NÉHÁNY MEGJEGYZÉS EGY (R^n, F) MINKOWSKI TÉRRŐL
(Some remarks on a Minkowski space (R^n, F))

Tran Quoc Binh

Debreceni Egyetem, Magyarország

Szegedi Geometria Nap
Szeged, 2014. Május 22

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS EGY (R^n, F) MINKOWSKI TÉRRŐL

Összefoglaló

Vizsgálatunk tárgya egy teljes és totálisan umbilikus hiperfelület egy $(\hat{R}^n, \hat{g})$ Riemann-térben, melynek a $\hat{g}$ Riemann metrikája egy F Minkowszki-normából származik. Az előadás célja felvázolni részben pozitív válaszokat a következő két kérdésre: 1) A teljes és totálisan umbilikus hiperfelelület mikor izometrikus a közönséges Euklideszi gömbbel? 2) Az F Minkowski norma milyen feltételek mellett származik egy közönséges Euklideszi belsőszorzatból?

Some remarks on a Minkowski space (R^n, F))

Abstract

We consider a complete, totally umbilical hypersurface M of Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ induced by a Minkowski space (R^n, F). Under certain conditions we prove that M is isometric to a "round" hypersphere of the $(n+1)-$dimensional Euclidean space. We also prove that the Minkowski norm F must be arised from an inner product if there exist a non-zero constant vector field, which is parallel according to Levi-Civita connection of the metric tensor $\hat{g}$.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS EGY (R^n, F) MINKOWSKI TÉRRŐL

Finsler metrikus függvény

Tekintsünk egy M differenciálható sokaságot és a TM tangens nyalábján értelmezett ún. Finsler metrikus F függvényt, mely nem negatív és kielégíti a következő 3 feltételt:

- Reguláris: $F(x, y)$ sima mindenütt, kivéve $y = 0$ helyeken.
- Pozitív homogén: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ fennáll minden $\lambda > 0$
- Szigorúan konvex: Az ún. metrikus tenzor $g_{ij} \doteq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ pozitív definit minden 0-tól különböző helyeken.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS EGY (R^n, F) MINKOWSKI TÉRRŐL

Finsler metrikus függvény

Finsler geometria alapja egy F Finsler metrikus függvény, melynek segítségével definiáljuk a tetszőleges görbe hosszát, s ez által a sokaság geometriáját. Lokálisan, ha $c(t) = (x(t))$ egy görbe az M-en, akkor

$$L \doteq \int_a^b F(x(t), \dot{x}(t))dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t), \dot{x}(t))\dot{x}^i \dot{x}^j}\, dt$$

Finsler metrikus függvény

A homogenítás következménye:

$$g_{ij}(x,y)y^i y^j = F^2(x,y)$$

Finsler beső szorzat:

$$g(x,y)(U,V) = g_{ij}(x,y)U^i V^j, \forall U, V \in T_x M$$

A regularitásból:

ha $\forall V \in T_x M, g(x,y)(y,V) = g(x,z)(z,V)$, akkor $y = z$.

Finsler metrikus függvény

Minkowski

Minkowski tér: $F(x, y) = F(y)$

Riemann

Riemann tér: $F^2(x, y)$ kvadratikus, azaz, $g_{ij}(x, y)$ nem függ az y-tól.

Más szóval:

Riemann tér ha, $g_{ij}(x, y)$ egy belső szorzatot definiál a T_xM érintő téren.

Fő kérdés: Egy Finsler tér mikor Riemann?

Egy Finsler tér mikor Riemann?

Egy Finsler tér mikor Riemann?

Ez a kérdés egyenértékű a következő kérdéssel:

$\hat{R}^n = R^n - \{0\}$ tében egy $F(y)$ Minkowszki norma mikor származik egy belső szorzatból?

Deicke-Tétel

Legyen most F egy Minkowski norma az R^n-n. Tekintsük:

F Minkowski norma az R^n-n:

1. Metrikus tensor: $g_{ij}(y) \doteq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(y)}{\partial y^i \partial y^j}$
2. Cartan tenzor : $C_{ijk}(y) \doteq \frac{F}{4}\frac{\partial^3 F^2(y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$
3. Cartan közép tenzor: $A_k(y) = g^{ij}(y)C_{ijk}(y)$

Ekkor, $g_{ij}(y)$ egy Riemann metrikát definiál az $\hat{R}^n = R^n - \{0\}$:

A Riemann tér $(\hat{R}^n, \hat{g})$

$$\hat{g} = g_{ij}(y)dy^i dy^j$$

F Minkowszki norma az R^n-n:

Deicke-Tétel: $\hat{g}$ mikor egy belső szorzat?

A következő állítások ekvivalensek:

1. Metrikus tensor: $g_{ij} = const., \forall i, j$, azaz $\hat{g}$ egy belső szorzat.
2. Cartan tenzor : $C_{ijk} = 0, \forall i, j, k$
3. Determináns: $det(g_{ij}) = const.$
4. Cartan közép tenzor: $A_k = 0, \forall k$

Deicke-Tétel

Deicke tétele nagyon híres a Finsler geometiában részben a fontossága miatt, részben a gyönyörű bizonyítása miatt. Bizonyításához felhasználta a következőket:

- $\hat{g}$ Riemann metrikus tenzor Laplace operátora: $\Delta_{\hat{g}}$
- $\dot{g}$ Riemann metrikus tenzor Laplace operátora: $\Delta_{\dot{g}}$, ahol $\dot{g}$ a $\hat{g}$ által indukált metrikus tenzor az $S(r) \doteq F^{-1}(r)$ indikátrixon.
- A Hopf nevéhez fűződő Szigorú maximum elv (Strong maximun principle due to Hopf)

Indulópontunk: $(R^n, \langle , \rangle)$

Az $(R^n, \langle , \rangle)$ Euklideszi térben jól tudjuk, hogy minden teljes és totálisan umbilikus hiperfelület egy közönséges gömb és fordítva. Továbbá minden const. vektormező párhuzamos a belsőszorzathoz tartozó Levi-Civita konnexióra nézve.

Indulópontunk: $(R^n, \langle , \rangle)$

Az $(R^n, \langle , \rangle)$ Euklideszi térben jól tudjuk, hogy minden teljes és totálisan umbilikus hiperfelület egy közönséges gömb és fordítva. Továbbá minden const. vektormező párhuzamos a belsőszorzathoz tartozó Levi-Civita konnexióra nézve.

Kérdések:

1. Adott egy $F(y)$ Minkowski norma esetén, milyen feltételek mellett az $(\hat{R}^n, \hat{g})$ Riemann tér minden teljes és totálisan umbilikus hiperfelülete izometrikus egy közönséges gömbbel?
2. Mit mondhatunk az $F(y)$ Minkowszki normáról, ha létezik egy const. vektormező, mely párhuzamos a $\hat{g}$ metrikus tenzorhoz tartozó Levi-Civita konnexióra nézve?

Fő eredmények

1. Tétel:

Theorem 1. Let M be a proper totally umbilical hypersurface of a Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ induced by a Minkowski space (R^n, F) and let M be no level set $S(r) \doteq \{y | F(y) = r,\ r > 0\}$ Suppose that the normal part of $R(X, Y)Z,\ X, Y, Z \in X(M)$ vanishes,i.e. $(R(X; Y)Z)^{\perp} = 0$ Then M must be isometric to a "round" hypersphere of the n-dimensional Euclidean space.

Fő eredmények

1. Tétel:

Theorem 1. Let M be a proper totally umbilical hypersurface of a Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ induced by a Minkowski space (R^n, F) and let M be no level set $S(r) \doteq \{y | F(y) = r,\ r > 0\}$ Suppose that the normal part of $R(X, Y)Z,\ X, Y, Z \in X(M)$ vanishes,i.e. $(R(X; Y)Z)^{\perp} = 0$ Then M must be isometric to a "round" hypersphere of the n-dimensional Euclidean space.

2. Tétel:

Theorem 2. Let $(\hat{R}^n, \hat{g})$ be a Riemannian space induced by a Minkowski space (R^n, F). If $n \geq 3$ and F is absolutely homogeneous, then F is arised from an inner product if and only if there exists a non-zero constant vector field b which is parallel according to the Levi-civita connection $\hat{\nabla}$ of $\hat{g}$, that is if $\hat{\nabla}_X b = 0$.

Bizonyitások/ The proofs

Szükségünk lesz a következő eredményekre:

Állítás (Bao-Chern-She's book, Prop. 14.6.1, p. 401)

The sectional curvature $K(U,V)$ of a level hypersurface $S(r)$ is related to the sectional curvature $\hat{K}(U,V)$ of $(\hat{R}^n, \hat{g})$ by
$K(U,V) = \hat{K}(U,V) + \frac{1}{r^2}$
and the following statemants are equivalent:
(a) The Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ is flat.
(b) For any $r > 0$, the level hypersurface $S(r)$ has constant sectional curvature $\frac{1}{r^2}$
(c) For some $r_0 > 0$, the level hypersurface $S(r_0)$ has constant sectional curvature $\frac{1}{r_0^2}$

Brickel-Tétel:

Let (R^n, F) be a Minkowski space. If $n \geq 3$, F is absolutely homogeneous of degree 1 and the Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ is flat, then F must be the norm of an inner product on R^n.

Obata-Tétel

In order for a complete Riemannian manifold of dimesion $n \geq 2$ to admit a non-constant function φ with $\nabla_X d\varphi + c^2\varphi X = 0$ for any vector filed X, it is necessary and sufficient that the manifold be isometric with a sphere $S^n(c)$ of radius $\frac{1}{c}$ in the $(n+1)$-Euclidean space.

Az 1. Tétel bizonyitása

For the totally umbilical hypesurface M of Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ the Gauss equation is

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

where h is the second fundamental form. In our case (M, g) is a proper totally umbilical hypersurface. So we have

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + Hg(X, Y)\nu,$$

where H and ν denote the mean curvature and the unit normal vector field of the hypersurface M and $H \neq 0$. We choose the unit normal vector ν in such a way that the mean curvatute H takes positive value somewhere on M. From the identity $g_{ij}(y)y^i y^j = F^2(y)$ it follows that $\frac{y}{F(y)}$ is the unit normal vector field of the level hypersurface $S(r)$.

Az 1. Tétel bizonyitása

Since $F^2(y)$ is positive homogenous of degree 2, the functions $g_{ij}(y)$ are positive homogenous of degree 1, from (2.2) we have

$$\hat{\gamma}^k_{ij}(y)y^j = C^k_{ij}(y)y^j = 0,$$

from which we obtain

$$\hat{\nabla}_X y = X, \ \forall X \in \mathfrak{X}(\hat{R}^n).$$

Az 1. Tétel bizonyitása

Let us define a function $f(y) := \hat{g}(y, \nu)$ on M. Since M is not a level set, the function f is non-constant. For, if $f(y)$ is constant, then for any vector field X on M, we have
$0 = X(\hat{g}(y, \nu)) = \hat{g}(\hat{\nabla}_X y, \nu) + \hat{g}(\hat{\nabla}_X \nu, y) =$
$\hat{g}(X, \nu) + \hat{g}(y, -HX) = -H\hat{g}(y, X)$,
from which $X(F^2(y)) = X(\hat{g}(y, y)) = 2\hat{g}(\nabla_X y, y) = \hat{g}(X, y) = 0$.
This means $F(y) = constant$. Its contradiction to the fact that M is not a level set.

Az 1. Tétel bizonyitása

Now we compute the gradient, ∇f of a function f in M. We have

$$X(f) = X\hat{g}(y,\nu) = \hat{g}(\hat{\nabla}_X y, \nu) + g(y, \hat{\nabla}_Y \nu)$$

$$= \hat{g}(X,\nu) + \hat{g}(y, -HX) = -H\hat{g}(y,X) = -H\hat{g}(y^T, X) = -Hg(y^T, X),$$

where $y^T := y - \hat{g}(y,\nu)\nu$ is the tangential part to M of y. From $X(f) = g(X, \nabla f)$, it follows

$$\nabla f = -Hy^\top.$$

Az 1. Tétel bizonyitása

Now, we prove that under our assumptions the mean curvature H is constant. Recall the Ricci equation from the geometry of submanifold

$$(\hat{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla h)(X,Y,Z) - (\nabla h)(Y,X,Z),$$

where

$$(\nabla h)(Y,X,Z) := \nabla^{\perp}_{X} h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z).$$

Az 1. Tétel bizonyitása

At any $y \in M$ we can choose a local normal coordinate system such that $\nabla_X Y(y) = \nabla_Y X(y) = 0$. Then we obtain

$$\nabla^{\perp}_Y H\hat{g}(X, Z)\nu = \nabla^{\perp}_X H\hat{g}(Y, Z)\nu.$$

Choose the unit vector fields X, Y, Z such that $X = Z$ and orthogonal to Y. Then we have $\nabla^{\perp}_Y H\nu = 0$, from which it follows that $Y(H) = 0$, for any tangent vector $Y \in T_y M$. This means the mean curvature H is constant.

Az 1. Tétel bizonyitása

Now,

$$\nabla_X \nabla f = (\hat{\nabla}_X \nabla f)^\top = -H(\hat{\nabla}_X y^\top)^\top =$$

$$= -H\hat{\nabla}_X(y - \hat{g}(y,\nu)\nu) = -H\{X + \hat{g}(y,\nu)HX\} = -H^2(\frac{1}{H} + f(y))X.$$

Az 1. Tétel bizonyitása

Let's define $\tilde{f}(y) := f(y) + \frac{1}{H}$. Then we have

$$\nabla_X \nabla \tilde{f} + H^2 \tilde{f} X = 0.$$

From the theorem of Obata it follows that the totally umbilical hypersurface M is isometric to a round sphere $S^n(c)$ of radius $\frac{1}{H}$ in the $(n+1)$-Euclidean space.$\square$

Megjegyzés/Remark

We know that the level hypersphere $S^n(r)$ is totally umbilical with unit normal vector field $\frac{y}{r}$ at any $y \in S^n(r)$. It is easy to show that the converse is also true. For, if $\nu = \frac{y}{F(y)}$ is a unit normal vector field at a point y of a totally umbilical hypersurface M, then for any tangent vector field X, we have

$$0 = X\hat{g}(\nu,\nu) = X\hat{g}(\frac{y}{F(y)}, \frac{y}{F(y)}) = 2\hat{g}(X(\frac{1}{F})y + \frac{y}{F(y)}X, y) = 2X(\frac{1}{F})F^2($$

Since M is a submanifold of $\hat{R}^n$, $F(y) > 0$ for any $y \in M$, thus $X(\frac{1}{F}) = 0$, and we obtain $F(y) = r =$ constant, M is nothing but the level set $S(r)$.

Az 2. Tétel bizonyitása

We suppose that b is a non-constant vector filed, which is parallel according to the Levi-Civita connection $\hat{\nabla}$ of a Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ i. e. $\hat{\nabla} b = 0$. We consider the level set $S(1) := \{y \in \hat{R}^n : F(y) = 1\}$, and we show that $S(1)$ is a hypersurface of $(\hat{R}^n, \hat{g})$ whose sectional curvature is constant 1. Then, by Theorem 3. the Riemannian space $(\hat{R}^n, \hat{g})$ is flat and then according to Theorem 4. F must be a norm induced by an inner product on R^n.

Az 2. Tétel bizonyitása

Let us define $f(y) := \hat{g}(y, b)$. For any tangent vector field X on $S(1)$ we have

$$X(f) = X\hat{g}(y, b) = \hat{g}(\hat{\nabla}_X y, b) - \hat{g}(\hat{\nabla}_X b) =$$

$$= \hat{g}(X, b) = \hat{g}(X, b^{\top)}.$$

Thus, we obtain the gardient of the function f on $S(1)$,

$$\nabla f = b^{\top} = b - \hat{g}(b, y)y.$$

Az 2. Tétel bizonyitása

Now,

$$\nabla_X \nabla f = (\hat{\nabla}_Y \nabla f)^\top = (\hat{\nabla}_Y (b - \hat{g}(b,y)y))^\top =$$

$$= \{-X\hat{g}(b,y)y - \hat{g}(b,y)\hat{\nabla}_Y y\}^\top = -f(y)X.$$

That is

$$\nabla_X \nabla f + f(y)X = 0.$$

Since b is constant vector field its easy to see that $f(y)$ is non-constant function on $S(1)$. From the Obata's theorem, it follows that $S(1)$ is isometric to the round sphere of radius 1, and thus its sectional curvature is also constant 1. This completes the proof of Theorem 2. $\square$

Hivatkozások/References

- D. Bao, S.S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemannian-Finsler geometry, GTM 200, Springer-Verlag, 2000.
- B. Y. Chen, Extrinsic spheres in Kaehler manifolds, Michigan Math. J., 23 (1976), 327-330.
- B. Bidabad, Obata theorem on compact Finsler spaces, Balkan J. Geom. Appl. 17 (2012), no. 2, 1–5.
- X. Cheng and J. Yan, Some properties of submanifolds in a Minkowski space, Journal of Mathematics, 20(1) (2000),17-22.
- F. Brickell, A new proof of Deicke's theorem on homogeneous functions, Proc. AMS 16 (1965), 190-191.
- F. Brickell, A theorem on homogeneous functions, J. London Math. Soc. 42 (1967), 325-329.

Hivatkozások/References

- A Kawaguchi, On the theory of non-linear connection II. Theory of Minkowski spaces and of non-linear connections in a Finsler space, Tensor,N.S. 6 (1965), 165-199.
- S. Kikuchi, Theory of Minkowski space and of non-linear connections in Finsler space, Tensor, N.S. 6 (1962), 47-60.
- J. Li, Umbilical hypersurfaces of Minkowski spaces, Math. Commun. 17(2012), 63-70.
- M. Obata , Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Japan, Vol. 14, No. 3 (1962), 333-340.
- Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, World Sci., 2001, Singapore.

Köszönöm szépen a figyelmet!