

Konvex halmazok nemlineáris inverz képeinek szeparációjáról

Baják Szabolcs és Páles Zsolt

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

Kerékjártó Szeminárium, 2014. november 6.

NEW

SZÉCHENYI PLAN



Az előadás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Előzmények

A konvex halmazok szeparációjára vonatkozó két szeparációs tétel:

- A Hahn–Banach-féle elválasztási tétel
- A Dubovickij–Miljutyin-féle szeparációs tétel.

Ezek az eredmények kulcsfontosságúak a feltételes szélsőérték problémákra vonatkozó Lagrange-elv, vagy Karush–Kuhn–Tucker típusú tételek levezetésében.

A Hahn–Banach-féle elválasztási tétel [BS00, Hol75, IT79]

Legyen X egy lokálisan konvex tér, $K_0 \subseteq X$ egy nemüres konvex és $K_1 \subseteq X$ egy olyan konvex halmaz amelynek belseje nemüres. Ha

$$K_0 \cap K_1 = \emptyset,$$

akkor létezik olyan $x^* \in X^*$ nemnulla folytonos lineáris funkcionál, hogy

$$\sup \{x^*(x) \mid x \in K_0\} \leq \inf \{x^*(x) \mid x \in K_1\}.$$

Előzmények

A Dubovickij–Miljutyin-féle szeparációs tétel [DM63]

Legyen X egy lokálisan konvex tér, $K_0 \subseteq X$ egy nemüres konvex halmaz és $K_1, \dots, K_n \subseteq X$ olyan konvex halmazok amelyek belseje nemüres. Ha

$$K_0 \cap K_1 \cap \dots \cap K_n = \emptyset,$$

akkor léteznek olyan $x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ nem mind azonosan nulla folytonos lineáris funkcionálok, hogy

$$x_0^* + x_1^* + \dots + x_n^* = 0$$

és

$$\delta^*(x_0^* \mid K_0) + \dots + \delta^*(x_n^* \mid K_n) \leq 0,$$

Itt δ^* a tartófunkcionált jelöli, amelyet az alábbi képlet definiálunk:

$$\delta^*(x^* \mid K) := \sup \{x^*(x) \mid x \in K\}$$

ha $x^* \in X^*$ és $K \subseteq X$.



Pontok approximációja és az approximáció szerinti derivált

A fő eredményeink megfogalmazásához szükségünk lesz az alábbi fogalmakra. [Pá05, Pá06].

Definíció

Rögzített $p \in X$ pont esetén egy $\alpha = (x_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot (ahol $x_k \in X$ és $t_k > 0$) a **p pont approximációjának** nevezzük, ha $x_k \rightarrow p$ és $t_k \rightarrow 0$ amennyiben $k \rightarrow \infty$.

Egy normált térbeli értékű, a p pont egy környezetében értelmezett φ függvényt az **α approximáció szerint differenciálhatónak** mondunk, ha létezik az alábbi határérték:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(p)}{t_k} =: D_\alpha \varphi(p).$$

Vegyük észre, hogy ha $\alpha = (p, t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ alakú, akkor bármely φ automatikusan differenciálható α szerint és $D_\alpha \varphi(p) = 0$.



Két variáció fogalom

Megengedett és érintő variációk (cf. [Pá05, Pá06])

Legyen $\alpha = (x_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a p pont egy approximációja, $H \subseteq X$ nemüres és $p \in \overline{H}$. Ekkor a **H halmaz p -beli (Dubovickij–Miljutyin típusú) α -megengedett variációinak halmaza:**

$$\mathcal{DM}_\alpha(H) := \{v \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : x_k + t_k u \in H, \text{ ha } t_k < \varepsilon, \|u - v\| < \varepsilon\},$$

a **H halmaz p -beli (Bouligand típusú) α -érintő variációinak halmaza:**

$$\mathcal{T}_\alpha(H) := \{v \in X \mid \exists v_k \rightarrow v : x_k + t_k v_k \in H \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N}\text{-re}\}.$$

$\mathcal{DM}_\alpha(H)$ mindig nyílt és $\mathcal{DM}_\alpha(H) = \mathcal{DM}_\alpha(H^\circ)$.

$\mathcal{T}_\alpha(H)$ mindig zárt és $\mathcal{T}_\alpha(H) = \mathcal{T}_\alpha(\overline{H})$. Továbbá

$$\mathcal{DM}_\alpha(X \setminus H) = X \setminus \mathcal{T}_\alpha(H), \quad (H \subseteq X, p \in \overline{H}).$$



Egy diszjunktsági tétel

Tétel

Legyenek $H_0, H_1, \dots, H_n \subseteq X$ olyan nemüres halmazok, amelyek p -ben érintkeznek, de p -ben lokálisan diszjunktak, azaz

$$p \in \overline{H_0} \cap \overline{H_1} \cap \dots \cap \overline{H_n}.$$

és létezik p -nek egy olyan $U \subseteq X$ környezete, hogy

$$U \cap H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset.$$

Ekkor p pont minden α approximációja esetén

$$\mathcal{T}_\alpha(H_0) \cap \mathcal{DM}_\alpha(H_1) \cap \dots \cap \mathcal{DM}_\alpha(H_n) = \emptyset.$$

Bizonyítás

Legyen $\alpha = (x_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a p pont egy approximációja és U a p pont olyan környezete, hogy $U \cap H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$. Tegyük fel, hogy

$$v \in \mathcal{T}_\alpha(H_0) \cap \mathcal{DM}_\alpha(H_1) \cap \dots \cap \mathcal{DM}_\alpha(H_n).$$

Ekkor létezik egy $v_k \rightarrow v$ sorozat, hogy

$$x_k + t_k v_k \in H_0 \quad \text{végtelen sok } k \in \mathbb{N}\text{-re,}$$

továbbá létezik $\varepsilon > 0$, hogy

$$x_k + t_k u \in H_1 \cap \dots \cap H_n, \quad \text{ha } t_k < \varepsilon, \quad \|u - v\| < \varepsilon.$$

Legyen k olyan (nagy), hogy

$$x_k + t_k v_k \in U, \quad x_k + t_k v_k \in H_0 \quad t_k < \varepsilon, \quad \|v_k - v\| < \varepsilon$$

teljesül. Ekkor $x_k + t_k v_k \in H_1 \cap \dots \cap H_n$ is érvényes, ami ellentmond annak, hogy $U \cap H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$.

A megengedett variációk kiszámítása

Tétel

Legyen $Q \subseteq Y$ egy nemüres belsejű konvex halmaz, $D \subseteq X$ nyílt, $p \in D$ és $F : D \rightarrow Y$ szigorúan Gâteaux-differenciálható és lokálisan Lipschitz p -ben.

Legyen α a p pont egy approximációja és tegyük fel, hogy F differenciálható α szerint. Ha $F(p) \in \overline{Q}$, akkor

$$\mathcal{DM}_\alpha(F^{-1}(Q)) \supseteq (F'(p))^{-1}(-D_\alpha F(p) + \text{cone}(Q^\circ - F(p))),$$

és a fenti tartalmazás jobboldalán álló halmaz nyílt és konvex. Ha ez a halmaz nemüres, akkor $p \in \overline{F^{-1}(Q)}$ és egyenlőség teljesül.



A megengedett variációk halmazán felülről korlátos lineáris funkcionálok

Tétel

Legyenek X és Y normál terek, $A : X \rightarrow Y$ korlátos lineáris operátor, $K \subset Y$ nemüres nyílt konvex kúp, $y \in Y$ és $x^* \in X^*$.

Tegyük fel, hogy $A^{-1}(y + K) \neq \emptyset$ és $C := \delta^*(x^* \mid A^{-1}(y + K))$ véges. Ekkor létezik egy olyan $y^* \in K^* := \{y^* \in Y^* \mid \sup_K y^* = 0\}$, hogy $x^* = y^* \circ A$ és

$$\delta^*(x^* \mid A^{-1}(y + K)) = y^*(y).$$

Bizonyítás-vázlat

Tekintsük az $Y \times \mathbb{R}$ szorzattérben a

$$L := \{(A(x), x^*(x)) \mid x \in X\} \quad \text{és} \quad M := (y + K) \times]C, \infty[$$

halmazokat. Ezek konvexek, diszjunktak és M nyílt is. Ezért a Hahn–Banach szeparációs tétellel elválaszthatók.

Az érintő variációk kiszámítása

Tétel

Legyen $Q \subseteq Y$ konvex és legyen $F : D \subseteq X \rightarrow Y$ szigorúan Gâteaux-differenciálható és lokálisan Lipschitz p -ben és $F(p) \in Q$. Legyen α a p pont egy approximációja és tegyük fel, hogy F differenciálható α szerint. Ekkor

$$\mathcal{T}_\alpha(F^{-1}(Q)) \subseteq (F'(p))^{-1}(-D_\alpha F(p) + \overline{\text{cone}}(Q - F(p)))$$

és a tartalmazás jobboldalán álló halmaz zárt és konvex. Ha X és Y Banach-terek, F szigorúan Fréchet-differenciálható p -ben és az $F'(p)$ lineáris operátor szurjektív, akkor egyenlőség teljesül és a jobboldali halmaz nemüres.



Az érintő variációk halmazán felülről korlátos lineáris funkcionálok

Tétel

Legyenek X és Y Banach-terek, $A : X \rightarrow Y$ szurjektív korlátos lineáris operátor, $K \subset Y$ nemüres konvex kúp, $y \in Y$ és $x^* \in X^*$.

Tegyük fel, hogy $A^{-1}(y + K) \neq \emptyset$ és $C := \delta^*(x^* \mid A^{-1}(y + K))$ véges. Ekkor létezik egy olyan $y^* \in K^*$ hogy $x^* = y^* \circ A$ és

$$\delta^*(x^* \mid A^{-1}(y + K)) = y^*(y).$$

Bizonyítás-vázlat

Az A operátor szurjektívitasából következik, hogy $\text{Ker} A \subseteq \text{Ker} x^*$. Így, az ún. faktorizációs tétel szerint létezik olyan $y^* \in Y^*$, hogy $x^* = y^* \circ A$. Erről az y^* -ról belátható, hogy K^* -beli.

Fő eredmény

Tétel — Feltételek

Legyenek X, Y_0 Banach-terek és $Y_1, \dots, Y_n$ lineáris normált terek, $Q_0 \subseteq Y_0$ egy nemüres konvex és $Q_1 \subseteq Y_1, \dots, Q_n \subseteq Y_n$ nemüres belsejű konvex halmazok. Legyen továbbá $D \subseteq X$ egy nyílt halmaz, $p \in D$, $F_0 : D \rightarrow Y_0$ szigorúan Fréchet-differenciálható p -ben, $F_1 : D \rightarrow Y_1, \dots, F_n : D \rightarrow Y_n$ szigorúan Gâteaux-differenciálható és lokálisan Lipschitz p -ben, és tegyük fel hogy az $F'_0(p)$ derivált szurjektív lineáris leképezés. Ha

$$F_0(p) \in Q_0, \quad F_1(p) \in \overline{Q_1}, \quad \dots, \quad F_n(p) \in \overline{Q_n}$$

teljesül és a $\{F_0^{-1}(Q_0), F_1^{-1}(Q_1), \dots, F_n^{-1}(Q_n)\}$ rendszer lokálisan diszjunkt p -ben, azaz létezik egy olyan U környezete p -nek, hogy

$$U \cap F_0^{-1}(Q_0) \cap F_1^{-1}(Q_1) \cap \dots \cap F_n^{-1}(Q_n) = \emptyset,$$

Fő eredmény

Tétel — Állítások

akkor a p pont bármely olyan α approximációjára, amellyel $F_0, F_1, \dots, F_n$ differenciálható α szerint, léteznek olyan

$$y_0^* \in \mathcal{N}_{F_0(p)}(Q_0), \quad y_1^* \in \mathcal{N}_{F_1(p)}(Q_1), \quad \dots, \quad y_n^* \in \mathcal{N}_{F_n(p)}(Q_n),$$

nem mind azonosan nulla folytonos lineáris funkcionálok, hogy

$$y_0^* \circ F'_0(p) + y_1^* \circ F'_1(p) + \dots + y_n^* \circ F'_n(p) = 0$$

és

$$y_0^*(D_\alpha F_0(p)) + y_1^*(D_\alpha F_1(p)) + \dots + y_n^*(D_\alpha F_n(p)) \geq 0.$$

Itt egy $Q \subseteq Y$ nemüres konvex halmaz esetén,

$$\mathcal{N}_p(Q) := \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) \leq y^*(p) \text{ minden } y \in Q\text{-ra}\}.$$



Egy alkalmazás

Lagrange-elv — Feltételek

Legyenek X és Y_0 Banach-terek, $Y_1, \dots, Y_n$ lineáris normált terek, $D \subseteq X$ nyílt, $p \in D$, és $F_0 : D \rightarrow Y_0, F_1 : D \rightarrow Y_1, \dots, F_n : D \rightarrow Y_n, F : D \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $Q_1 \subseteq Y_1, \dots, Q_n \subseteq Y_n$ nemüres belsejű konvex halmazok, $F_1, \dots, F_n, F$ lokálisan Lipschitz és szigorúan Gâteaux-differenciálható p -ben, F_0 szigorúan Fréchet-differenciálható p -ben és $F'_0(p)(X)$ az Y_0 tér zárt altere. Legyen továbbá α a p pont egy olyan approximációja, hogy $F_0, F_1, \dots, F_n, F$ differenciálható α szerint. Tegyük fel, hogy a p pont feltételes lokális minimum helye az F függvénynek a

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) \in Q_1, \quad \dots, \quad F_n(x) \in Q_n$$

korlátozások mellett.

Egy alkalmazás

Lagrange-elv — Állítások

Ekkor léteznek olyan nem mind azonosan nulla

$$y_0^* \in Y_0^*, \quad y_1^* \in \mathcal{N}_{F_1(p)}(Q_1), \quad \dots, \quad y_n^* \in \mathcal{N}_{F_n(p)}(Q_n),$$

lineáris funkcionálok és egy $\lambda \geq 0$ konstans, hogy

$$y_0^* \circ F_0'(p) + y_1^* \circ F_1'(p) + \dots + y_n^* \circ F_n'(p) + \lambda F'(p) = 0$$

és

$$y_0^*(D_\alpha F_0(p)) + y_1^*(D_\alpha F_1(p)) + \dots + y_n^*(D_\alpha F_n(p)) + \lambda D_\alpha F(p) \geq 0.$$

Az approximáció speciális megválasztásával a lokális minimum standard első és másodrendű szükséges feltételei levezethetők. Vö. [BS00, BT80a, BT80b, BTZ82, Iof89, IT79, LMO78, PZ94, PZ96].



Bizonyítás

A tételben állított lineáris funkcionálok létezése nyilvánvaló, ha $F'_0(p)(X)$ valódi altere Y_0 -nak, mivel ekkor létezik olyan nemnulla lineáris funkcionál $y_0^* \in Y_0^*$ amely eltűnik ezen az altéren és amelyre $y_0^*(D_\alpha F_0(p)) \geq 0$. Ekkor a $y_1^* = 0, \dots, y_n^* = 0$ és $\lambda = 0$ választással teljesülnek a tétel állításai.

Így feltehetjük, hogy $F'_0(p) : X \rightarrow Y_0$ szurjektív lineáris leképezés. Ahhoz, hogy alkalmazzuk a fő eredményünket legyen $Q_0 \subseteq Y$ és $Q \subseteq \mathbb{R}$ az alábbiak szerint:

$$Q_0 := \{0\}, \quad Q :=] - \infty, F(p)[.$$

Mivel p megengedett a minimum feladatra nézve, azaz $x = p$ -re teljesülnek a korlátozások így

$$F_0(p) \in Q_0, \quad F_1(p) \in Q_1, \quad \dots, \quad F_n(p) \in Q_n$$

és nyilvánvalóan $F(p) \in \overline{Q}$.

Bizonyítás

Mivel p az F függvény feltételes lokális minimumhelye, ezért létezik olyan U környezete p -nek, hogy minden megengedett $x \in U$, esetén $F(x) \geq F(p)$. Ez azt jelenti, hogy $x \notin F^{-1}(Q)$, ezért

$$U \cap F_0^{-1}(Q_0) \cap \cdots \cap F_n^{-1}(Q_n) \cap F^{-1}(Q) = \emptyset.$$

A fő eredménynek köszönhetően léteznek olyan nem mind azonosan nulla lineáris funkcionálok, hogy

$$y_0^* \in \mathcal{N}_{F_0(p)}(Q_0), \quad y_1^* \in \mathcal{N}_{F_1(p)}(Q_1), \quad \dots, \quad y_n^* \in \mathcal{N}_{F_n(p)}(Q_n),$$

$$y_0^* \circ F'_0(p) + y_1^* \circ F'_1(p) + \cdots + y_n^* \circ F'_n(p) + y^* \circ F'(p) = 0$$

és

$$y_0^*(D_\alpha F_0(p)) + y_1^*(D_\alpha F_1(p)) + \cdots + y_n^*(D_\alpha F_n(p)) + y^*(D_\alpha F(p)) \geq 0.$$

Innen pedig a Lagrange-elv állításai következnek.



Sz. Baják and Zs. Páles.

Separation theorem for non-linear inverse images of convex sets.
Acta Math. Hungar., 124:125–144, 2009.



J. F. Bonnans and A. Shapiro.

Perturbation Analysis of Optimization Problems.
Springer Series in Operations Research. Springer, Berlin, 2000.



A. Ben-Tal.

Second-order and related extremality conditions in nonlinear programming.

J. Optim. Theory Appl., 31(2):143–165, 1980.



A. Ben-Tal.

Second order theory of extremum problems.

In V. Fiacco and K. Kortanek, editors, *Extremal methods and systems analysis (Internat. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., 1977)*, volume 174 of *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, pages 336–356. Springer, Berlin, 1980.



A. Ben-Tal and J. Zowe.



A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces.

Math. Programming Stud., (19):39–76, 1982.

Optimality and stability in mathematical programming.



A. Ya. Dubovitskii and A. A. Milyutin.

Extremum problems with constraints.

Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 149(4):759–762, 1963.

(In Russian).



R. B. Holmes.

Geometric Functional Analysis and its Applications, volume 24 of *Graduate Texts in Mathematics*.

Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.



A. D. Ioffe.

On some recent developments in the theory of second order optimality conditions.

In Sz. Dolecki, editor, *Optimization (Varetz, 1988)*, volume 1405 of *Lecture Notes in Math.*, pages 55–68. Springer, Berlin, 1989.





A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov.
Theory of Extremal Problems.
North-Holland, Amsterdam, 1979.



E. S. Levitin, A. A. Milyutin, and N. P. Osmolovskii.
Higher order conditions for local minima in problems with constraints.
Uspekhi Mat. Nauk, 33(6(204)):85–148, 1978.



Zs. Páles and V. Zeidan.
Nonsmooth optimum problems with constraints.
SIAM J. Control Optim., 32(5):1476–1502, 1994.



Zs. Páles and V. Zeidan.
Second order necessary conditions for nonsmooth optimum problems with constraints.
In *World Congress of Nonlinear Analysts '92, Vol. I–IV (Tampa, FL, 1992)*, page 2337–2346. de Gruyter, Berlin, 1996.



Zs. Páles.
Optimum problems with nonsmooth equality constraints.





Zs. Páles.

Abstract control problems with nonsmooth data.

In A. Seeger, editor, *Recent Advances in Optimization.*

Proceedings of the 12th French–German–Spanish Conference on Optimization, Avignon (2004), volume 563 of *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, page 205–216, Berlin–Heidelberg, 2006. Springer.

