Egy d-dimenziós diszkrét izoperimetrikus probléma

Lángi Zsolt

Geometria tanszék, BME

2014. május 22.

Bevezetés

Az előadás anyaga közös munka

G.Horváth Ákossal
(Geometria Tanszék, BME).

Bevezetés

Kérdés (Lhuilier, 18. század)

Az adott $n \geq 4$ lapszámú konvex poliéderek között melyik a minimális izoperimetrikus arányú?

Tétel (Lindelöf, 19. század)

Tetszőleges n-re az optimális poliéder egy gömb köré írható úgy, hogy az érintési pontok éppen a lapok tömegközéppontjai.

Megjegyzés

Később az állítást tetszőleges dimenzióra igazolták.

Megjegyzés

A fentiek szerint elegendő megkeresni az adott lapszámú, egységgömb köré írt poliéderek közt a minimális térfogatút.

Bevezetés

Kérdés (Lhuilier, 18. század)

Az adott $n \geq 4$ lapszámú konvex poliéderek között melyik a minimális izoperimetrikus arányú?

Tétel (Lindelöf, 19. század)

Tetszőleges n-re az optimális poliéder egy gömb köré írható úgy, hogy az érintési pontok éppen a lapok tömegközéppontjai.

Megjegyzés

Később az állítást tetszőleges dimenzióra igazolták.

Megjegyzés

A fentiek szerint elegendő megkeresni az adott lapszámú, egységgömb köré írt poliéderek közt a minimális térfogatút.

Bevezetés

Kérdés (Lhuilier, 18. század)

Az adott $n \geq 4$ lapszámú konvex poliéderek között melyik a minimális izoperimetrikus arányú?

Tétel (Lindelöf, 19. század)

Tetszőleges n-re az optimális poliéder egy gömb köré írható úgy, hogy az érintési pontok éppen a lapok tömegközéppontjai.

Megjegyzés

Később az állítást tetszőleges dimenzióra igazolták.

Megjegyzés

A fentiek szerint elegendő megkeresni az adott lapszámú, egységgömb köré írt poliéderek közt a minimális térfogatút.

Bevezetés

Kérdés (Lhuilier, 18. század)

Az adott $n \geq 4$ lapszámú konvex poliéderek között melyik a minimális izoperimetrikus arányú?

Tétel (Lindelöf, 19. század)

Tetszőleges n-re az optimális poliéder egy gömb köré írható úgy, hogy az érintési pontok éppen a lapok tömegközéppontjai.

Megjegyzés

Később az állítást tetszőleges dimenzióra igazolták.

Megjegyzés

A fentiek szerint elegendő megkeresni az adott lapszámú, egységgömb köré írt poliéderek közt a minimális térfogatút.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Bevezetés

A duális probléma

Kérdés

Az adott csúcsszámú, gömbbe írható poliéderek között melyik térfogata maximális?

Eredmények:

- A megoldás egy szimpliciális poliéder (Fejes Tóth László, 1953).
- Megoldás $n \leq 6$ esetén (Fejes Tóth László, 1953).
- Számítógépes keresés $n = 8$ esetén (Grace, 1963).
- Egy Lindelöf feltételhez hasonló tétel igazolása, a probléma megoldása $n \leq 8$ esetén (Berman-Hanes, 1970.)
- Számítógépes keresés $n \leq 30$ esetén (Mutoh, 2002).

A kérdés $n > 8$ esetén jelenleg is nyitott.

Előkészületek

A cél:

A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.

A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

A cél:

A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.

A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

A cél:
A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.
A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

A cél:
A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.
A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

A cél:
A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.
A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

A cél:

A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.

A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

A cél:

A fenti probléma d-dimenziós változatának vizsgálata.

A használt jelölések:

- $\mathbf{B}^d$, $\mathbb{S}^{d-1}$;
- $V(P)$: a P konvex politóp csúcshalmaza;
- $\mathcal{P}_d(n)$: a $\mathbf{B}^d$-be írható, n csúcsú politópok családja;
- $v_d(n) = \max\{\mathrm{vol}_d(P) : P \in \mathcal{P}_d(n)\}$.

Előkészületek

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ csúcshalmaza $V(P) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Definíció

Ha minden i-re létezik p_i-nek olyan $U_i \subset \mathbb{S}^{d-1}$ nyílt környezete, hogy bármely $q \in U_i$ esetén

$$\mathrm{vol}_d\left((\mathrm{conv}\left(V(P) \setminus \{p_i\}\right)) \cup \{q\}\right) \leq \mathrm{vol}_d\left(P\right),$$

akkor azt mondjuk, hogy P kielégíti a Z tulajdonságot.

Legyen $\mathcal{C}(P)$ egy olyan szimpliciális komplexus, melyre $|\mathcal{C}(P)| = \mathrm{bd}\, P$, és a csúcshalmaza $V(P)$.

Előkészületek

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ csúcshalmaza $V(P) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Definíció

Ha minden i-re létezik p_i-nek olyan $U_i \subset \mathbb{S}^{d-1}$ nyílt környezete, hogy bármely $q \in U_i$ esetén

$$\mathrm{vol}_d\left(\left(\mathrm{conv}\left(V(P) \setminus \{p_i\}\right)\right) \cup \{q\}\right) \leq \mathrm{vol}_d\left(P\right),$$

akkor azt mondjuk, hogy P kielégíti a Z tulajdonságot.

Legyen $\mathcal{C}(P)$ egy olyan szimpliciális komplexus, melyre $|\mathcal{C}(P)| = \mathrm{bd}\, P$, és a csúcshalmaza $V(P)$.

Előkészületek

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ csúcshalmaza $V(P) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Definíció

Ha minden i-re létezik p_i-nek olyan $U_i \subset \mathbb{S}^{d-1}$ nyílt környezete, hogy bármely $q \in U_i$ esetén

$$\mathrm{vol}_d\left(\left(\mathrm{conv}\left(V(P) \setminus \{p_i\}\right)\right) \cup \{q\}\right) \leq \mathrm{vol}_d\left(P\right),$$

akkor azt mondjuk, hogy P kielégíti a Z tulajdonságot.

Legyen $\mathcal{C}(P)$ egy olyan szimpliciális komplexus, melyre $|\mathcal{C}(P)| = \mathrm{bd}\, P$, és a csúcshalmaza $V(P)$.

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Bármely $p \in V(P)$ csúcsra legyen $\mathcal{F}_p$ a p-t tartalmazó $\mathcal{C}(P)$-beli hiperlapok családja. Bármely $F \in \mathcal{F}_p$-re legyen

$$A(F,p) = \mathrm{vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}\left(\left(V(F) \cup \{o\}\right) \setminus \{p\}\right)\right),$$

és legyen $m(F,p)$ a $(V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}$ halmaz által kifeszített hipersík p felé mutató normális egységvektora. Ekkor

1. $$p = \frac{m}{|m|}, \text{ ahol } m = \sum_{F \in \mathcal{F}_p} A(F,p)m(F,p), \text{ és}$$
2. *P szimpliciális.*

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Bármely $p \in V(P)$ csúcsra legyen $\mathcal{F}_p$ a p-t tartalmazó $\mathcal{C}(P)$-beli hiperlapok családja. Bármely $F \in \mathcal{F}_p$-re legyen

$$A(F,p) = \mathrm{vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}\left(\left(V(F) \cup \{o\}\right) \setminus \{p\}\right)\right),$$

és legyen $m(F,p)$ a $(V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}$ halmaz által kifeszített hipersík p felé mutató normális egységvektora. Ekkor

1. $$p = \frac{m}{|m|}, \text{ ahol } m = \sum_{F \in \mathcal{F}_p} A(F,p)m(F,p), \text{ és}$$
2. *P szimpliciális.*

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Bármely $p \in V(P)$ csúcsra legyen $\mathcal{F}_p$ a p-t tartalmazó $\mathcal{C}(P)$-beli hiperlapok családja. Bármely $F \in \mathcal{F}_p$-re legyen

$$A(F,p) = \mathrm{vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}\left((V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}\right)\right),$$

és legyen $m(F,p)$ a $(V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}$ halmaz által kifeszített hipersík p felé mutató normális egységvektora. Ekkor

1. $$p = \frac{m}{|m|}, \text{ ahol } m = \sum_{F \in \mathcal{F}_p} A(F,p)m(F,p), \text{ és}$$
2. *P szimpliciális.*

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Bármely $p \in V(P)$ csúcsra legyen $\mathcal{F}_p$ a p-t tartalmazó $\mathcal{C}(P)$-beli hiperlapok családja. Bármely $F \in \mathcal{F}_p$-re legyen

$$A(F,p) = \mathrm{vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}\left(\left(V(F) \cup \{o\}\right) \setminus \{p\}\right)\right),$$

és legyen $m(F,p)$ a $(V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}$ halmaz által kifeszített hipersík p felé mutató normális egységvektora. Ekkor

1. $$p = \frac{m}{|m|}, \text{ ahol } m = \sum_{F \in \mathcal{F}_p} A(F,p)m(F,p), \text{ és}$$
2. *P szimpliciális.*

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Bármely $p \in V(P)$ csúcsra legyen $\mathcal{F}_p$ a p-t tartalmazó $\mathcal{C}(P)$-beli hiperlapok családja. Bármely $F \in \mathcal{F}_p$-re legyen

$$A(F,p) = \mathrm{vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}\left(\left(V(F) \cup \{o\}\right) \setminus \{p\}\right)\right),$$

és legyen $m(F,p)$ a $(V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}$ halmaz által kifeszített hipersík p felé mutató normális egységvektora. Ekkor

1. $$p = \frac{m}{|m|}, \text{ ahol } m = \sum_{F \in \mathcal{F}_p} A(F,p)m(F,p), \text{ és}$$
2. *P szimpliciális.*

Előkészületek

Lemma

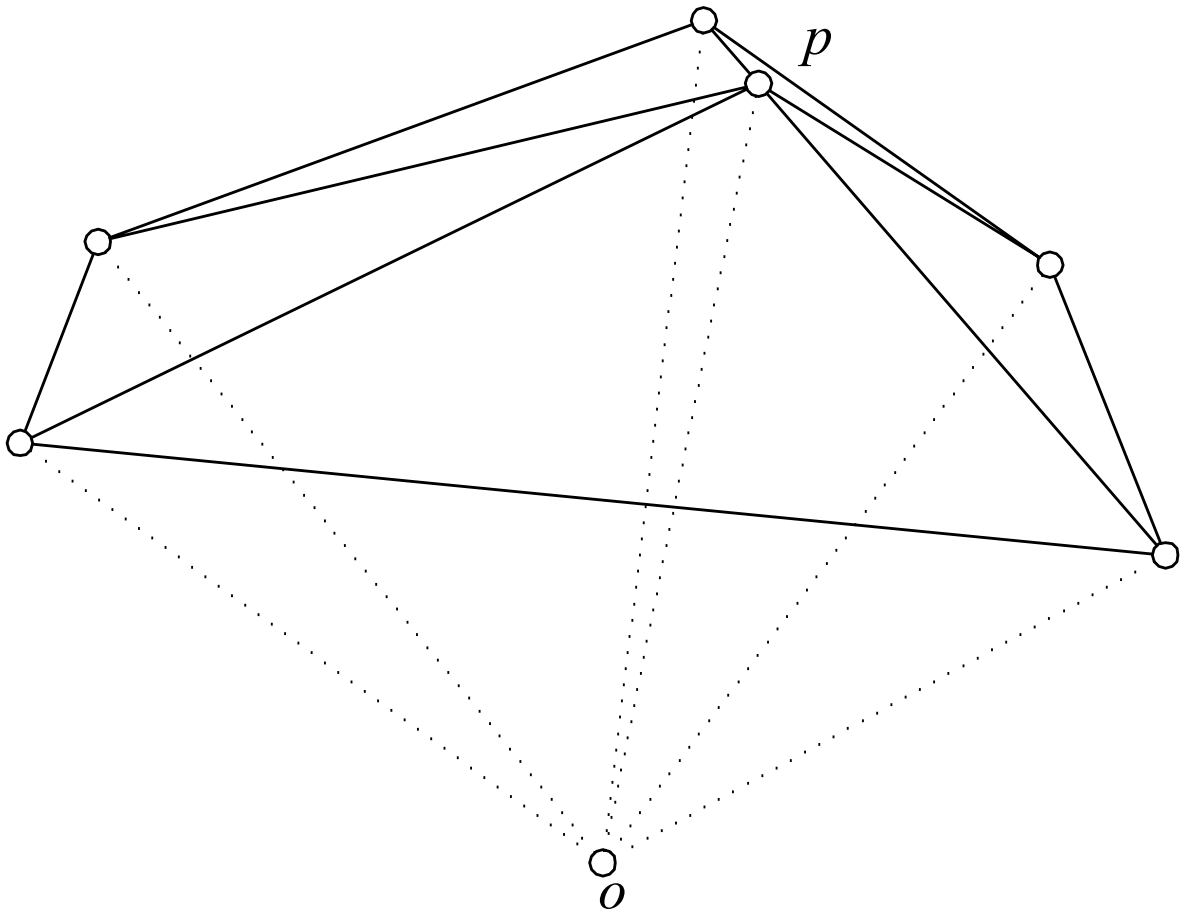
Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Bármely $p \in V(P)$ csúcsra legyen $\mathcal{F}_p$ a p-t tartalmazó $\mathcal{C}(P)$-beli hiperlapok családja. Bármely $F \in \mathcal{F}_p$-re legyen

$$A(F,p) = \mathrm{vol}_{d-1}\left(\mathrm{conv}\left(\left(V(F) \cup \{o\}\right) \setminus \{p\}\right)\right),$$

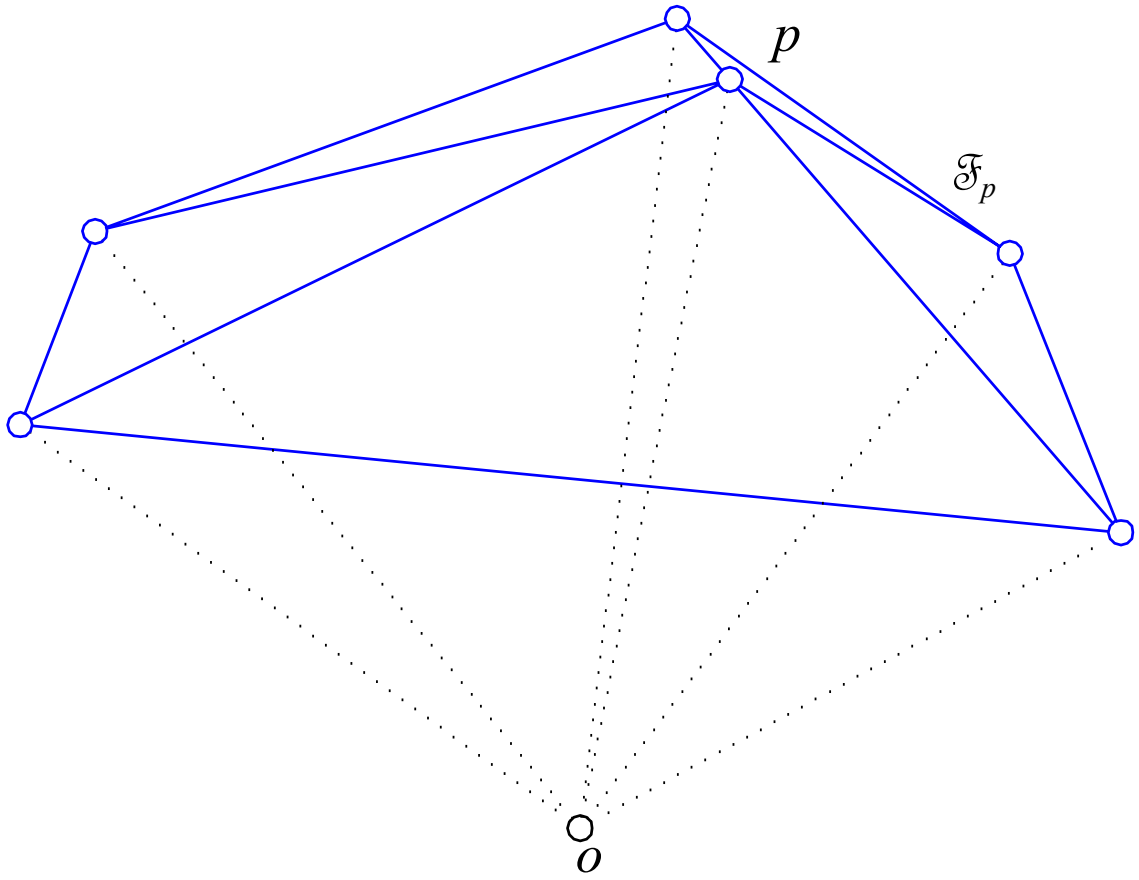
és legyen $m(F,p)$ a $(V(F) \cup \{o\}) \setminus \{p\}$ halmaz által kifeszített hipersík p felé mutató normális egységvektora. Ekkor

1. $$p = \frac{m}{|m|}, \text{ ahol } m = \sum_{F \in \mathcal{F}_p} A(F,p)m(F,p), \text{ és}$$
2. *P szimpliciális.*

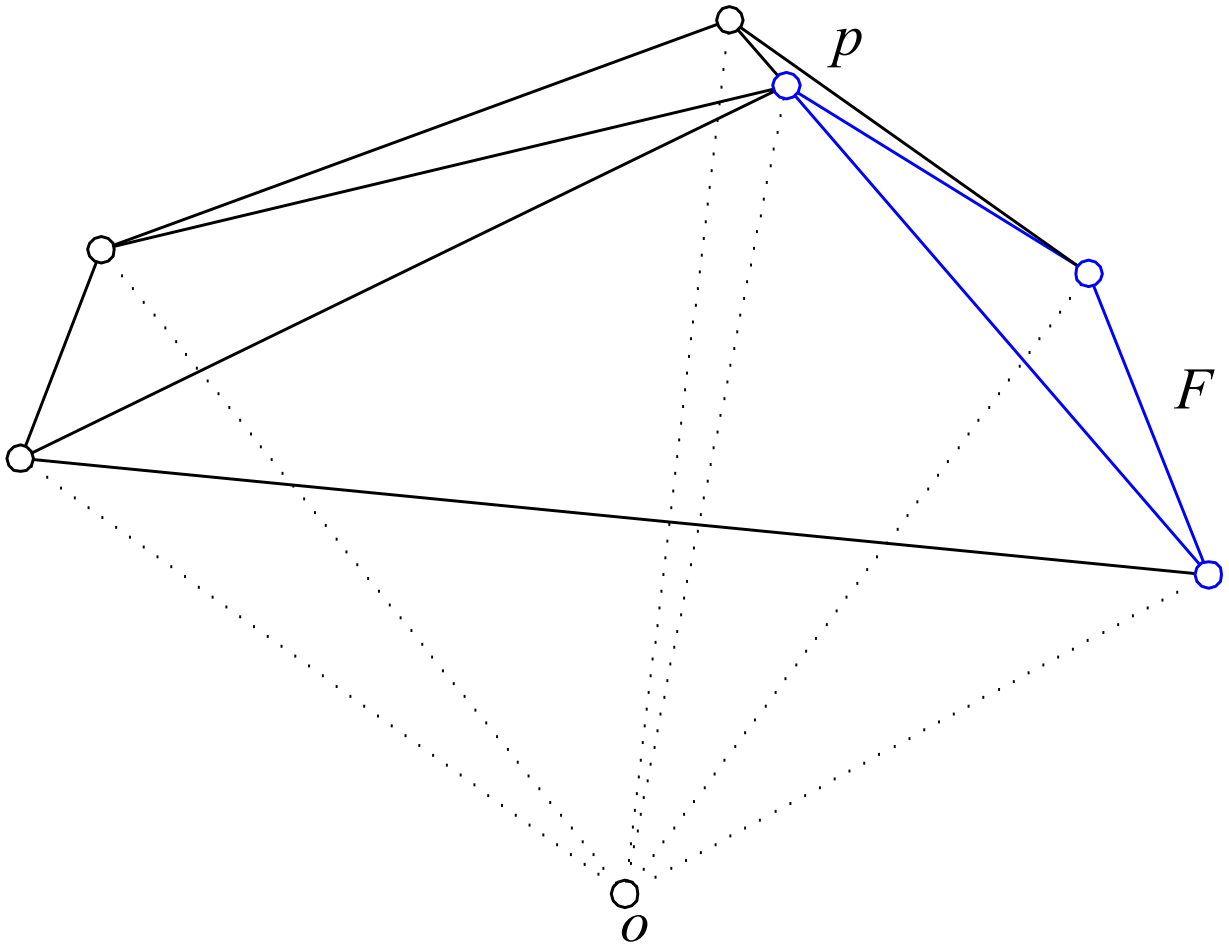
Előkészületek



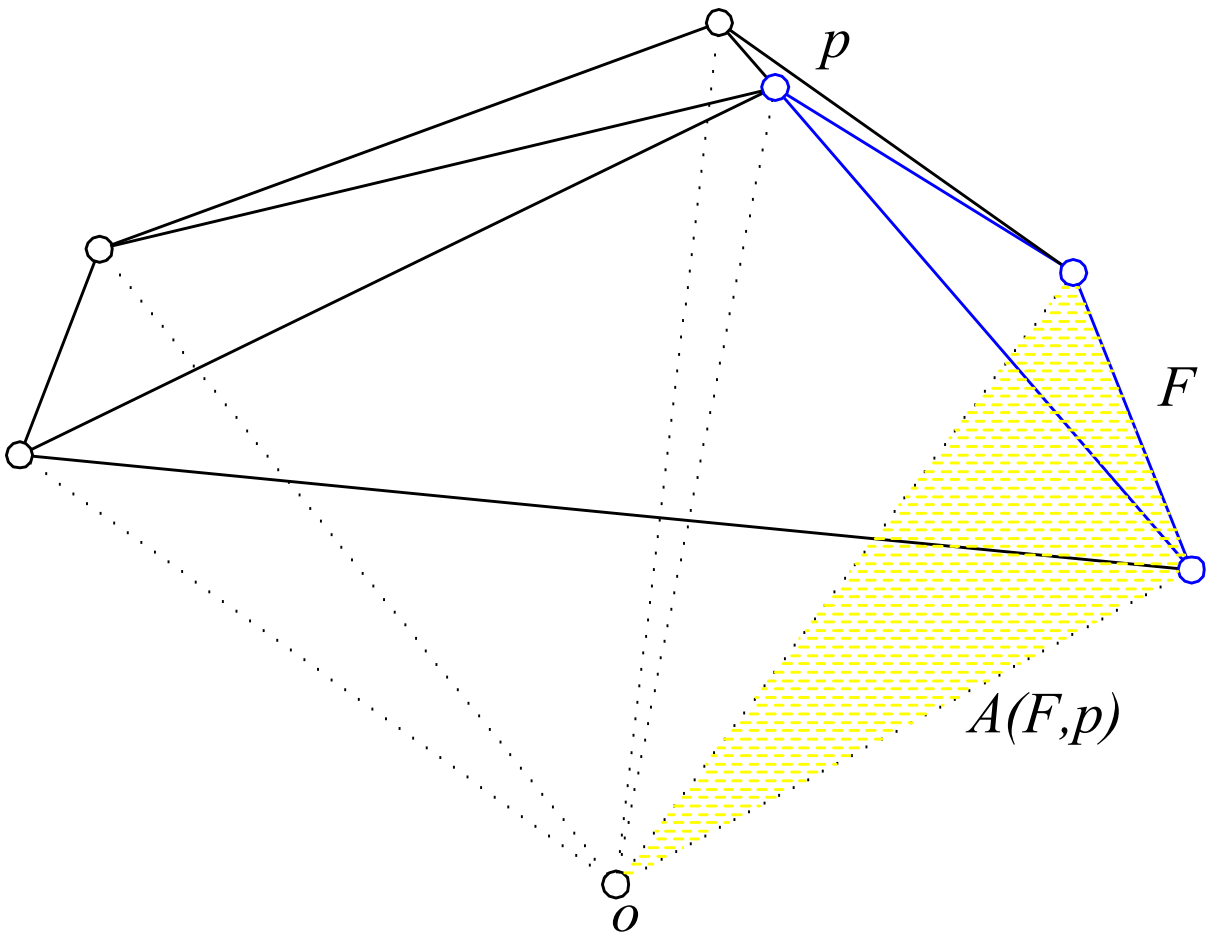
Előkészületek



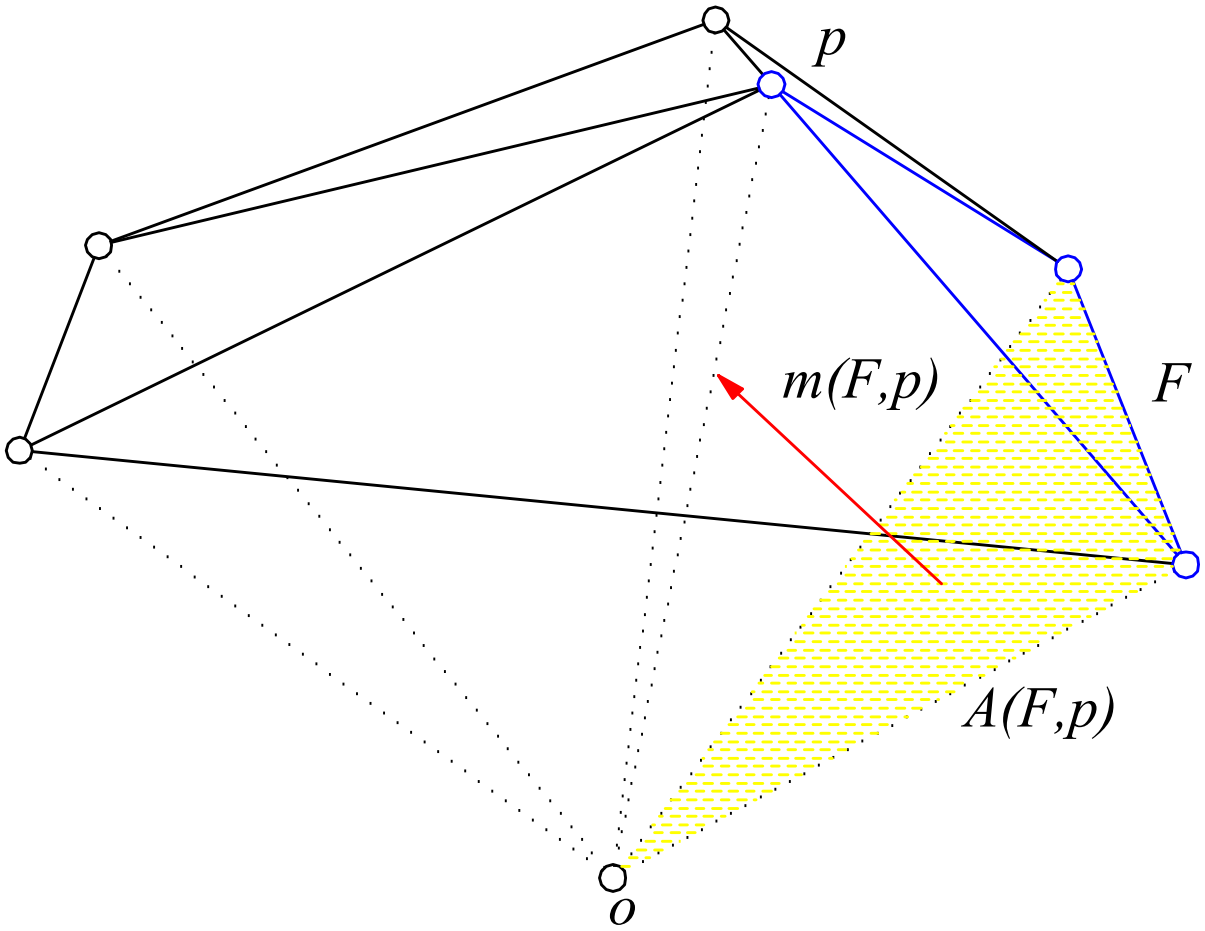
Előkészületek



Előkészületek



Előkészületek



Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Legyen $p \in V(P)$, és legyen $q_1, q_2 \in V(P)$ p két szomszédja. Tegyük fel, hogy

- *az összes p-t tartalmazó hiperlap tartalmazza q_1 és q_2 valamelyikét, és*
- *minden $S \subset V(P) \setminus \{p, q_1, q_2\}$ $(d-2)$-elemű halmazra, $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_1\})$ pontosan akkor hiperlap, ha $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_2\})$ is az.*

Ekkor $|q_1 - p| = |q_2 - p|$.

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Legyen $p \in V(P)$, és legyen $q_1, q_2 \in V(P)$ p két szomszédja. Tegyük fel, hogy

- *az összes p-t tartalmazó hiperlap tartalmazza q_1 és q_2 valamelyikét, és*
- *minden $S \subset V(P) \setminus \{p, q_1, q_2\}$ $(d-2)$-elemű halmazra, $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_1\})$ pontosan akkor hiperlap, ha $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_2\})$ is az.*

Ekkor $|q_1 - p| = |q_2 - p|$.

Előkészületek

Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Legyen $p \in V(P)$, és legyen $q_1, q_2 \in V(P)$ p két szomszédja. Tegyük fel, hogy

- *az összes p-t tartalmazó hiperlap tartalmazza q_1 és q_2 valamelyikét, és*
- *minden $S \subset V(P) \setminus \{p, q_1, q_2\}$ $(d-2)$-elemű halmazra, $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_1\})$ pontosan akkor hiperlap, ha $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_2\})$ is az.*

Ekkor $|q_1 - p| = |q_2 - p|$.

Előkészületek

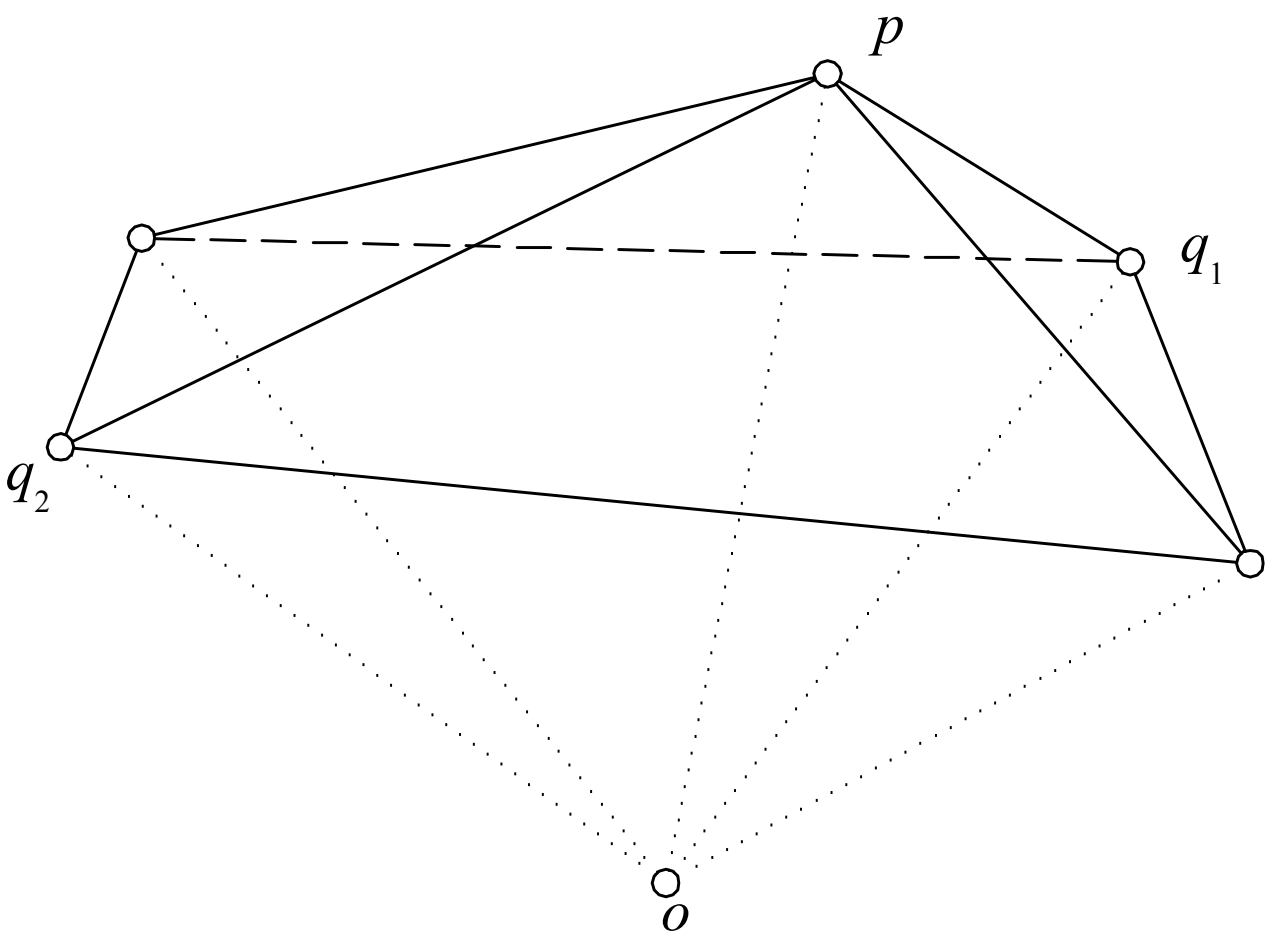
Lemma

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Legyen $p \in V(P)$, és legyen $q_1, q_2 \in V(P)$ p két szomszédja. Tegyük fel, hogy

- *az összes p-t tartalmazó hiperlap tartalmazza q_1 és q_2 valamelyikét, és*
- *minden $S \subset V(P) \setminus \{p, q_1, q_2\}$ $(d-2)$-elemű halmazra, $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_1\})$ pontosan akkor hiperlap, ha $\mathrm{conv}(S \cup \{p, q_2\})$ is az.*

Ekkor $|q_1 - p| = |q_2 - p|$.

Előkészületek



Előkészületek

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(d+1)$ és $\mathrm{vol}_d(P) = v_d(d+1)$, akkor P egy szabályos szimplex.

Következmény

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kombinatoriailag ekvivalens egy bipiramissal. Ha P kielégíti a Z tulajdonságot, akkor

- *P egy bipiramis, melynek csúcsai $\mathbb{S}^{d-1}$ antipodális pontjai,*
- *az alapja egy $(d-1)$-dimenziós lineáris altérben van, és*
- *az alapja kielégíti a Z tulajdonságot ebben az altérben.*

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(2d)$ kombinatorikusan ekvivalens egy keresztpolitóppal és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor P egy szabályos keresztpolitóp.

Előkészületek

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(d+1)$ és $\mathrm{vol}_d(P) = v_d(d+1)$, akkor P egy szabályos szimplex.

Következmény

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kombinatoriailag ekvivalens egy bipiramissal. Ha P kielégíti a Z tulajdonságot, akkor

- *P egy bipiramis, melynek csúcsai $\mathbb{S}^{d-1}$ antipodális pontjai,*
- *az alapja egy $(d-1)$-dimenziós lineáris altérben van, és*
- *az alapja kielégíti a Z tulajdonságot ebben az altérben.*

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(2d)$ kombinatorikusan ekvivalens egy keresztpolitóppal és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor P egy szabályos keresztpolitóp.

Előkészületek

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(d+1)$ és $\mathrm{vol}_d(P) = v_d(d+1)$, akkor P egy szabályos szimplex.

Következmény

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kombinatoriailag ekvivalens egy bipiramissal. Ha P kielégíti a Z tulajdonságot, akkor

- *P egy bipiramis, melynek csúcsai $\mathbb{S}^{d-1}$ antipodális pontjai,*
- *az alapja egy $(d-1)$-dimenziós lineáris altérben van, és*
- *az alapja kielégíti a Z tulajdonságot ebben az altérben.*

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(2d)$ kombinatorikusan ekvivalens egy keresztpolitóppal és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor P egy szabályos keresztpolitóp.

Előkészületek

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(d+1)$ és $\mathrm{vol}_d(P) = v_d(d+1)$, akkor P egy szabályos szimplex.

Következmény

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kombinatoriailag ekvivalens egy bipiramissal. Ha P kielégíti a Z tulajdonságot, akkor

- *P egy bipiramis, melynek csúcsai $\mathbb{S}^{d-1}$ antipodális pontjai,*
- *az alapja egy $(d-1)$-dimenziós lineáris altérben van, és*
- *az alapja kielégíti a Z tulajdonságot ebben az altérben.*

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(2d)$ kombinatorikusan ekvivalens egy keresztpolitóppal és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor P egy szabályos keresztpolitóp.

Előkészületek

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(d+1)$ és $\mathrm{vol}_d(P) = v_d(d+1)$, akkor P egy szabályos szimplex.

Következmény

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(n)$ kombinatoriailag ekvivalens egy bipiramissal. Ha P kielégíti a Z tulajdonságot, akkor

- *P egy bipiramis, melynek csúcsai $\mathbb{S}^{d-1}$ antipodális pontjai,*
- *az alapja egy $(d-1)$-dimenziós lineáris altérben van, és*
- *az alapja kielégíti a Z tulajdonságot ebben az altérben.*

Következmény

Ha $P \in \mathcal{P}_d(2d)$ kombinatorikusan ekvivalens egy keresztpolitóppal és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor P egy szabályos keresztpolitóp.

Fő eredmények

Megjegyzés

- A fenti feltételek függenek a politóp kombinatorikus struktúrájától.
- Csak az $n \leq d + 3$ csúcsú politópok kombinatorikus osztályai ismertek.
- Számos eredmény mutatja, hogy az $n \geq d + 4$ csúcsú politópok sok tekintetben máshogy viselkednek, mint a 3-dimenziós politópok (Ziegler, Grünbaum).

Megjegyzés

A mi problémánk megoldása $n \geq d + 4$ esetén nagyságrendekkel nehezebbnek tűik, mint $n \leq d + 3$ esetén.

Fő eredmények

Megjegyzés

- A fenti feltételek függenek a politóp kombinatorikus struktúrájától.
- Csak az $n \leq d + 3$ csúcsú politópok kombinatorikus osztályai ismertek.
- Számos eredmény mutatja, hogy az $n \geq d + 4$ csúcsú politópok sok tekintetben máshogy viselkednek, mint a 3-dimenziós politópok (Ziegler, Grünbaum).

Megjegyzés

A mi problémánk megoldása $n \geq d + 4$ esetén nagyságrendekkel nehezebbnek tűik, mint $n \leq d + 3$ esetén.

Fő eredmények

Megjegyzés

- A fenti feltételek függenek a politóp kombinatorikus struktúrájától.
- Csak az $n \leq d + 3$ csúcsú politópok kombinatorikus osztályai ismertek.
- Számos eredmény mutatja, hogy az $n \geq d + 4$ csúcsú politópok sok tekintetben máshogy viselkednek, mint a 3-dimenziós politópok (Ziegler, Grünbaum).

Megjegyzés

A mi problémánk megoldása $n \geq d + 4$ esetén nagyságrendekkel nehezebbnek tűik, mint $n \leq d + 3$ esetén.

Fő eredmények

Megjegyzés

- A fenti feltételek függenek a politóp kombinatorikus struktúrájától.
- Csak az $n \leq d + 3$ csúcsú politópok kombinatorikus osztályai ismertek.
- Számos eredmény mutatja, hogy az $n \geq d + 4$ csúcsú politópok sok tekintetben máshogy viselkednek, mint a 3-dimenziós politópok (Ziegler, Grünbaum).

Megjegyzés

A mi problémánk megoldása $n \geq d + 4$ esetén nagyságrendekkel nehezebbnek tűik, mint $n \leq d + 3$ esetén.

Fő eredmények

Tétel

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(d+2)$ maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+2)$ felett. Ekkor $P = \operatorname{conv}(P_1 \cup P_2)$, ahol P_1 és P_2 merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő, szabályos $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$-, illetve $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-dimenziós szimplexek. Továbbá

$$v_d(d+2) = \frac{1}{d!} \cdot \frac{(\lfloor d/2 \rfloor + 1)^{\frac{\lfloor d/2 \rfloor + 1}{2}} \cdot (\lceil d/2 \rceil + 1)^{\frac{\lceil d/2 \rceil + 1}{2}}}{\lfloor d/2 \rfloor^{\frac{\lfloor d/2 \rfloor}{2}} \cdot \lceil d/2 \rceil^{\frac{\lceil d/2 \rceil}{2}}}$$

Fő eredmények

Tétel

Legyen $P \in \mathcal{P}_d(d+2)$ maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+2)$ felett. Ekkor $P = \mathrm{conv}(P_1 \cup P_2)$, ahol P_1 és P_2 merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő, szabályos $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$-, illetve $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-dimenziós szimplexek. Továbbá

$$v_d(d+2) = \frac{1}{d!} \cdot \frac{(\lfloor d/2 \rfloor + 1)^{\frac{\lfloor d/2 \rfloor + 1}{2}} \cdot (\lceil d/2 \rceil + 1)^{\frac{\lceil d/2 \rceil + 1}{2}}}{\lfloor d/2 \rfloor^{\frac{\lfloor d/2 \rfloor}{2}} \cdot \lceil d/2 \rceil^{\frac{\lceil d/2 \rceil}{2}}}$$

Fő eredmények

Definíció

Egy n csúcsú, d-dimenziós politóp ciklikus, ha kombinatoriailag ekvivalens a $t \mapsto \left(t, t^2, \dots t^d\right)$ görbe n pontjának konvex burkával.

Megjegyzés

A fenti görbe pontjai konvex burkának kombinatorikus struktúrája csak a pontok darabszámától függ.

Fő eredmények

Definíció

Egy n csúcsú, d-dimenziós politóp ciklikus, ha kombinatoriailag ekvivalens a $t \mapsto \left(t, t^2, \dots t^d\right)$ görbe n pontjának konvex burkával.

Megjegyzés

A fenti görbe pontjai konvex burkának kombinatorikus struktúrája csak a pontok darabszámától függ.

Fő eredmények

Tétel

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Ha P páratlan, tegyük fel, hogy P nem ciklikus. Ekkor $P = \mathrm{conv}\{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}$, ahol P_1, P_2 and P_3 szabályos, páronként merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő szimplexek.

- *Ha d páratlan és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ felett, akkor P_1, P_2 és P_3 dimenziói $\lfloor d/3 \rfloor$ vagy $\lceil d/3 \rceil$. Speciálisan,*

$$v_d(d+3) = \frac{1}{d!} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{(k_i+1)^{\frac{k_i+1}{2}}}{k_i^{\frac{k_i}{2}}},$$

  ahol $k_1 + k_2 + k_3 = d$ és minden i-re $k_i \in \{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor, \lceil \frac{d}{3} \rceil\}$.
- *Ugyanez igaz, ha d páros, és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ nem ciklikus elemei között.*

Fő eredmények

Tétel

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Ha P páratlan, tegyük fel, hogy P nem ciklikus. Ekkor $P = \mathrm{conv}\{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}$, ahol P_1, P_2 and P_3 szabályos, páronként merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő szimplexek.

- *Ha d páratlan és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ felett, akkor P_1, P_2 és P_3 dimenziói $\lfloor d/3 \rfloor$ vagy $\lceil d/3 \rceil$. Speciálisan,*

$$v_d(d+3) = \frac{1}{d!} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{(k_i+1)^{\frac{k_i+1}{2}}}{k_i^{\frac{k_i}{2}}},$$

  ahol $k_1 + k_2 + k_3 = d$ és minden i-re $k_i \in \{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor, \lceil \frac{d}{3} \rceil\}$.
- *Ugyanez igaz, ha d páros, és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ nem ciklikus elemei között.*

Fő eredmények

Tétel

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Ha P páratlan, tegyük fel, hogy P nem ciklikus. Ekkor $P = \mathrm{conv}\{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}$, ahol P_1, P_2 and P_3 szabályos, páronként merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő szimplexek.

- *Ha d páratlan és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ felett, akkor P_1, P_2 és P_3 dimenziói $\lfloor d/3 \rfloor$ vagy $\lceil d/3 \rceil$. Speciálisan,*

$$v_d(d+3) = \frac{1}{d!} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{(k_i+1)^{\frac{k_i+1}{2}}}{k_i^{\frac{k_i}{2}}},$$

  ahol $k_1 + k_2 + k_3 = d$ és minden i-re $k_i \in \{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor, \lceil \frac{d}{3} \rceil\}$.
- *Ugyanez igaz, ha d páros, és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ nem ciklikus elemei között.*

Fő eredmények

Tétel

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Ha P páratlan, tegyük fel, hogy P nem ciklikus. Ekkor $P = \mathrm{conv}\{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}$, ahol P_1, P_2 and P_3 szabályos, páronként merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő szimplexek.

- *Ha d páratlan és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ felett, akkor P_1, P_2 és P_3 dimenziói $\lfloor d/3 \rfloor$ vagy $\lceil d/3 \rceil$. Speciálisan,*

$$v_d(d+3) = \frac{1}{d!} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{(k_i+1)^{\frac{k_i+1}{2}}}{k_i^{\frac{k_i}{2}}},$$

  ahol $k_1 + k_2 + k_3 = d$ és minden i-re $k_i \in \left\{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor, \lceil \frac{d}{3} \rceil\right\}$.
- *Ugyanez igaz, ha d páros, és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ nem ciklikus elemei között.*

Fő eredmények

Tétel

Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ kielégíti a Z tulajdonságot. Ha P páratlan, tegyük fel, hogy P nem ciklikus. Ekkor $P = \mathrm{conv}\{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}$, ahol P_1, P_2 and P_3 szabályos, páronként merőleges lineáris alterekben elhelyezkedő szimplexek.

- *Ha d páratlan és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ felett, akkor P_1, P_2 és P_3 dimenziói $\lfloor d/3 \rfloor$ vagy $\lceil d/3 \rceil$. Speciálisan,*

$$v_d(d+3) = \frac{1}{d!} \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{(k_i+1)^{\frac{k_i+1}{2}}}{k_i^{\frac{k_i}{2}}},$$

  ahol $k_1 + k_2 + k_3 = d$ és minden i-re $k_i \in \left\{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor, \lceil \frac{d}{3} \rceil\right\}$.
- *Ugyanez igaz, ha d páros, és P maximális térfogatú $\mathcal{P}_d(d+3)$ nem ciklikus elemei között.*

A bizonyítás ötlete

A $P \in \mathcal{P}_d(n)$ politóp Gale-diagramja:

Egy bijekció $V(P)$ és $\mathbb{R}^{n-d-1}$ egy n-elemű $\bar{P}$ multihalmaza közt, melynél P kombinatorikus tulajdonságai (a megfelelő módon) leolvashatók $\bar{P}$ tulajdonságaiból.

Mivel P szimpliciális,

- ha $n = d + 2$, akkor $\bar{P}$ elemei ± 1, multiplicitással.
- ha $n = d + 3$, akkor $\bar{P}$ elemei egy o középpontú, szabályos $(2k + 1)$-szög csúcsai, multiplicitással.

A bizonyítás ötlete

A $P \in \mathcal{P}_d(n)$ politóp Gale-diagramja:
Egy bijekció $V(P)$ és $\mathbb{R}^{n-d-1}$ egy n-elemű $\bar{P}$ multihalmaza közt,
melynél P kombinatorikus tulajdonságai (a megfelelő módon) leolvashatók $\bar{P}$ tulajdonságaiból.
Mivel P szimpliciális,

- ha $n = d + 2$, akkor $\bar{P}$ elemei ± 1, multiplicitással.
- ha $n = d + 3$, akkor $\bar{P}$ elemei egy o középpontú, szabályos $(2k + 1)$-szög csúcsai, multiplicitással.

A bizonyítás ötlete

A $P \in \mathcal{P}_d(n)$ politóp Gale-diagramja:
Egy bijekció $V(P)$ és $\mathbb{R}^{n-d-1}$ egy n-elemű $\bar{P}$ multihalmaza közt, melynél P kombinatorikus tulajdonságai (a megfelelő módon) leolvashatók $\bar{P}$ tulajdonságaiból.

Mivel P szimpliciális,

- ha $n = d + 2$, akkor $\bar{P}$ elemei ± 1, multiplicitással.
- ha $n = d + 3$, akkor $\bar{P}$ elemei egy o középpontú, szabályos $(2k + 1)$-szög csúcsai, multiplicitással.

A bizonyítás ötlete

A $P \in \mathcal{P}_d(n)$ politóp Gale-diagramja:
Egy bijekció $V(P)$ és $\mathbb{R}^{n-d-1}$ egy n-elemű $\bar{P}$ multihalmaza közt, melynél P kombinatorikus tulajdonságai (a megfelelő módon) leolvashatók $\bar{P}$ tulajdonságaiból.
Mivel P szimpliciális,

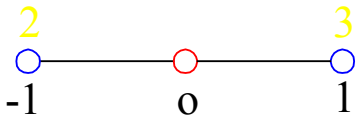
- ha $n = d + 2$, akkor $\bar{P}$ elemei ± 1, multiplicitással.
- ha $n = d + 3$, akkor $\bar{P}$ elemei egy o középpontú, szabályos $(2k + 1)$-szög csúcsai, multiplicitással.

A bizonyítás ötlete

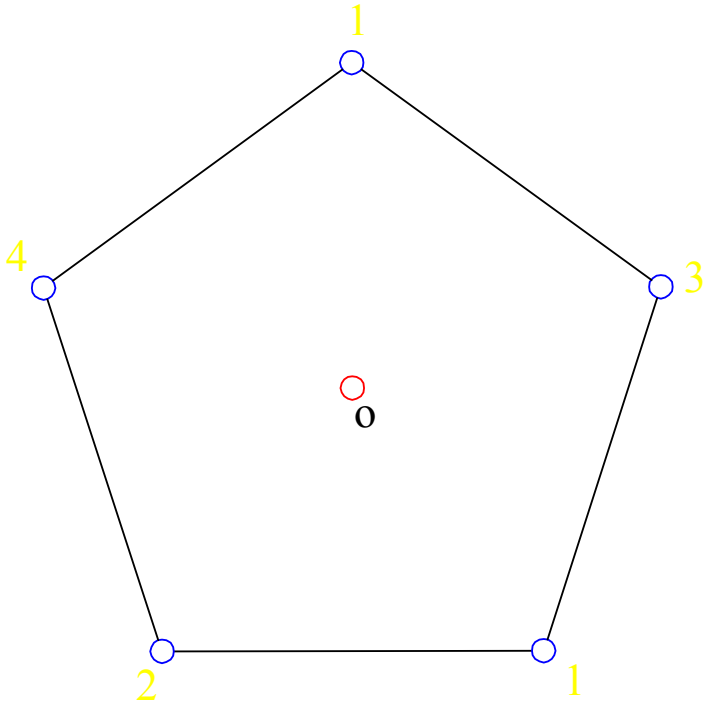
A $P \in \mathcal{P}_d(n)$ politóp Gale-diagramja:
Egy bijekció $V(P)$ és $\mathbb{R}^{n-d-1}$ egy n-elemű $\bar{P}$ multihalmaza közt, melynél P kombinatorikus tulajdonságai (a megfelelő módon) leolvashatók $\bar{P}$ tulajdonságaiból.
Mivel P szimpliciális,

- ha $n = d + 2$, akkor $\bar{P}$ elemei ± 1, multiplicitással.
- ha $n = d + 3$, akkor $\bar{P}$ elemei egy o középpontú, szabályos $(2k + 1)$-szög csúcsai, multiplicitással.

A bizonyítás ötlete



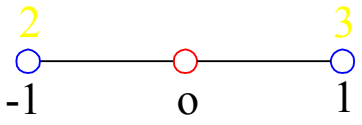
n=d+2



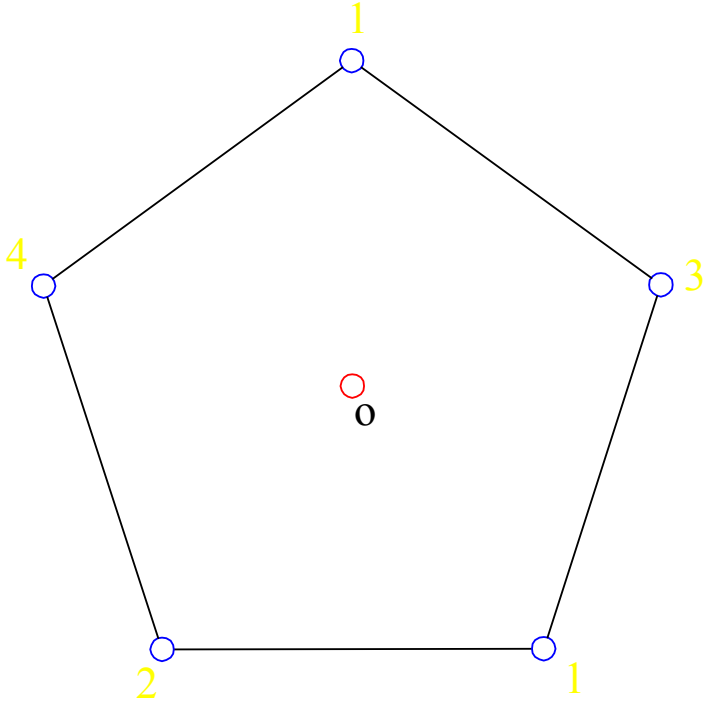
n=d+3

A második lemma alkalmazásával az állítás igazolható, ha $n = d + 2$, vagy ha $n = d + 3$, de van 1-nél nagyobb súlyú csúcs. Ha d páros, a $d + 3$ csúcsú ciklikus politópnak Gale-diagramja a szabályos $(d + 3)$-szög.

A bizonyítás ötlete



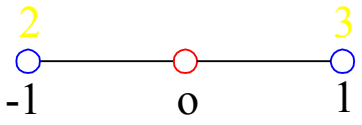
n=d+2



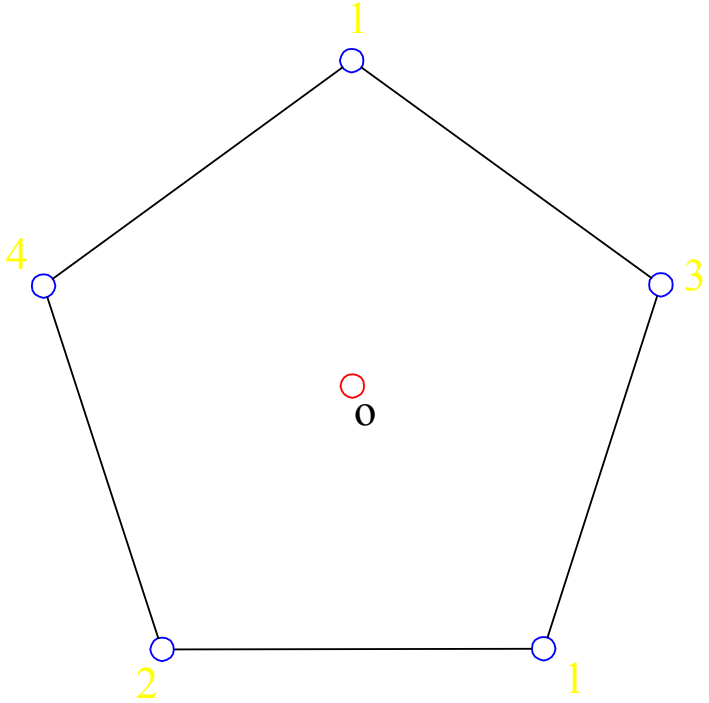
n=d+3

A második lemma alkalmazásával az állítás igazolható, ha $n = d + 2$, vagy ha $n = d + 3$, de van 1-nél nagyobb súlyú csúcs. Ha d páros, a $d + 3$ csúcsú ciklikus politópnak Gale-diagramja a szabályos $(d + 3)$-szög.

A bizonyítás ötlete



n=d+2



n=d+3

A második lemma alkalmazásával az állítás igazolható, ha $n = d + 2$, vagy ha $n = d + 3$, de van 1-nél nagyobb súlyú csúcs. Ha d páros, a $d + 3$ csúcsú ciklikus politópnak Gale-diagramja a szabályos $(d + 3)$-szög.

Ciklikus politópok

Megjegyzés

Legyen d páros, és $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ egy Z tulajdonságot kielégítő ciklikus politóp. A lemma alkalmazásával megmutatható, hogy ha $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$, akkor a csúcsok alkalmas indexelésével $|p_{i+1} - p_i|$ értéke független i-től. A többi élre a lemma feltételei nem teljesülnek.

Kérdés

Melyik $\mathbb{S}^{d-1}$-be írt ciklikus politóp lehet a maximális térfogatú? Van olyan realizációja, amelyik megőrzi a szabályos $(d+3)$-szög szimmetriáit?

Ciklikus politópok

Megjegyzés

Legyen d páros, és $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ egy Z tulajdonságot kielégítő ciklikus politóp. A lemma alkalmazásával megmutatható, hogy ha $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$, akkor a csúcsok alkalmas indexelésével $|p_{i+1} - p_i|$ értéke független i-től. A többi élre a lemma feltételei nem teljesülnek.

Kérdés

Melyik $\mathbb{S}^{d-1}$-be írt ciklikus politóp lehet a maximális térfogatú? Van olyan realizációja, amelyik megőrzi a szabályos $(d+3)$-szög szimmetriáit?

Ciklikus politópok

Megjegyzés

Legyen d páros, és $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ egy Z tulajdonságot kielégítő ciklikus politóp. A lemma alkalmazásával megmutatható, hogy ha $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$, akkor a csúcsok alkalmas indexelésével $|p_{i+1} - p_i|$ értéke független i-től. A többi élre a lemma feltételei nem teljesülnek.

Kérdés

Melyik $\mathbb{S}^{d-1}$-be írt ciklikus politóp lehet a maximális térfogatú? Van olyan realizációja, amelyik megőrzi a szabályos $(d+3)$-szög szimmetriáit?

Ciklikus politópok

Megjegyzés

Legyen d páros, és $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ egy Z tulajdonságot kielégítő ciklikus politóp. A lemma alkalmazásával megmutatható, hogy ha $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$, akkor a csúcsok alkalmas indexelésével $|p_{i+1} - p_i|$ értéke független i-től. A többi élre a lemma feltételei nem teljesülnek.

Kérdés

Melyik $\mathbb{S}^{d-1}$-be írt ciklikus politóp lehet a maximális térfogatú? Van olyan realizációja, amelyik megőrzi a szabályos $(d+3)$-szög szimmetriáit?

Ciklikus politópok

Definíció

Legyen $d \geq 2$ páros és $n \geq d+3$. Legyen

$$C_d(n) = \sqrt{\frac{2}{d}}\,\mathrm{conv}\left\{\left(\cos\frac{i\pi}{n}, \sin\frac{i\pi}{n}, \cos\frac{2i\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{di\pi}{2n}, \sin\frac{di\pi}{2n}\right) : i = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Megjegyzés

A fenti $C_d(n)$ politóp ciklikus, $\mathbb{S}^{d-1}$-be írt, és $\mathrm{Sym}(C_d(n)) = D_n$ (ld. Ziegler: Convex polytopes, vagy Kaibel, Wassmer, 2014).

Ciklikus politópok

Definíció

Legyen $d \geq 2$ páros és $n \geq d+3$. Legyen

$$C_d(n) = \sqrt{\frac{2}{d}}\,\mathrm{conv}\left\{\left(\cos\frac{i\pi}{n}, \sin\frac{i\pi}{n}, \cos\frac{2i\pi}{n}, \ldots, \cos\frac{di\pi}{2n}, \sin\frac{di\pi}{2n}\right) : i = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Megjegyzés

A fenti $C_d(n)$ politóp ciklikus, $\mathbb{S}^{d-1}$-be írt, és $\mathrm{Sym}(C_d(n)) = D_n$ (ld. Ziegler: Convex polytopes, vagy Kaibel, Wassmer, 2014).

Ciklikus politópok

Tétel

Legyen $P \in \mathcal{C}_d(d+3)$ egy ciklikus politóp, ahol $d = 4$ vagy $d = 6$, és legyen $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$. Ha k minden értékére $|p_{i+k} - p_i|$ független i értékétől, akkor P $C_d(d+3)$-mal egybevágó.

A bizonyítás ötlete: a fenti feltételekből megmutatható, hogy a P-t tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid (Löwner-ellipszoid) az egységgömb.

Ciklikus politópok

Tétel

Legyen $P \in \mathcal{C}_d(d+3)$ egy ciklikus politóp, ahol $d = 4$ vagy $d = 6$, és legyen $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$. Ha k minden értékére $|p_{i+k} - p_i|$ független i értékétől, akkor P $C_d(d+3)$-mal egybevágó.

A bizonyítás ötlete: a fenti feltételekből megmutatható, hogy a P-t tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid (Löwner-ellipszoid) az egységgömb.

Ciklikus politópok

Tétel

Legyen $P \in \mathcal{C}_d(d+3)$ egy ciklikus politóp, ahol $d = 4$ vagy $d = 6$, és legyen $V(P) = \{p_i : i = 1, 2, \ldots, d+3\}$. Ha k minden értékére $|p_{i+k} - p_i|$ független i értékétől, akkor P $C_d(d+3)$-mal egybevágó.

A bizonyítás ötlete: a fenti feltételekből megmutatható, hogy a P-t tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid (Löwner-ellipszoid) az egységgömb.

Megjegyzések, kérdések

Kérdés

Igaz, hogy minden páros d-re a $\mathcal{P}_d(d+3)$-beli maximális térfogatú ciklikus politópok $C_d(d+3)$-mal egybevágók? Igaz ez pl. $d=4$ esetén? Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ ciklikus és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor $C_d(d+3)$-mal egybevágó?

Megjegyzés

Kiszámolható, hogy $C_4(7)$ kielégíti a Z tulajdonságot.

Megjegyzés

Ha d páratlan, nem ciklikus politópnak van maximális térfogata $\mathcal{P}_d(d+3)$-ban.

Megjegyzések, kérdések

Kérdés

Igaz, hogy minden páros d-re a $\mathcal{P}_d(d+3)$-beli maximális térfogatú ciklikus politópok $C_d(d+3)$-mal egybevágók? Igaz ez pl. $d=4$ esetén? Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ ciklikus és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor $C_d(d+3)$-mal egybevágó?

Megjegyzés

Kiszámolható, hogy $C_4(7)$ kielégíti a Z tulajdonságot.

Megjegyzés

Ha d páratlan, nem ciklikus politópnak van maximális térfogata $\mathcal{P}_d(d+3)$-ban.

Megjegyzések, kérdések

Kérdés

Igaz, hogy minden páros d-re a $\mathcal{P}_d(d+3)$-beli maximális térfogatú ciklikus politópok $C_d(d+3)$-mal egybevágók? Igaz ez pl. $d=4$ esetén? Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ ciklikus és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor $C_d(d+3)$-mal egybevágó?

Megjegyzés

Kiszámolható, hogy $C_4(7)$ kielégíti a Z tulajdonságot.

Megjegyzés

Ha d páratlan, nem ciklikus politópnak van maximális térfogata $\mathcal{P}_d(d+3)$-ban.

Megjegyzések, kérdések

Kérdés

Igaz, hogy minden páros d-re a $\mathcal{P}_d(d+3)$-beli maximális térfogatú ciklikus politópok $C_d(d+3)$-mal egybevágók? Igaz ez pl. $d=4$ esetén? Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ ciklikus és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor $C_d(d+3)$-mal egybevágó?

Megjegyzés

Kiszámolható, hogy $C_4(7)$ kielégíti a Z tulajdonságot.

Megjegyzés

Ha d páratlan, nem ciklikus politópnak van maximális térfogata $\mathcal{P}_d(d+3)$-ban.

Megjegyzések, kérdések

Kérdés

Igaz, hogy minden páros d-re a $\mathcal{P}_d(d+3)$-beli maximális térfogatú ciklikus politópok $C_d(d+3)$-mal egybevágók? Igaz ez pl. $d=4$ esetén? Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ ciklikus és kielégíti a Z tulajdonságot, akkor $C_d(d+3)$-mal egybevágó?

Megjegyzés

Kiszámolható, hogy $C_4(7)$ kielégíti a Z tulajdonságot.

Megjegyzés

Ha d páratlan, nem ciklikus politópnak van maximális térfogata $\mathcal{P}_d(d+3)$-ban.

Megjegyzések, kérdések

Megjegyzés

Legyen $P_4 \in \mathcal{P}_4(7)$, páronként merőleges alterekbe eső, egy szabályos háromszög és két átmérő konvex burka. Legyen $P_6 \in \mathcal{P}_6(9)$ három, páronként merőleges alterekbe eső szabályos háromszög konvex burka. Kiszámolható, hogy

$$\mathrm{vol}_4(P_4) = 0.43301\ldots > \mathrm{vol}_4(C_4(7)) = 0.38905\ldots,$$

$$\mathrm{vol}_6(P_6) = 0.02435\ldots > \mathrm{vol}_6(C_6(9)) = 0.01697\ldots.$$

Probléma

Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ maximális térfogatú, ahol d páros, akkor P nem ciklikus?

Megjegyzések, kérdések

Megjegyzés

Legyen $P_4 \in \mathcal{P}_4(7)$, páronként merőleges alterekbe eső, egy szabályos háromszög és két átmérő konvex burka. Legyen $P_6 \in \mathcal{P}_6(9)$ három, páronként merőleges alterekbe eső szabályos háromszög konvex burka. Kiszámolható, hogy

$$\mathrm{vol}_4(P_4) = 0.43301\ldots > \mathrm{vol}_4(C_4(7)) = 0.38905\ldots,$$

$$\mathrm{vol}_6(P_6) = 0.02435\ldots > \mathrm{vol}_6(C_6(9)) = 0.01697\ldots.$$

Probléma

Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ maximális térfogatú, ahol d páros, akkor P nem ciklikus?

Megjegyzések, kérdések

Megjegyzés

Legyen $P_4 \in \mathcal{P}_4(7)$, páronként merőleges alterekbe eső, egy szabályos háromszög és két átmérő konvex burka. Legyen $P_6 \in \mathcal{P}_6(9)$ három, páronként merőleges alterekbe eső szabályos háromszög konvex burka. Kiszámolható, hogy

$$\mathrm{vol}_4(P_4) = 0.43301\ldots > \mathrm{vol}_4(C_4(7)) = 0.38905\ldots,$$

$$\mathrm{vol}_6(P_6) = 0.02435\ldots > \mathrm{vol}_6(C_6(9)) = 0.01697\ldots.$$

Probléma

Igaz, hogy ha $P \in \mathcal{P}_d(d+3)$ maximális térfogatú, ahol d páros, akkor P nem ciklikus?

Megjegyzések, kérdések

Megjegyzés

Homotécia erejéig a D_n-szimmetriával rendelkező n-csúcsú politópok $5 \leq n \leq 9$ esetén:

- szabályos $(n-1)$-dimenziós szimplex minden n-re,
- szabályos n-szög $\mathbb{R}^2$-ben minden n-re,
- $C_4(n)$, ahol $n = 6, 7, 8, 9$ és $C_6(n)$, ahol $n = 8, 9$,
- szabályos keresztpolitóp $\mathbb{R}^3$-ben és $\mathbb{R}^4$-ben,
- az előző megjegyzés P_6 politópja $\mathbb{R}^6$-ban,
- az alábbi $P \in \mathbb{R}^3$ politóp:

$$V(P) = \left\{ (1,0,0), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (0,1,0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \right.$$

$$\left. (0,0,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}.$$

És az utolsó ...

Kérdés

Igaz, hogy ha valamilyen $n \geq d + 3 \geq 5$ esetén egy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ ciklikus politópra $\mathrm{Sym}(P) = D_n$, akkor P és $C_d(n)$ homotetikusak?

Köszönöm a figyelmet!

És az utolsó ...

Kérdés

Igaz, hogy ha valamilyen $n \geq d + 3 \geq 5$ esetén egy $P \in \mathcal{P}_d(n)$ ciklikus politópra $\mathrm{Sym}(P) = D_n$*, akkor P és $C_d(n)$ homotetikusak?*

Köszönöm a figyelmet!