleneket úgy, hogy azok a lehető legjobban illeszkedjenek a referencia pontokhoz. Ekkor közelítő értékeket kapunk az R mátrix elemeire, a $\underline{v}$ vektor komponenseire, és a k -ra.

A k itt a WGS84 és IUGG67 ellipszoid méretarány-különbsége, amely

$$k = -0,00000219548609430801,$$

illetve az eltolási paraméterek értékei méterben kifejezve a következők:

$$a_0 = -47,8664, b_0 = 69,2021 \text{ és } c_0 = 11,4703,$$

lásd [1].

Ha megvannak a térbeli koordinátáink (már az IUGG67 ellipszoidon), akkor ezekből a földrajzi koordináták kiszámításához az alábbi paraméterekre lesz szükségünk:

Legyen q a P pont távolsága a z -tengelytől, ekkor

$$q_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

A további számolás technikai egyszerűsítésére vezessünk be egy új paramétert, ϑ -t.

$$\vartheta = \arctan \frac{z_2 \cdot a_2}{q_2 \cdot b_2}$$

Ezen képletek felhasználásával már felírhatjuk a földrajzi koordinátákra vonatkozó képleteket.

$$\Phi_2 = \arctan \frac{z_2 + e'^2 \cdot b_2 \cdot \sin^3 \vartheta}{q_2 - e^2 \cdot a_2 \cdot \cos^3 \vartheta},$$

$$\Lambda_2 = \arctan \frac{y_2}{x_2},$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\cos \Phi_2} - N_2$$

Innen már nem kell mást tennünk, mint az előző fejezetben leírtak szerint Gauss-gömbre majd hengerre vetítenünk. Így megkapjuk az EOVS x_2, y_2 koordinátáit és az $m_2 = h_2 - N_2$ tengerszint feletti magasságot.

A számolás pontosságának ellenőrzéséhez szükség lenne arra, hogy valamely földrajzi pont WGS84 és EOVS-i koordinátái egyszerre a birtokunkban legyenek. A pontos $(x, y, m, \text{ és } \Phi, \Lambda, h)$ koordinátahármasok azonban nem könnyen elérhetők. Az adatgyűjtés során szerzett tapasztalat az, hogy a GPS alappontok illete az EOVS

koordináták adatbázisa nagyrészt csak fizetős szolgáltatással hozzáférhetőek. Bácsatyai László könyvének [1] 5.2.2-1. táblázata (lásd 191.o.) szerencsénkre tartalmaz 24 db WGS-EOV koordinátapárt a számolás ellenőrzésére. Ezekből találmra kiválasztottuk a 3. WGS84-hez tartozó koordinátát, ami éppen egy budapesti természetvédelmi területet, a Sas-hegyet jelöl.

A hegy WGS84 alapú földrajzi koordinátái a következők:

$$\Phi = 47^{\circ}28'56,27133''$$

$$\Lambda = 19^{\circ}01'02,25758''$$

$$h = 309,547(m).$$

A számolásunk alapján ennek az Egységes Országos Vetületen vett megfelelői kisebb kerekítésektől eltekintve megegyeznek a könyvben szereplő koordinátákkal. Azaz:

$$x_{EOV} = 237595,14$$

$$y_{EOV} = 647727,41$$

$$m = 265,82(m).$$

A fentiek ismeretében a vetületek oda-vissza is számíthatóak. Ha tehát térképünkön kinézünk egy pontot (amit szívesen megnéznénk szabadidőnkben), akkor GPS készülékünknek a megfelelő koordinátákat már az általunk végzett számításokkal is meg tudnánk adni.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, *Dr. Fodor Ferencnek*, azért a rengeteg időért és energiáért, amit rám áldozott. Tanácsaival és biztatásával nagy segítséget nyújtott szakdolgozatom megírásában.

Nyilatkozat

Alulírott Czurkó Edit kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2013. május. 18.

Czurkó Edit

Irodalomjegyzék

- [1] Bácsatyai László, *Magyarországi vetületek*, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2006.
- [2] Hazay István, *Földi vetületek*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [3] Dr. Hazay István, *Vetülettan*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
- [4] Sümeghy Zoltán, Unger János, Gál Tamás, *Térképészet*, JATEPress Kiadó, 2009.
- [5] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter, *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [6] Varga József, *A vetület nélküli rendszerektől az UTM-ig*, WEB, 2002.,
http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm,
Elérés: 2013. május 6.
- [7] Földmérési és Távérzékelési Intézet vetület átszámító szoftvere <http://www.fomi.hu/termekekhonlap/szolgalattasok/Atszamitas/atszamitas.htm>
Elérés: 2013. május. 10.