

Erdős-Szekeres-típusú tételek konvex lemezekre

Fejes Tóth Gábor, Rényi Intézet

$f(n)$ a legkisebb természetes szám, amelyre teljesül, hogy bármely $f(n)$ általános helyzetű pont között a síkon van n , amelyek egy konvex sokszög csúcsai.

$$2^{n-2} \leq f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 1$$

Az alsó korlátot Erdős és Szekeres, a felső korlátot Tóth Géza és Pavel Valtr bizonyította.

Sejtés: $f(n) = 2^{n-2}$.

Ismert, hogy $f(4) = 5$, $f(5) = 9$, $f(6) = 17$.

Konvex lemezek egy $\mathcal{F}$ családja konvex helyzetben van, ha semelyik lemez nincs a többi konvex burkában.

Tétel (Bisztriczky és FTG 1989). *Minden $n \geq 3$ egész számhoz van egy legkisebb $g(n)$ természetes szám amelyre teljesül, hogy páronként diszjunkt konvex lemezek minden olyan $g(n)$ elemű családjában, amelyben bármely három elem konvex helyzetben van, található n lemez, amelyek konvex helyzetben vannak.*

Sejtés: $g(n) = f(n)$.

Ismert, hogy $g(4) = 5$, $g(5) = 9$, $g(6) = 17$.

Dobbins, Holsen és Hubbard (2013) belátták, hogy

$$g(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 1.$$

Az a feltétel, hogy a lemezek páronként diszjunktak lényeges, de kis mértékben enyhíthető. Pach János és Tóth Géza (1998) belátták, hogy a tétel igaz marad, ha csak azt tesszük fel, hogy a lemezek nem keresztezik egymást.

Két diszjunkt konvex lemezhez pontosan két közös támaszegyenes húzható, amely a két lemez konvex burkának is támaszegyenesese. Ezzel a tulajdonsággal rendelkezik két olyan lemez is, amelyek nem keresztezik egymást.

Konvex lemezek egy családja rendelkezik a T^* tulajdonsággal, ha a család bármely két eleméhez van olyan egyenes, amely metszi őket, de elkerüli a család minden más elemét.

Tétel (Bisztriczky és FTG 2014). *Minden $n \geq 3$ egész számhoz van egy legkisebb $t(n)$ természetes szám amelyre teljesül, hogy konvex lemezek minden olyan $t(n)$ elemű családjában, amely rendelkezik a T^* tulajdonsággal, található n lemez, amelyek konvex helyzetben vannak.*

1. Segédteétel. *Konvex lemezek bármely öt T^* tulajdonságú családjában van három lemez, amely konvex helyzetben van.*

Ha $A \subset \text{conv}(B \cup C)$, akkor bármely A -t metsző egyenes, amely nem metszi sem B -t sem C -t szeparálja B -t és C -t.

Tegyük fel, hogy $\{B_1, \dots, B_5\}$ konvex lemezek T^* tulajdonságú családja, amelyben nincs három lemez konvex helyzetben. Feltesszük, hogy

$$\begin{aligned} \text{conv}(B_1 \cup B_5) \supset \text{conv}(B_2 \cup B_5) \supset \\ \text{conv}(B_3 \cup B_5) \supset \text{conv}(B_4 \cup B_5). \end{aligned}$$

Legyen l_{ij} egy olyan egyenes, amely metszi B_i -t és B_j -t, és nem metszi a család más elemét.

Mivel $B_3 \subset \text{conv}(B_1 \cup B_5)$ és $B_3 \subset \text{conv}(B_2 \cup B_5)$, azért l_{34} elválasztja B_1 -et és B_5 -öt, továbbá B_2 -et és B_5 -öt is. Tehát l_{34} nem metszi $\text{conv}(B_1 \cup B_2)$ -t, így

$$B_3 \not\subset \text{conv}(B_1 \cup B_2).$$

Tekintsük most az l_{24} egyenest. Mivel $B_2 \subset \text{conv}(B_1 \cup B_5)$ és $B_4 \subset \text{conv}(B_3 \cup B_5)$, azért l_{34} elválasztja B_1 -et és B_5 -öt, továbbá B_3 -et és B_5 -öt is. Ebből adódik, hogy

$$B_2 \not\subset \text{conv}(B_1 \cup B_3).$$

Nyilván

$$B_1 \not\subset \text{conv}(B_2 \cup B_3).$$

Tehát B_1 , B_2 és B_3 konvex helyzetben vannak.

2. Segédtétel. *Legyen $\mathcal{F} = \{B_0, B_1, \dots, B_n\}$ konvex lemezek T^* tulajdonságú családja, amelyre teljesül, hogy $B_0 \not\subset \text{conv}(\cup_{i=1}^n B_i)$ és $B_0 \cap B_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Akkor $\mathcal{F}$ elemei között van n , amelyek konvex helyzetben vannak.*

Megmutatjuk, hogy ha $\mathcal{F}$ -nek van két eleme, mondjuk B_1 és B_2 a $\text{conv}(\cup_{i=1}^n B_i)$ halmazban, akkor nem rendelkezik a T^* tulajdonsággal. Lehyen l olyan egyenes, amely metszi B_1 -et és B_2 -t, de nem metszi $\mathcal{F}$ más elemét, és tekintsük l -nek egy $p \in B_1$ és $q \in B_2$ pontját. Nyilván p és q a

$$\text{conv}(\cup_{i=1}^n B_i) \setminus \cup_{i=3}^n B_i$$

halmaznak ugyanabba a C komponensébe esik.

Sőt, C határa tartalmazza $\text{bd}(\text{conv}(\cup_{i=1}^n B_i))$ egy ívét, amelynek a és b végpontja $\mathcal{F} \setminus \{B_1, B_2\}$ két különböző eleméhez tartozik.

Legyen $a \in B_j$, $b \in B_k$, $c \in B_k \cap B_0$ és $d \in B_k \cap B_0$. Akkor l metszi az $abcd$ négyszög két oldalát, amelyik közül az egyik biztosan a B_0 , B_j , B_k lemezek valamelyikében van.

3. Segédteétel. *Konvex lemezek egy T^* tulajdonságú, nN elemű $\mathcal{F}$ családja tartalmaz vagy n elemet konvex helyzetben, vagy N páronként diszjunkt elemet.*

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ nem tartalmaz n konvex helyzetű elemet. Legyen $V_1 \in \mathcal{F}$ egy csúcsa, azaz egy olyan eleme, amely nincs benne a többi lemez konvex burkában. A 2. Segédteétel szerint $V_1 \in \mathcal{F}$ -nek legfeljebb $n - 1$ elemét metszi. Legyen $\mathcal{F}_1$ az a lemez-család, amelyet $\mathcal{F}$ -ből V_1 és az öt metsző elemek elhagyásával kapunk. Válasszunk most $\mathcal{F}_1$ -ből egy V_2 csúcsot és készítsük el V_2 -nek és az öt metsző lemezek elhagyásával az $\mathcal{F}_2$ családok. Az eljárást iterálhatjuk legalább N lépésben, amivel N páronként diszjunkt lemezt kapunk.

$R_k(n_1, n_2)$ az a legkisebb egész szám, amelyre bármely $R_k(n_1, n_2)$ elemű halmaz k -asait megszínezve két színnel, mondjuk pirosra és kékre van egy n_1 elemű részhalmaz, amelynek minden k -asa piros vagy egy n_2 elemű részhalmaz, amelynek minden k -asa kék.

Megmutatjuk, hogy

$$t(n) \leq R_3(ng(n), 5).$$

Legyen $\mathcal{F}$ konvex lemezek T^* tulajdonságú, $R_3(ng(n), 5)$ elemű családja. Színezzük meg $\mathcal{F}$ hármasait pirosra, ha konvex helyzetben vannak és kékre, ha nem. Az 1. Segédttétel miatt nincs $\mathcal{F}$ -nek 5 elemű részhalmaza, amelynek minden hármasa kék. Tehát $\mathcal{F}$ tartalmaz egy $ng(n)$ elemű $\mathcal{F}'$ részhalmazt, amelynek minden hármasa piros, azaz minden hármasa konvex helyzetben van. A 3. Segédttétel szerint $\mathcal{F}'$ tartalmaz n konvex helyzetben levő elemet, vagy $g(n)$ páronként diszjunkt elemet. $g(n)$ definíciója alapján ebben az esetben is van n konvex helyzetben levő lemez $\mathcal{F}$ -ben

Páronként diszjunkt lemezekre erősebb állítás igaz. Konvex lemezek egy $\mathcal{F}$ családja rendelkezik a $T^*(k)$ tulajdonsággal, ha bármely k elemű részhalmaza T^* tulajdonságú.

Tétel (Bisztriczky és FTG 2014). *Minden $n \geq 3$ egész számhoz van egy legkisebb $t_4(n)$ természetes szám amelyre teljesül, hogy páronként diszjunkt konvex lemezek minden olyan $t_4(n)$ elemű családjában, amely rendelkezik a $T^*(4)$ tulajdonsággal, található n lemez, amelyek konvex helyzetben vannak.*

4. Segédteétel. *Bármely 11 páronként diszjunkt konvex lemez $T^*(4)$ tulajdonságú családja tartalmaz három konvex helyzetben levő elemet.*

$$t_4(n) \leq R_3(g(n), 11).$$