

A HIPERBOLIKUS SÍK KITERJESZTETT FORMULÁIRÓL

G.Horváth Ákos

(BME, Matematikai Int., Geometria tsz.)

Szegedi Geometria Nap (2014)

Szegedi Tudomány Egyetem, TTK, Bolyai Intézet, Geometria tanszék

2014, Május 22.

Vörös Cyrill (1868-1948) piar., mat.

EGYSZERŰ SZERKEZETŰ REPÜLORENDSZER LEGKÖZÖNSÉGESEBB MOZGÁSAI.

Vörös Cyrill k. r. tanártól.

A repülés differenciális egyenletei.

A madár-repülés elméletével foglalkozom a következőkben. A tárgyalás egyszerűsítése végett madártest helyett egy hasonló mozgás végzésére alkalmas gépre vonatkoznak fejtegetéseim. Ezen u. n. repülőgépnak csak legegyszerűbb mozgásaira szorítkozik analízisünk s látni fogjuk, a komplikáltabb esetekben minő nehézséggel állunk szemben. A természeti tűnemények legtöbbször oly bonyolódott, kúszt szálakból szövék össze, hogy nem tudjuk azokat rendbe szedni és a mathézist csak sok mellékes tényező tekinteten kívül hagyásával alkalmazhatjuk. Röviden azt mondhatjuk, hogy a matematikai tárgyalás csak megközelítése a való dolgok viszonyainak.

Irodalmunkban e tárgy még nem igen talált munkásokra. Dr. *Martin Lajos* egyetemi tanár úr foglalkozott vele nálunk behatóbban, az Erdélyi Múzeum-Egylet „Orvos-természettudományi Értesítőjében” közölve a madár-repülésre vonatkozó értekezés-sorozatát. Ő főleg a madártest, illetőleg repülőrendszer alkatát vizsgálja tekintettel e mozgás lehetőségére s fontos eredményekre jut a rendszer alkatára s munkájára nézve. Dr. *Farkas Gyula* tanár úr egyetemi előadásában szintén kiterjeszkedett e tárgyra, noha csak mint mozgástani példára, egy egyszerű repülőrendszer függélyes lebegését vizsgálván. Jelen értekezésemben ennek általánosítását kísérem meg. Tartózkodva a repülés nagy problémáitól, kizárólag magára a mozgásra szorítkozom, olyan repülőrendszert szupponálva, mely e mozgásra képes, tekintet nélkül a gép berendezésére és munkájára.

- Egyszerű szerkezetű repülőrendszer legközönségesebb mozgásai. Kolozsvár, 1893. (Doktori értekezés. Különnyomat az Értesítő II. term. tud. szak. 1892. év.-ból.)
- Egyszerű repülőszert vertikális mozgása 1895.
- Kísérleti természettan a középiskolák VII. és VIII. oszt. számára. Bpest, 1901. (Ism. Hivatalos Közlöny. 2. kiadás. U. ott, 1909.)
- A matematikai és fizikai földrajz elemei. A gymnasiumok III. oszt. számára. U. ott, 1902. (2. kiadás. U. ott, 1910. Ism. Hivatalos Közlöny 1902.)
- **Analitikus Bolyai-féle geometria** (I. köt. Sík-geometria, 1909).
- La ebeno Bolyaia. Bp., (1910).
- Elementoj de la geometrioj absoluta (1911).
- Analitikageometrio absoluta (2. köt. 1910-12).
- La spaco Bolyaia. (1912).
- Konstans görbületű felületek a Bolyai-féle geometriában (1918).
- A Bolyai-féle tér sztatikájáról (Szent István akad. Ért. 1918).
- A centrifugális erő a Bolyai- és Riemann féle terekben (u. o. 1923).
- Szemi-archimedesi geometriák (1924).
- Szemi-archimedesi hiperbolikus geometriák logikai exisztenciája (1926).
- Maximális térfogatú hexaéderek a Bolyai féle geometriában (1930).
- Végtelen tér a relativitástanban. (1935).

Távolságok a valós egyenesen:

$$\tanh b > 1.$$

$$\tanh b = \sinh a \cdot \tan \beta$$

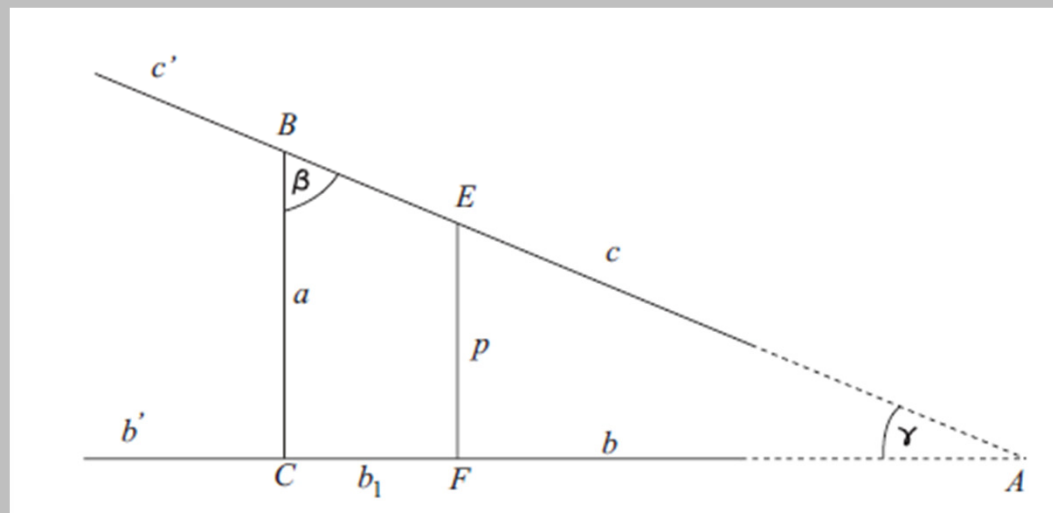
$$\tan \beta = \frac{1}{\tanh b_1 \sinh a}$$

$$\sinh a \tan \beta = \frac{1}{\tanh b_1} = \tanh b$$

$$\frac{1}{i} \tan ib = \frac{i}{\tan ib_1}$$

$$\tan ib = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - ib_1 \right)$$

$$b = -\frac{2n-1}{2}\pi i + b_1$$



$$\tan \beta > 1 / \sinh a$$

$$\tanh b' = -\frac{1}{\tanh b_1}$$

$$\tanh b' = \sinh a \cdot \tan(\pi - \beta) = -\sinh a \cdot \tan \beta$$

		B		
(AB) is real		real	infinite	ideal
A	real	$AB = d$ $BA = -d + \pi i$	$AB = \infty$ $BA = -\infty$	$AB = d + \frac{\pi}{2}i$ $BA = -d + \frac{\pi}{2}i$
	infinite		$AB = \infty$ $BA = -\infty$	$AB = \infty$ $BA = -\infty$
	ideal			$AB = d + \pi i$ $BA = -d$

$$b' = -\frac{2m+1}{2}\pi i - b_1$$

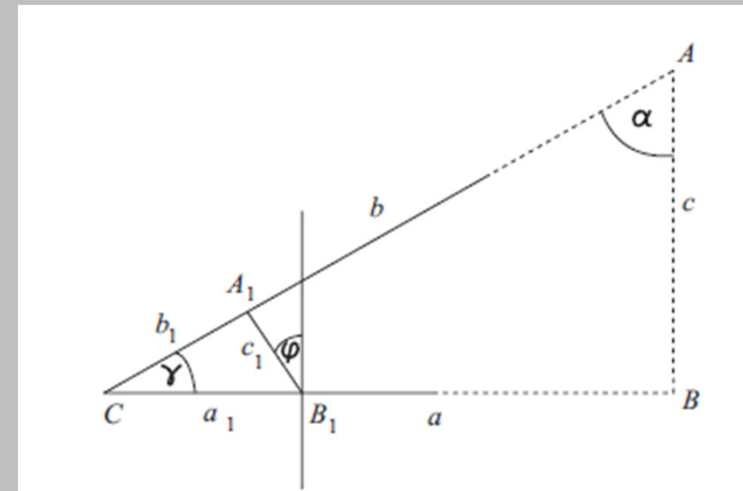
Távolságok a végtelen távoli egyenesen:

		<i>B</i>	
		infinite	ideal
<i>A</i>	(<i>AB</i>) is at infinity	$AB = 0$ $BA = \pi i$	$AB = \frac{\pi}{2}i$ $BA = \frac{\pi}{2}i$
	ideal		$AB = 0$ $BA = \pi i$

Távolságok ideális egyenes pontjai között:

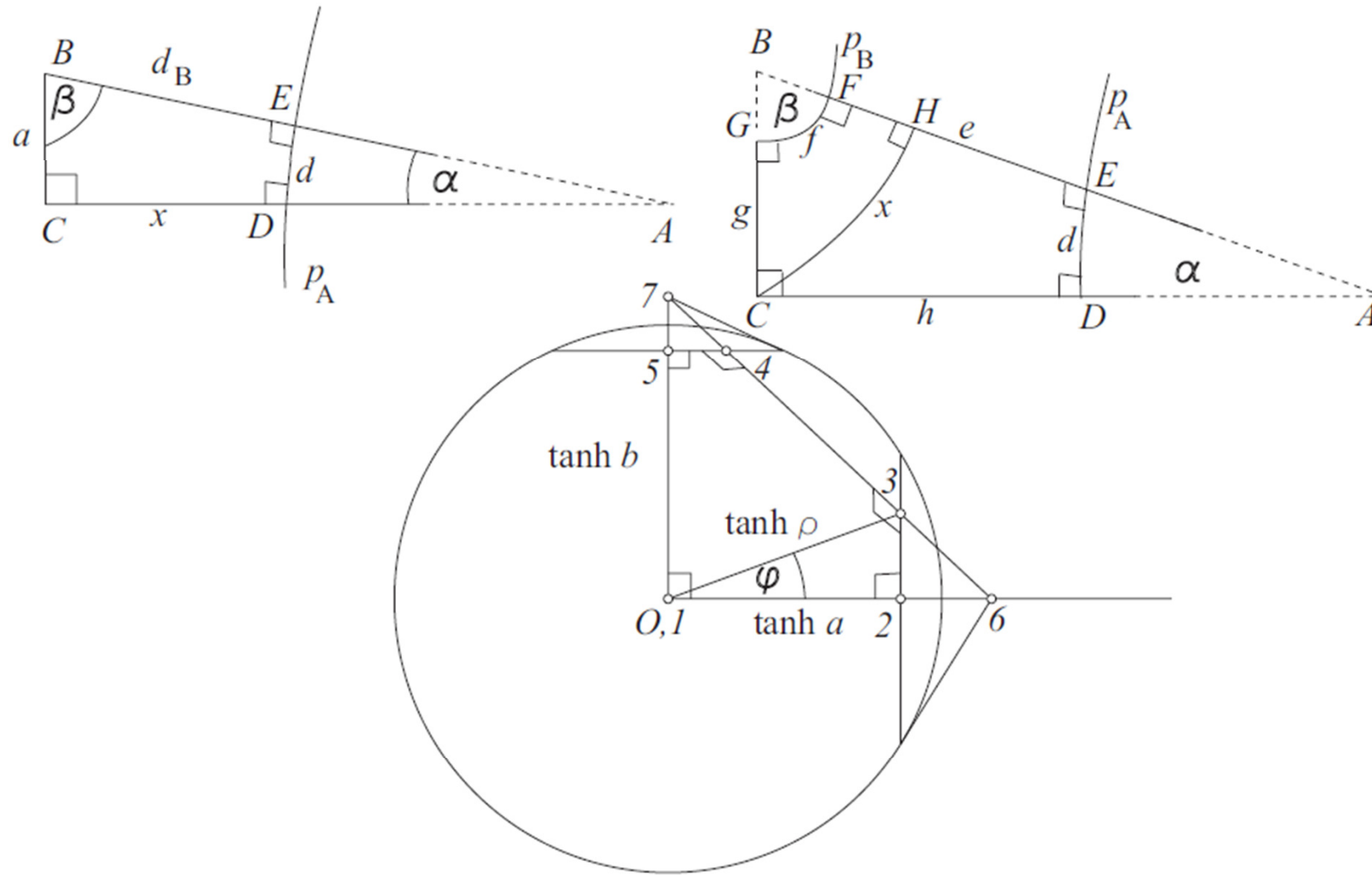
Két pont távolsága polárisaik
hajlásszögének i - szerese

$$\cosh c = \frac{\cosh b}{\cosh a} = \frac{\pm i \sinh b_1}{\pm i \sinh a_1} = \frac{\sinh b_1}{\sinh a_1} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi$$



A hiperbolikus szinusz tétel kiterjesztése

$$\sinh a = \sinh c \cdot \sin \alpha.$$



$$\sinh a = i \cosh g.$$

$$\sinh c = \sinh(-e)$$

$$\sin \alpha = -i \sinh d$$

$$\sinh c \sin \alpha = i \sinh e \sinh d$$

$$\sinh e \sinh d = \cosh g$$

Ciklusra vonatkozó hatvány

Lemma 1. *The product $\tanh(PA)/2 \cdot \tanh(PB)/2$ is constant if P is a fixed (but arbitrary) point (real, at infinity or ideal), P, A, B are collinear and A, B are on a cycle of the hyperbolic plane (meaning that in the fixed projective model of the real projective plane it has a proper part).*

Definition 1. *The power of a point P with respect to a given cycle is the value*

$$c := \tanh \frac{1}{2}PA \cdot \tanh \frac{1}{2}PB,$$

where the points A, B are on the cycle, such that the line AB passes through the point P . With respect to Lemma 1 this point could be real, infinite or ideal one. The axis of power of two cycles is the locus of points having the same powers with respect to the cycles.

Hasonlósági középpont

Definition 2. *The centres of similitude of two cycles with non-overlapping interiors are the common points of their pairs of tangents touching directly or inversely (i.e., they do not separate, or separate the circles), respectively. The first point is the external center of similitude the second one is the internal center of similitude.*

Lemma 2. *Two points S, S' which divide the segments OO' and $O'O$, joining the centers of the two cycles in the hyperbolic ratio of the hyperbolic sines of the radii r, r' are the centers of similitude of the cycles. By formula, if*

$$\sinh OS : \sinh SO' = \sinh O'S' : \sinh S'O = \sinh r : \sinh r'$$

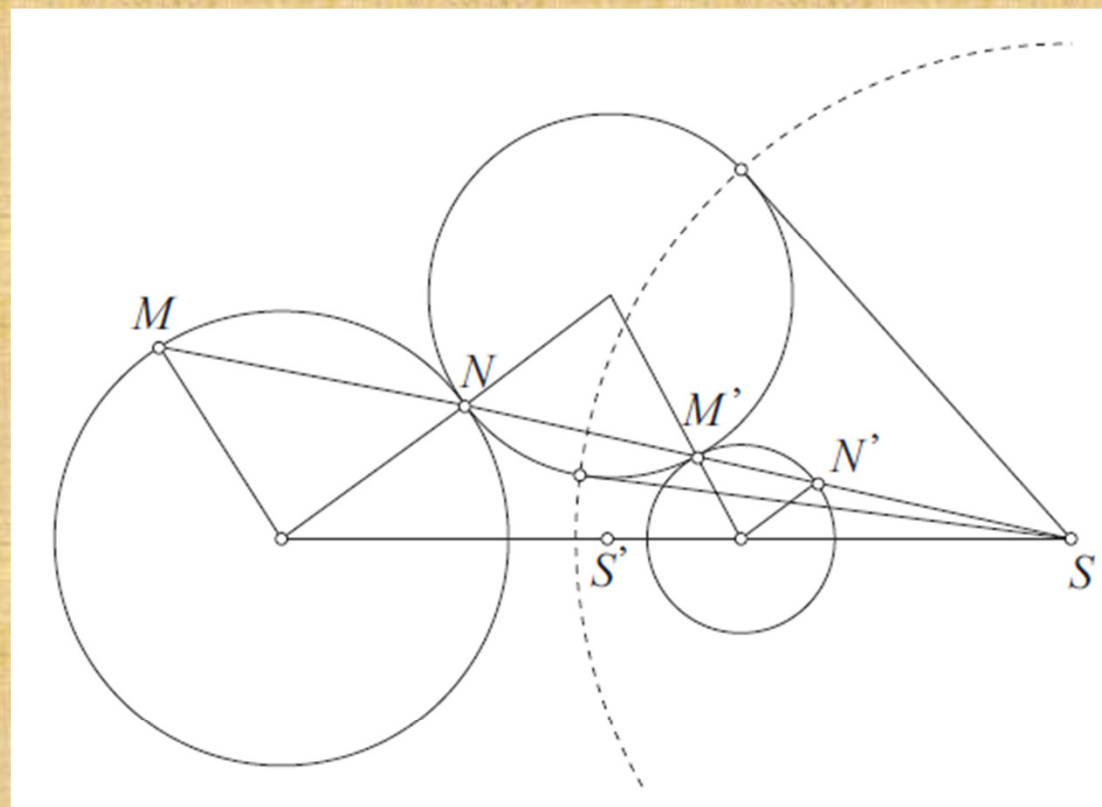
then the points S, S' are the centers of similitude of the given cycles.

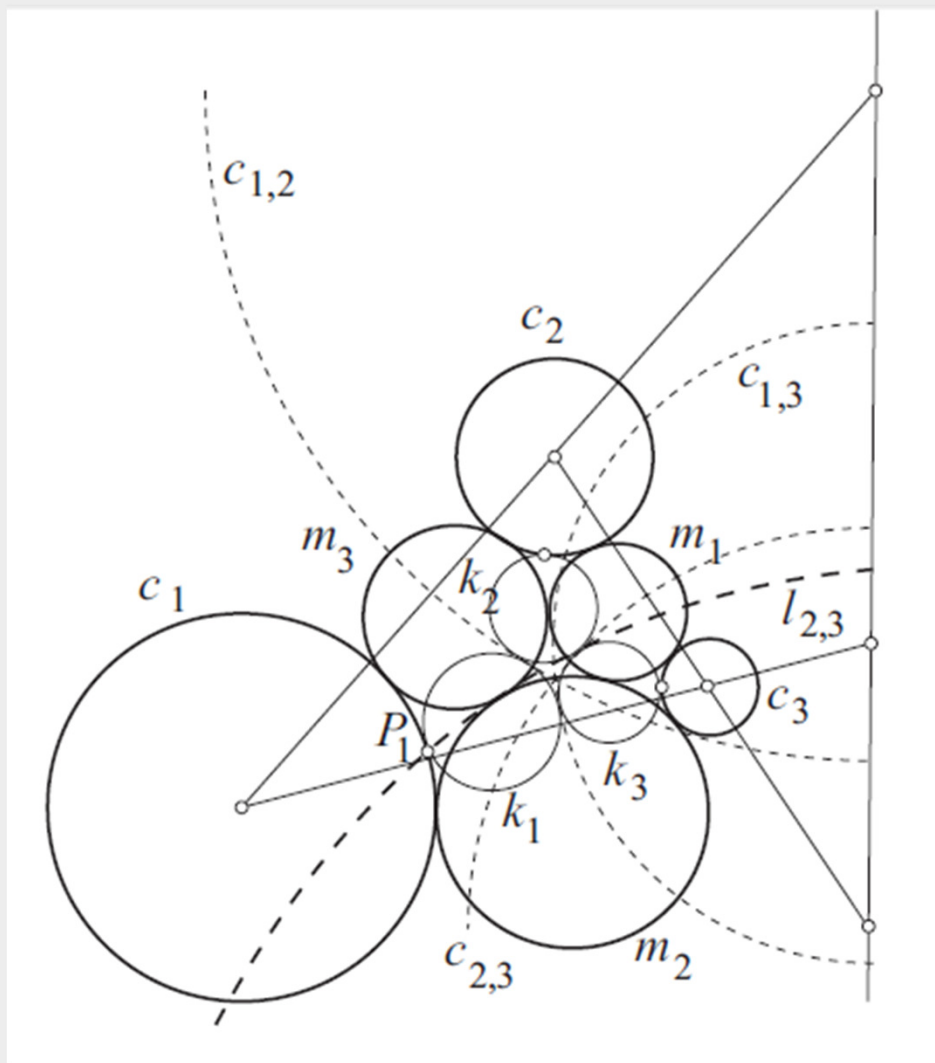
Lemma 3. *If the secant through a centre of similitude S meets the cycles in the corresponding points M, M' then $\tanh \frac{1}{2}SM$ and $\tanh \frac{1}{2}SM'$ are in a given ratio.*

Lemma 4. *The six centers of similitude of three cycles taken in pairs lie three by three on four lines, called axes of similitude of the cycles.*

Inverzió

$$\tanh \frac{SM}{2} \cdot \tanh \frac{SN'}{2}$$





Theorem 1 ([8]). *Steiner's construction can be done also in the hyperbolic plane. More precisely, for three given non-overlapping cycles there can be constructed three other cycles, each of them touches the two other ones from outside and also touches two of the three given cycles from outside.*

Magyar
népmesék

A Staudt-féle mennyiségek

$$\tan \frac{T}{4} = \sqrt{\tanh \frac{s}{2} \tanh \frac{s-a}{2} \tanh \frac{s-b}{2} \tanh \frac{s-c}{2}}$$

$$n = n(ABC) := \sqrt{\sinh s \sinh(s-a) \sinh(s-b) \sinh(s-c)}.$$

$$N = N(ABC) := \sqrt{\sin \delta \sin(\delta + \alpha) \sin(\delta + \beta) \sin(\delta + \gamma)}$$

$$\frac{N}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sinh a}$$

Definition 3. Let ABC be a non-degenerated reference triangle of the hyperbolic plane. If X is an arbitrary point we define its coordinates by the ratio of the Staudtian

$$X := (n_A(X) : n_B(X) : n_C(X))$$

where $n_A(X)$, $n_B(X)$ and $n_C(X)$ means the Staudtian of the triangle XBC , XCA and XAB , respectively. This triple of coordinates is the triangular coordinates of the point X with respect to the triangle ABC .

Súlypont

$$n_A(M) = n_B(M) = n_C(M)$$

$$\frac{\sinh AM_A}{\sinh MM_A} = \frac{\sinh BM_B}{\sinh MM_B} = \frac{\sinh CM_C}{\sinh MM_C} = \frac{n}{n_A(M)}$$

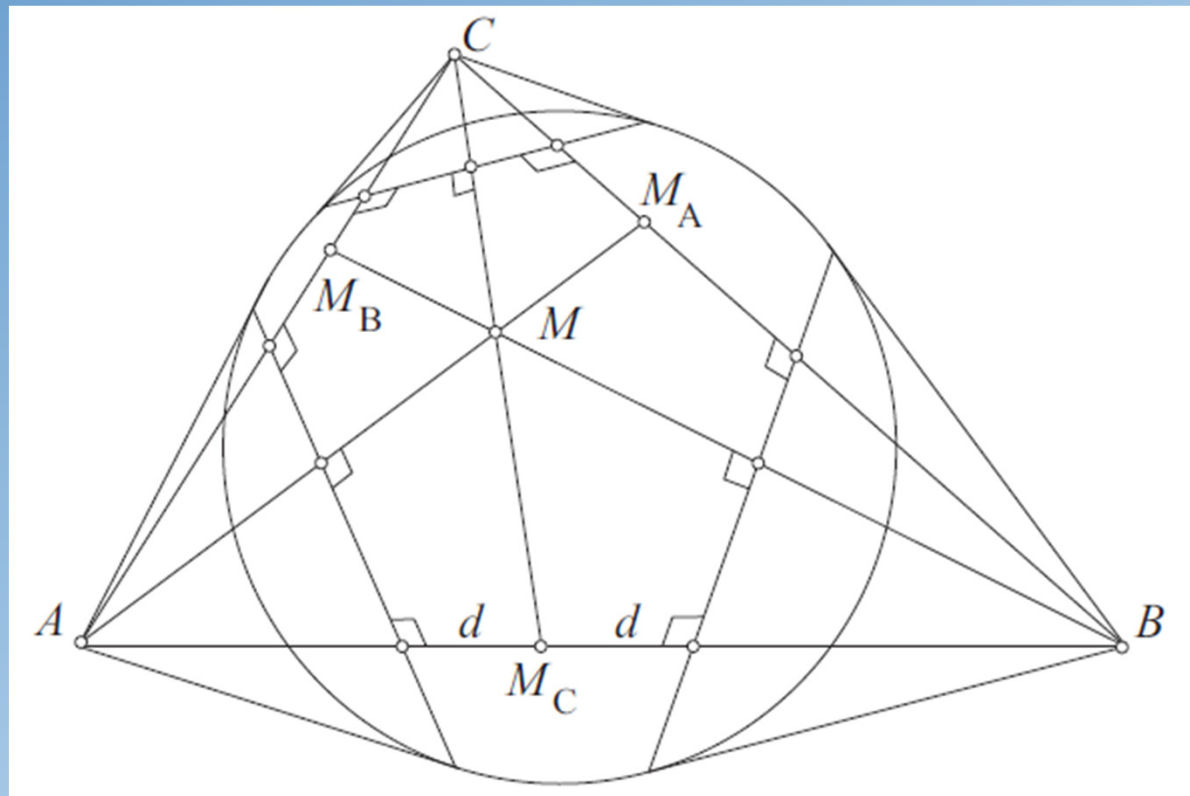
$$\frac{\sinh AM}{\sinh MM_A} = 2 \cosh \frac{a}{2}$$

$$\sinh d'_M = \frac{\sinh d'_A + \sinh d'_B + \sinh d'_C}{\sqrt{1 + 2(1 + \cosh a + \cosh b + \cosh c)}}$$

$$d'_M = \frac{d'_A + d'_B + d'_C}{3}$$

$$\cosh YM = \frac{\cosh YA + \cosh YB + \cosh YC}{\frac{n}{n_A(M)}} = \frac{\cosh YA + \cosh YB + \cosh YC}{\sqrt{1 + 2(1 + \cosh a + \cosh b + \cosh c)}}$$

$$YA^2 + YB^2 + YC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3YM^2$$



Körülírt ciklusok

$$\tanh R = \frac{\sin \delta}{N}, \quad \tanh R_A = \frac{\sin(\delta + \alpha)}{N}, \quad \tanh R_B = \frac{\sin(\delta + \beta)}{N}, \quad \tanh R_C = \frac{\sin(\delta + \gamma)}{N}$$

$$\begin{aligned} \tanh R &= \tanh \frac{a}{2} \tanh \frac{b}{2} \tanh \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{2 \sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2} \sinh \frac{c}{2}}{n} \\ \tanh R_A &= \tanh \frac{a}{2} \coth \frac{b}{2} \coth \frac{c}{2} \cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{2 \sinh \frac{a}{2} \cosh \frac{b}{2} \cosh \frac{c}{2}}{n} \\ \tanh R_B &= \coth \frac{a}{2} \tanh \frac{b}{2} \coth \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} = \frac{2 \cosh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2} \cosh \frac{c}{2}}{n} \\ \tanh R_C &= \coth \frac{a}{2} \coth \frac{b}{2} \tanh \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \frac{2 \cosh \frac{a}{2} \cosh \frac{b}{2} \sinh \frac{c}{2}}{n} \end{aligned}$$

$$n_A(0) : n_B(O) : n_C(O) = \cos(\delta + \alpha) \sinh a : \cos(\delta + \beta) \sinh b : \cos(\delta + \gamma) \sinh c$$

$$\sqrt{1 + 2(1 + \cosh a + \cosh b + \cosh c)} \cosh OM = \cosh OA + \cosh OB + \cosh OC = 3 \cosh R$$

$$OM^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

$$\frac{2 \sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2} \sinh \frac{c}{2}}{n} = \tanh R = \tanh \left(d + \varepsilon \frac{\pi}{2} i \right) = \frac{\sinh \left(d + \varepsilon \frac{\pi}{2} i \right)}{\cosh \left(d + \varepsilon \frac{\pi}{2} i \right)} = \frac{\varepsilon i \cosh d}{\varepsilon i \sinh d} = \coth d$$

$$\frac{1}{R} = d = \frac{4T}{abc}$$

Beírt kör és hozzáírt ciklusok

$$\tanh r = \frac{n}{\sinh s}, \quad \tanh r_A = \frac{n}{\sinh(s-a)}, \quad \tanh r_B = \frac{n}{\sinh(s-b)}, \quad \tanh r_C = \frac{n}{\sinh(s-c)}$$

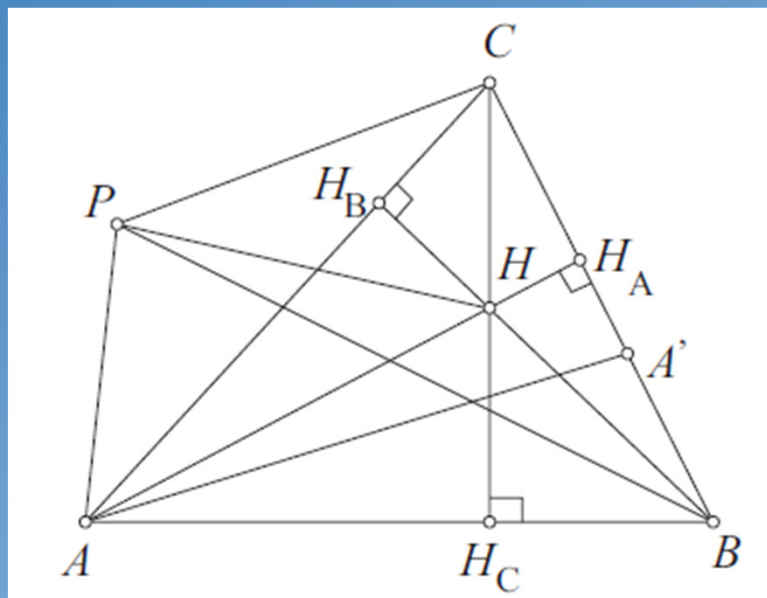
$$\begin{aligned} \coth r &= \frac{\sin(\delta + \alpha) + \sin(\delta + \beta) + \sin(\delta + \gamma) + \sin \delta}{2N} \\ \coth r_A &= \frac{-\sin(\delta + \alpha) + \sin(\delta + \beta) + \sin(\delta + \gamma) - \sin \delta}{2N} \\ \coth r_B &= \frac{\sin(\delta + \alpha) - \sin(\delta + \beta) + \sin(\delta + \gamma) - \sin \delta}{2N} \\ \coth r_C &= \frac{\sin(\delta + \alpha) + \sin(\delta + \beta) - \sin(\delta + \gamma) - \sin \delta}{2N} \end{aligned}$$

$$n_A(I) : n_B(I) : n_C(I) = \sinh a : \sinh b : \sinh c$$

$$\cosh OI = 2 \cosh \frac{a}{2} \cosh \frac{b}{2} \cosh \frac{c}{2} \cosh r \cosh R + \cosh \frac{a+b+c}{2} \cosh(R-r)$$

$$OI^2 = R^2 - 2rR$$

Magasságpont



$$\tanh HA \cdot \tanh HH_A = \tanh HB \cdot \tanh HH_B = \tanh HC \cdot \tanh HH_C$$

$$n_A(H) : n_B(H) : n_C(H) = \tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma.$$

$$n_A(H) \cosh PA + n_B(H) \cosh PB + n_C(H) \cosh PC = n \cosh PH$$

Theorem 8 (Stewart's theorem). *Let ABC be a triangle and A' is a point on the side BC . Then we have*

$$(52) \quad \cosh AB \sinh A'C + \cosh AC \sinh BA' = \cosh AA' \sinh BC.$$

Ami kimaradt....

- Izogonális konjugált,
- symmedián pont,
- pseudo-centrumok (Euler egyenes, Feuerbach kör)

REFERENCES

- [1] Akopyan, A.V., *On some classical constructions extended to hyperbolic geometry* <http://arxiv.org/abs/1105.2153> 2011.
- [2] Bell, A.: *Hansens Right Triangle Theorem, Its Converse and a Generalization* Forum Geometricorum 6 (2006) 335–342.
- [3] Cayley, A., *Analytical Researches Connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem* Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, 142 (1852), 253–278.
- [4] Casey, J., A sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry with Numerous Examples, 5th. ed., Hodges, Figgis and Co., Dublin 1888.
- [5] Casey, J., A treatise on spherical trigonometry, and its application to Geodesy and Astronomy, with numerous examples, Hodges, Figgis and CO., Grafton-ST. London: Longmans, Green, and CO., 1889.
- [6] Csima, G., Szirmai, J., *Isoptic curves of conic sections in constant curvature geometries* <http://arxiv.org/pdf/1301.6991v2.pdf>
- [7] Dörrie, H., Triumph der Mathematik, Physica-Verlag, Würzburg, 1958.
- [8] G.Horváth, Á., *Malfatti's problem on the hyperbolic plane* <http://arxiv.org/abs/1204.5014> 2014.
- [9] G.Horváth, Á., *Formulas on hyperbolic volume*. Aequationes Mathematicae 83/1 (2012), 97-116.
- [10] Hart, A. S., *Geometric investigations of Steiner's construction for Malfatti's problem*. Quart. J. Pure Appl. Math. 1 (1857) 219–221.
- [11] Johnson, R. A., Advanced Euclidean Geometry, An elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle. Dover Publications, Inc. New York, (The first edition published by Houghton Mifflin Company in 1929) 1960.
- [12] Malfatti, G., *Memoria sopra un problema sterotomico* Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, 10 (1803), 235-244.
- [13] Molnár, E., *Inversion auf der Idealebene der Bachmannschen metrischen Ebene* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 37/4 (1981), 451–470.
- [14] Steiners gesammelte Werke, (herausgegeben von K. Weierstrass) Berlin, 1881.
- [15] Steiner, J., *Einige geometrische Betrachtungen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1/2 (1826) 161-184, 1/3 (1826) 252-288.
- [16] Szász, P., Introduction to Bolyai-Lobacsevski's geometry, 1973 (in Hungarian).
- [17] Dr. Vörös, C., Analytic Bolyai's geometry, Budapest, 1909 (in Hungarian).

A decorative red floral wreath with various leaf and flower motifs, including a prominent bell-shaped flower on the left, encircles the central text. The background is a solid yellow color.

vege