

Lemniszkáták

Totik Vilmos

Szegedi Tudományegyetem

totik@math.u-szeged.hu

Kerékjártó szeminárium

$$C_1 := \{|z| = 1\}$$

$$C_1 := \{|z| = 1\}$$

Lemniszkáta: az egységkör teljes inverz képe egy polinom mellett

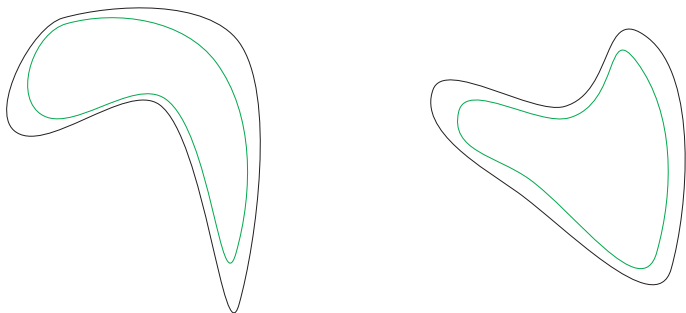
$$(T_N^{-1}(C_1) = \{z : |T_N(z)| = 1\})$$

Hilbert lemniszkáta-tétele

$$C_1 := \{|z| = 1\}$$

Lemniskáta: az egységkör teljes inverz képe egy polinom mellett

$$(T_N^{-1}(C_1) = \{z : |T_N(z)| = 1\})$$

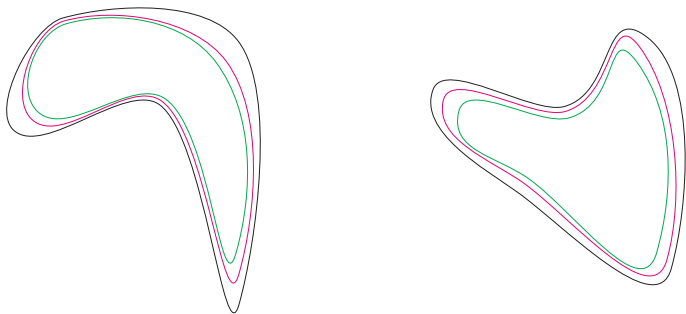


Hilbert lemniszkáta tétele

$$C_1 := \{|z| = 1\}$$

Lemniskáta: az egységkör teljes inverz képe egy polinom mellett

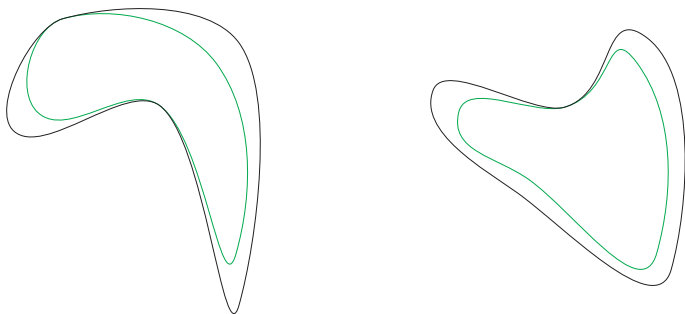
$$(T_N^{-1}(C_1) = \{z : |T_N(z)| = 1\})$$



Hilbert lemniszkáta-tételének élesített alakja

Hilbert lemniszkáta-tételének élesített alakja

A két görberendszer véges sok pontban érintheti egymást, csak az érintési pontokban különböznek legyenek a görbületek (Nagy-T.)



Hilbert lemniszkáta-tételének élesített alakja

A két görberendszer véges sok pontban érintheti egymást, csak az érintési pontokban különböznek legyenek a görbületek



Egyensúlyi mérték

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egyensúlyi mérték

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egységnyi töltést rakunk rá, egyensúlyban az eloszlása μ_E

Egyensúlyi mérték

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egységnyi töltést rakunk rá, egyensúlyban az eloszlása μ_E

Ha E Jordan-görbékől és ívekből áll, akkor $d\mu_E(t) = \omega_E(t)ds(t)$

Egyensúlyi mérték

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egységnyi töltést rakunk rá, egyensúlyban az eloszlása μ_E

Ha E Jordan-görbékől és ívekből áll, akkor $d\mu_E(t) = \omega_E(t)ds(t)$

ω_E egyensúlyi sűrűség

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egységnyi töltést rakunk rá, egyensúlyban az eloszlása μ_E

Ha E Jordan-görbékől és ívekből áll, akkor $d\mu_E(t) = \omega_E(t)ds(t)$

ω_E egyensúlyi sűrűség

Példák:

$$\omega_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egységnyi töltést rakunk rá, egyensúlyban az eloszlása μ_E

Ha E Jordan-görbékől és ívekből áll, akkor $d\mu_E(t) = \omega_E(t)ds(t)$

ω_E egyensúlyi sűrűség

Példák:

$$\omega_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$$\omega_{C_1}(e^{it}) \equiv \frac{1}{2\pi}$$

Egyensúlyi mérték

$E \subset \mathbf{C}$ kompakt, vezető

Egységnyi töltést rakunk rá, egyensúlyban az eloszlása μ_E

Ha E Jordan-görbékől és ívekből áll, akkor $d\mu_E(t) = \omega_E(t)ds(t)$

ω_E egyensúlyi sűrűség

Példák:

$$\omega_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$$\omega_{C_1}(e^{it}) \equiv \frac{1}{2\pi}$$

Ha $E = T_N^{-1}(C_1)$, akkor

$$\omega_E(z) = \frac{|T'_N(z)|}{N2\pi}$$

The polinom-inverz-kép módszer

- Induljunk ki egy C_1 -en igaz eredményből

- Induljunk ki egy C_1 -en igaz eredményből
- Polinom-inverz képpel menjünk át lemniszkátákra. Így egy speciális eredményt kapunk

- Induljunk ki egy C_1 -en igaz eredményből
- Polinom-inverz képpel menjünk át lemniszkátákra. Így egy speciális eredményt kapunk (itt jelenhet meg egynél több komponens)

- Induljunk ki egy C_1 -en igaz eredményből
- Polinom-inverz képpel menjünk át lemniszkátákra. Így egy speciális eredményt kapunk (itt jelenhet meg egynél több komponens)
- Szabaduljunk meg az eredmény speciális voltától, még mindig lemniszkátán maradva

- Induljunk ki egy C_1 -en igaz eredményből
- Polinom-inverz képpel menjünk át lemniszkátákra. Így egy speciális eredményt kapunk (itt jelenhet meg egynél több komponens)
- Szabaduljunk meg az eredmény speciális voltától, még mindig lemniszkátán maradva
- Approximáljunk véges sok görbéből álló rendszereket lemniszkátákkal (Hilbert lemniszkáta-tételének élesített alakja)

A Riesz-egyenlőtlenség görberendszerekre

A Riesz-egyenlőtlenség görberendszerekre

Riesz Marcell (1914):

A Riesz-egyenlőtlenség görberendszerekre

Riesz Marcell (1914):

$$|P'_n(z)| \leq n \|P_n\|_{C_1}, \quad z \in C_1$$

A Riesz-egyenlőtlenség görberendszerekre

Riesz Marcell (1914):

$$|P'_n(z)| \leq n \|P_n\|_{C_1}, \quad z \in C_1$$

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$$

A Riesz-egyenlőtlenség görberendszerekre

Riesz Marcell (1914):

$$|P'_n(z)| \leq n \|P_n\|_{C_1}, \quad z \in C_1$$

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$$

Theorem

(Nagy-T.) Ha E véges sok C^2 Jordan görbéből áll, akkor

$$|P'_n(z)| \leq (1 + o(1)) n 2\pi \omega_E(z) \|P_n\|_E, \quad z \in E$$

A Riesz-egyenlőtlenség görberendszerekre

Riesz Marcell (1914):

$$|P'_n(z)| \leq n \|P_n\|_{C_1}, \quad z \in C_1$$

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|$$

Theorem

(Nagy-T.) Ha E véges sok C^2 Jordan görbéből áll, akkor

$$|P'_n(z)| \leq (1 + o(1)) n 2\pi \omega_E(z) \|P_n\|_E, \quad z \in E$$

Éles: Minden $z_0 \in E$ -re vannak olyan $P_n \neq 0$ polinomok, amelyekre

$$|P'_n(z_0)| > (1 - o(1)) n 2\pi \omega_E(z) \|P_n\|_E$$

Olyan valós halmaz, amely a $[-1, 1]$ intervallum teljes inverz képe polinomiális leképezés mellett: $\{z : |T_N(z)| \in [-1, 1]\}$

Olyan valós halmaz, amely a $[-1, 1]$ intervallum teljes inverz képe polinomiális leképezés mellett: $\{z : |T_N(z)| \in [-1, 1]\}$

$E \subset \mathbf{R}$, $E = T_N^{-1}[-1, 1]$, ahol $T_N(z) = a_N z^N + \dots$

Olyan valós halmaz, amely a $[-1, 1]$ intervallum teljes inverz képe polinomiális leképezés mellett: $\{z : |T_N(z)| \in [-1, 1]\}$

$E \subset \mathbf{R}$, $E = T_N^{-1}[-1, 1]$, ahol $T_N(z) = a_N z^N + \dots$

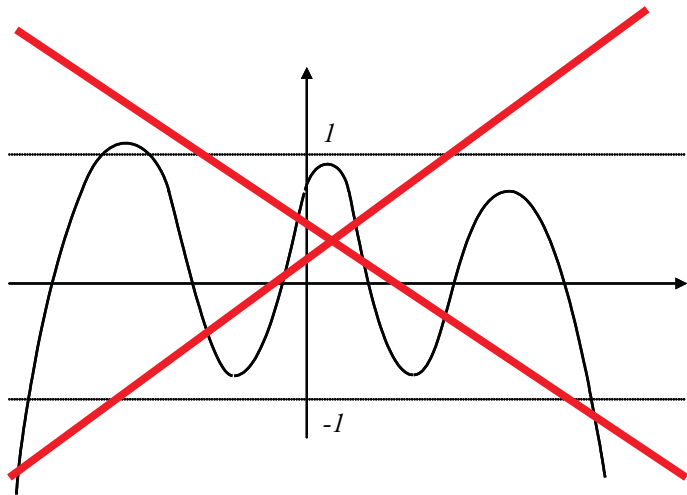
$T_N(x)$ értékei az E halmazon N -szer végigfutnak a $[-1, 1]$ intervallumon

Olyan valós halmaz, amely a $[-1, 1]$ intervallum teljes inverz képe polinomiális leképezés mellett: $\{z : |T_N(z)| \in [-1, 1]\}$

$E \subset \mathbf{R}$, $E = T_N^{-1}[-1, 1]$, ahol $T_N(z) = a_N z^N + \dots$

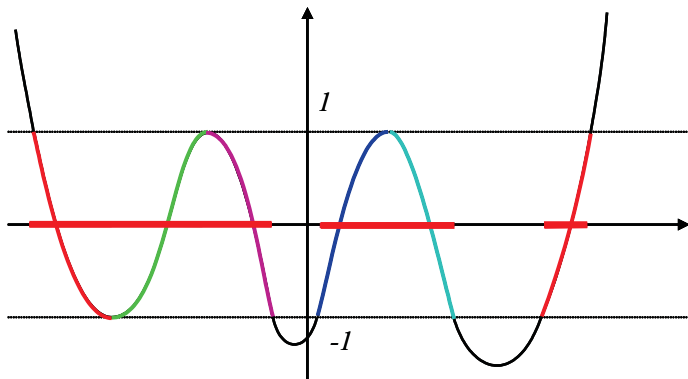
$T_N(x)$ értékei az E halmazon N -szer végigfutnak a $[-1, 1]$ intervallumon

T_N valós polinom, N zérushelye van, $N - 1$ lokális maximuma/minimuma, és ezek abszolút értékben ≥ 1



$E = T_N^{-1}[-1, 1]$ valahány $1 \leq l \leq N$ intervallumból áll

$E = T_N^{-1}[-1, 1]$ valahány $1 \leq l \leq N$ intervallumból áll



Ha $E = T_N^{-1}[-1, 1]$ valós lemniszkáta, akkor

$$\omega_E(t) = \frac{|T'_N(t)|}{N\pi\sqrt{1 - T_N^2(t)}}$$

Ha $E = T_N^{-1}[-1, 1]$ valós lemniszkáta, akkor

$$\omega_E(t) = \frac{|T'_N(t)|}{N\pi\sqrt{1 - T_N^2(t)}}$$

Egy $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ halmazra a következők ekvivalensek:

- $E = T_N^{-1}[-1, 1]$
- $\mu_E([a_j, b_j]) = p_j/N, j = 1, \dots, m$

Valós lemniszkáták sűrűsége

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Ezt újra és újra felfedezték:

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Ezt újra és újra felfedezték: Robinson 1960,

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Ezt újra és újra felfedezték: Robinson 1960, McKean–van Moerbeke 1980,

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Ezt újra és újra felfedezték: Robinson 1960, McKean–van Moerbeke 1980, Bogatyrev 1998,

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Ezt újra és újra felfedezték: Robinson 1960, McKean–van Moerbeke 1980, Bogatyrev 1998, T. 1999,

Theorem

Ha $E = \cup_1^m [a_j, b_j]$ véges sok intervallumból áll, akkor található hozzá tetszőlegesen közel ugyanannyi intervallumból álló valós lemniszkáta $E^ = \cup_1^m [a_j^*, b_j^*]$*

Minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan E^* , hogy $|a_j - a_j^*| \leq \epsilon$, $|b_j - b_j^*| \leq \epsilon$

Ezt újra és újra felfedezték: Robinson 1960, McKean–van Moerbeke 1980, Bogatyrev 1998, T. 1999, Peherstorfer 2001

A polinom-inverz-kép módszer

- Induljunk ki egy $[-1, 1]$ -en igaz eredményből

A polinom-inverz-kép módszer

- Induljunk ki egy $[-1, 1]$ -en igaz eredményből
- Menjünk át polinomiális leképezéssel valós lemniszkátákra és egy azokon igaz speciális eredményre

A polinom-inverz-kép módszer

- Induljunk ki egy $[-1, 1]$ -en igaz eredményből
- Menjünk át polinomiális leképezéssel valós lemniszkátákra és egy azokon igaz speciális eredményre (itt történik a halmaz felhasadása)

A polinom-inverz-kép módszer

- Induljunk ki egy $[-1, 1]$ -en igaz eredményből
- Menjünk át polinomiális leképezéssel valós lemniszkátákra és egy azokon igaz speciális eredményre (itt történik a halmaz felhasadása)
- Szabaduljunk meg az eredmény specialitásától

A polinom-inverz-kép módszer

- Induljunk ki egy $[-1, 1]$ -en igaz eredményből
- Menjünk át polinomiális leképezéssel valós lemniszkátákra és egy azokon igaz speciális eredményre (itt történik a halmaz felhasadása)
- Szabaduljunk meg az eredmény specialitásától
- Menjünk át véges sok intervallumból álló rendszerre approximációval (sűrűségi tétel)

- Induljunk ki egy $[-1, 1]$ -en igaz eredményből
- Menjünk át polinomiális leképezéssel valós lemniszkátákra és egy azokon igaz speciális eredményre (itt történik a halmaz felhasadása)
- Szabaduljunk meg az eredmény specialitásától
- Menjünk át véges sok intervallumból álló rendszerre approximációval (sűrűségi tétel)
- Menjünk át tetszőleges kompakt valós halmazra véges sok intervallummal történő approximációval

Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség

Bernstein-egyenlőtlenség (1912):

$$|P'_n(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|P_n\|_{[-1,1]}, \quad x \in [-1, 1]$$

Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség

Bernstein-egyenlőtlenség (1912):

$$|P'_n(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|P_n\|_{[-1,1]}, \quad x \in [-1, 1]$$

Theorem

(Baran, T.) Ha $E \subset \mathbf{R}$ kompakt, akkor

$$|P'_n(x)| \leq n\pi\omega_E(x) \|P_n\|_E, \quad x \in \text{Int}(E)$$

Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség

Bernstein-egyenlőtlenség (1912):

$$|P'_n(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|P_n\|_{[-1,1]}, \quad x \in [-1, 1]$$

Theorem

(Baran, T.) Ha $E \subset \mathbf{R}$ kompakt, akkor

$$|P'_n(x)| \leq n\pi\omega_E(x) \|P_n\|_E, \quad x \in \text{Int}(E)$$

Éles: minden $x_0 \in \text{Int}(E)$ -re vannak olyan $P_n \neq 0$ polinomok, amelyekre

$$|P'_n(x_0)| \geq n(1 - o(1))\pi\omega_E(x_0) \|P_n\|_E$$

Az polinom-invez kép módszer alkalmazásai

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon
3. Christoffel-függvények aszimptotikája $\mathbf{R}$ kompakt részalmazain

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon
3. Christoffel-függvények aszimptotikája $\mathbf{R}$ kompakt részhalmazain
4. Christoffel-függvények aszimptotikája Jordan görberendszereken és íveken

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon
3. Christoffel-függvények aszimptotikája $\mathbf{R}$ kompakt részalmazain
4. Christoffel-függvények aszimptotikája Jordan görberendszereken és íveken
5. Univerzalitási tételek (kvantummechanika)

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon
3. Christoffel-függvények aszimptotikája $\mathbf{R}$ kompakt részalmazain
4. Christoffel-függvények aszimptotikája Jordan görberendszereken és íveken
5. Univerzalitási tételek (kvantummechanika)
6. Ortogonális polinomok finom zérushelyeloszlása

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon
3. Christoffel-függvények aszimptotikája $\mathbf{R}$ kompakt részalmazain
4. Christoffel-függvények aszimptotikája Jordan görberendszereken és íveken
5. Univerzalitási tételek (kvantummechanika)
6. Ortogonális polinomok finom zérushelyeloszlása
7. A Riesz-egyenlőtlenség általános alakja

1. Az általánosított Bernstein-egyenlőtlenség
2. A Markov-egyenlőtlenség általános alakja véges sok intervallumon
3. Christoffel-függvények aszimptotikája $\mathbf{R}$ kompakt részalmazain
4. Christoffel-függvények aszimptotikája Jordan görberendszereken és íveken
5. Univerzalitási tételek (kvantummechanika)
6. Ortogonális polinomok finom zérushelyeloszlása
7. A Riesz-egyenlőtlenség általános alakja
8. Bernstein approximációs tétele általános halmazokon

Bernstein-tétel

$$f \in C[-1, 1]$$

$$f \in C[-1, 1]$$

$$E_n(f, [-1, 1]) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_{[-1, 1]}$$

$$f \in C[-1, 1]$$

$$E_n(f, [-1, 1]) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_{[-1, 1]}$$

Bernstein 1914:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nE_n(|x|, [-1, 1]) = \sigma, \quad 0.278 < \sigma < 0.286$$

$$f \in C[-1, 1]$$

$$E_n(f, [-1, 1]) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_{[-1, 1]}$$

Bernstein 1914:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(|x|, [-1, 1]) = \sigma, \quad 0.278 < \sigma < 0.286$$

Bernstein 1938-46: $p \neq 2, 4, \dots$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x|^p, [-1, 1]) = \sigma_p$$

$$f \in C[-1, 1]$$

$$E_n(f, [-1, 1]) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_{[-1, 1]}$$

Bernstein 1914:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(|x|, [-1, 1]) = \sigma, \quad 0.278 < \sigma < 0.286$$

Bernstein 1938-46: $p \neq 2, 4, \dots$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x|^p, [-1, 1]) = \sigma_p$$

Ha $x_0 \in (-1, 1)$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x - x_0|^p, [-1, 1]) = (1 - x_0^2)^{p/2} \sigma_p$$

Mi a helyzet, ha $[-1, 1]$ -et egy általános valós kompakt halmazra cseréljük ki?

Mi a helyzet, ha $[-1, 1]$ -et egy általános valós kompakt halmazra cseréljük ki?

$F \subset \mathbf{R}$ kompakt,

$$E_n(f, F) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_F$$

Mi a helyzet, ha $[-1, 1]$ -et egy általános valós kompakt halmazra cseréljük ki?

$F \subset \mathbf{R}$ kompakt,

$$E_n(f, F) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_F$$

Vasiliev (Moszkva), 1998: Chebyshev polynomials and approximation theory on compact subsets of the real axis (158 pp.)

Mi a helyzet, ha $[-1, 1]$ -et egy általános valós kompakt halmazra cseréljük ki?

$F \subset \mathbf{R}$ kompakt,

$$E_n(f, F) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_F$$

Vasiliev (Moszkva), 1998: Chebyshev polynomials and approximation theory on compact subsets of the real axis (158 pp.)

Vasiliev explicit módon definiál egy $h_F(x)$ függvényt

Mi a helyzet, ha $[-1, 1]$ -et egy általános valós kompakt halmazra cseréljük ki?

$F \subset \mathbf{R}$ kompakt,

$$E_n(f, F) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_F$$

Vasiliev (Moszkva), 1998: Chebyshev polynomials and approximation theory on compact subsets of the real axis (158 pp.)

Vasiliev explicit módon definiál egy $h_F(x)$ függvényt

Azt állítja, hogy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x - x_0|^p, F) = h_F(x_0)^{-p} \sigma_p$$

Mi a helyzet, ha $[-1, 1]$ -et egy általános valós kompakt halmazra cseréljük ki?

$F \subset \mathbf{R}$ kompakt,

$$E_n(f, F) = \inf_{\deg(P_n)} \|f - P_n\|_F$$

Vasiliev (Moszkva), 1998: Chebyshev polynomials and approximation theory on compact subsets of the real axis (158 pp.)

Vasiliev explicit módon definiál egy $h_F(x)$ függvényt

Azt állítja, hogy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x - x_0|^p, F) = h_F(x_0)^{-p} \sigma_p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x - x_0|^p, F) > 0 \Leftrightarrow h_F(x_0) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\Theta_F(t, x_0)^2}{t^3} dt < \infty, \quad \Theta_F(t, x_0) = |(x_0 - t, x_0 + t) \setminus F|$$

Ha $x \in \text{Int}(F)$ akkor $h_F(x) = \pi\omega_F(x)$

Ha $x \in \text{Int}(F)$ akkor $h_F(x) = \pi\omega_F(x)$

Theorem

(Vasiliev) Ha F kompakt, akkor $x_0 \in \text{Int}(F)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x - x_0|^p, F) = (\pi\omega_F(x_0))^{-p} \sigma_p$$

Ha $x \in \text{Int}(F)$ akkor $h_F(x) = \pi\omega_F(x)$

Theorem

(Vasiliev) Ha F kompakt, akkor $x_0 \in \text{Int}(F)$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n(|x - x_0|^p, F) = (\pi\omega_F(x_0))^{-p} \sigma_p$$

Ha $F = [-1, 1]$, akkor

$$(\pi\omega_F(x_0))^{-p} = (1 - x_0^2)^{p/2}$$

úgyhogy visszkapjuk Bernstein 1938-as tételét

Vissza a sűrűségi tételhez

Vissza a sűrűségi tételhez

$$E = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j],$$

Vissza a sűrűségi tételhez

$$E = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j],$$

“ $\mu_E([a_j, b_j])$, $1 \leq j \leq m$ mind racionális” karakterizálja a valós lemniszkátákat

Vissza a sűrűségi tételhez

$$E = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j],$$

“ $\mu_E([a_j, b_j])$, $1 \leq j \leq m$ mind racionális” karakterizálja a valós lemniszkátákat

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ -re tekintsük az

$$E_{\mathbf{x}} = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j + x_j]$$

halmazt

Vissza a sűrűségi tételhez

$$E = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j],$$

“ $\mu_E([a_j, b_j])$, $1 \leq j \leq m$ mind racionális” karakterizálja a valós lemniszkátákat

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ -re tekintsük az

$$E_{\mathbf{x}} = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j + x_j]$$

halmazt, és a

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

mennyiségeket

Vissza a sűrűségi tételhez

$$E = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j],$$

“ $\mu_E([a_j, b_j])$, $1 \leq j \leq m$ mind racionális” karakterizálja a valós lemniszkátákat

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ -re tekintsük az

$$E_{\mathbf{x}} = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j + x_j]$$

halmazt, és a

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

mennyiségeket

Legyen

$$G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})),$$

Vissza a sűrűségi tételhez

$$E = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j],$$

“ $\mu_E([a_j, b_j])$, $1 \leq j \leq m$ mind racionális” karakterizálja a valós lemniszkátákat

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ -re tekintsük az

$$E_{\mathbf{x}} = \cup_{j=1}^m [a_j, b_j + x_j]$$

halmazt, és a

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

mennyiségeket

Legyen

$$G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})),$$

A sűrűségi tétel következik, ha megmutatjuk, hogy *vannak tetszőlegesen kicsi $\mathbf{x} \geq 0$ értékek, amelyekre $G(\mathbf{x})$ az $\mathbf{R}^m$ egy racionális pontja*

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

tulajdonságai

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

tulajdonságai

(A) g_j folytonos egy $[0, a]^m$ kockán

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

tulajdonságai

- (A) g_j folytonos egy $[0, a]^m$ kockán
- (B) g_j szigorúan monoton növekvő az x_j változóban és szigorúan monoton csökkenő minden más x_i , $i \neq j$ változóban, és

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

tulajdonságai

- (A) g_j folytonos egy $[0, a]^m$ kockán
- (B) g_j szigorúan monoton növekvő az x_j változóban és szigorúan monoton csökkenő minden más x_i , $i \neq j$ változóban, és
- (C) $\sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{x}) \equiv 1$

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_x}([a_j, b_j + x_j])$$

tulajdonságai

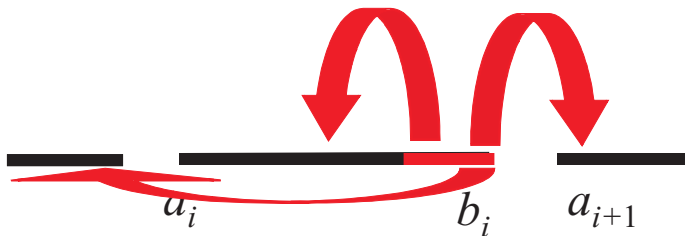
- (A) g_j folytonos egy $[0, a]^m$ kockán
- (B) g_j szigorúan monoton növekvő az x_j változóban és szigorúan monoton csökkenő minden más x_i , $i \neq j$ változóban, és
- (C) $\sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{x}) \equiv 1$

Nevezzük ezeket monoton rendszereknek

Harmonikus mértékek monoton rendszert alkotnak

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$

$$g_j(\mathbf{x}) = \mu_{E_{\mathbf{x}}}([a_j, b_j + x_j])$$



Monoton rendszerek tulajdonságai

A sűrűségi tételhez az kell, hogy minden $g_j(x_1, \dots, x_m)$ racionális legyen

Monoton rendszerek tulajdonságai

A sűrűségi tételhez az kell, hogy minden $g_j(x_1, \dots, x_m)$ racionális legyen

A $G : [0, a]^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ szinguláris, az értékkészlete az

$$\{\mathbf{y} : \sum_j y_j = 1\}$$

hipersík része

Monoton rendszerek tulajdonságai

A sűrűségi tételhez az kell, hogy minden $g_j(x_1, \dots, x_m)$ racionális legyen

A $G : [0, a]^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ szinguláris, az értékkészlete az

$$\{\mathbf{y} : \sum_j y_j = 1\}$$

hipersík része

Theorem

Ha $g_j, j = 1, \dots, m$ monoton rendszer, akkor fix x_m -re a

$\mathbf{x} \mapsto (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_{m-1}(\mathbf{x}))$ leképezés 1-1 értelmű (homeomorfizmus)

Monoton rendszerek tulajdonságai

A sűrűségi tételhez az kell, hogy minden $g_j(x_1, \dots, x_m)$ racionális legyen

A $G : [0, a]^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ szinguláris, az értékkészlete az

$$\{\mathbf{y} : \sum_j y_j = 1\}$$

hipersík része

Theorem

Ha $g_j, j = 1, \dots, m$ monoton rendszer, akkor fix x_m -re a $\mathbf{x} \mapsto (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_{m-1}(\mathbf{x}))$ leképezés 1-1 értelmű (homeomorfizmus)

Corollary

Fix x_m -re a

$$\mathbf{x} \mapsto (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_{m-1}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in (0, a)^m$$

képhalmaza az R^{m-1} nyílt része (tartomány-invariancia). Speciálisan a sűrűségi tétel igaz.

A homeomorfizmus-tulajdonság

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

Számozzuk meg a koordinátákat úgy, hogy valamely $1 \leq k \leq (m-1)$ -re $x_1 > x'_1, x_2 > x'_2, \dots, x_k > x'_k$, de $x_{k+1} \leq x'_{k+1}, \dots, x_m \leq x'_m$.

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

Számozzuk meg a koordinátákat úgy, hogy valamely $1 \leq k \leq (m-1)$ -re $x_1 > x'_1, x_2 > x'_2, \dots, x_k > x'_k$, de $x_{k+1} \leq x'_{k+1}, \dots, x_m \leq x'_m$. Legyen $y_j = \min(x_j, x'_j)$.

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

Számozzuk meg a koordinátákat úgy, hogy valamely $1 \leq k \leq (m-1)$ -re $x_1 > x'_1, x_2 > x'_2, \dots, x_k > x'_k$, de $x_{k+1} \leq x'_{k+1}, \dots, x_m \leq x'_m$. Legyen $y_j = \min(x_j, x'_j)$. Ekkor $y_j = x'_j$ ha $1 \leq j \leq k$ és $y_j = x_j$ ha $k < j < n$.

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

Számozzuk meg a koordinátákat úgy, hogy valamely $1 \leq k \leq (m-1)$ -re $x_1 > x'_1, x_2 > x'_2, \dots, x_k > x'_k$, de $x_{k+1} \leq x'_{k+1}, \dots, x_m \leq x'_m$. Legyen $y_j = \min(x_j, x'_j)$. Ekkor $y_j = x'_j$ ha $1 \leq j \leq k$ és $y_j = x_j$ ha $k < j < n$.

Mármost

$$\sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{x}) = 1 - \sum_{j=k+1}^m g_j(\mathbf{x}) > 1 - \sum_{j=k+1}^m g_j(\mathbf{y})$$

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

Számozzuk meg a koordinátákat úgy, hogy valamely $1 \leq k \leq (m-1)$ -re $x_1 > x'_1, x_2 > x'_2, \dots, x_k > x'_k$, de $x_{k+1} \leq x'_{k+1}, \dots, x_m \leq x'_m$. Legyen $y_j = \min(x_j, x'_j)$. Ekkor $y_j = x'_j$ ha $1 \leq j \leq k$ és $y_j = x_j$ ha $k < j < n$.

Mármost

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{x}) &= 1 - \sum_{j=k+1}^m g_j(\mathbf{x}) > 1 - \sum_{j=k+1}^m g_j(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{y}) \geq \sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{x}')\end{aligned}$$

A homeomorfizmus-tulajdonság

Tegyük fel, hogy $x_j > x'_j$ valamely j -re, de $x_m = x'_m$.

Számozzuk meg a koordinátákat úgy, hogy valamely $1 \leq k \leq (m-1)$ -re $x_1 > x'_1$, $x_2 > x'_2$, $\dots$, $x_k > x'_k$, de $x_{k+1} \leq x'_{k+1}$, $\dots$, $x_m \leq x'_m$. Legyen $y_j = \min(x_j, x'_j)$. Ekkor $y_j = x'_j$ ha $1 \leq j \leq k$ és $y_j = x_j$ ha $k < j < n$.

Mármost

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{x}) &= 1 - \sum_{j=k+1}^m g_j(\mathbf{x}) > 1 - \sum_{j=k+1}^m g_j(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{y}) \geq \sum_{j=1}^k g_j(\mathbf{x}')\end{aligned}$$

Emiatt

$$(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_{m-1}(\mathbf{x})) \neq (g_1(\mathbf{x}'), \dots, g_{m-1}(\mathbf{x}'))$$

Az örökségi probléma

m testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul.

m testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul. Titokban azonban mindegyik testvér megvesztegeti a bírót.

m testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul. Titokban azonban mindegyik testvér megvesztegeti a bírót. Egy testvér (bíró által megítélt) öröksége folytonos és monoton növekvő függvénye a saját megvesztegetési pénzének, és csökkenő függvénye minden más testvér megvesztegetési pénzének.

m testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul. Titokban azonban mindegyik testvér megvesztegeti a bírót. Egy testvér (bíró által megítélt) öröksége folytonos és monoton növekvő függvénye a saját megvesztegetési pénzének, és csökkenő függvénye minden más testvér megvesztegetési pénzének. Igazoljuk, hogy ha a legidősebb testvér nem ad túl sokat a bírónak, akkor a többiek adhatnak neki úgy, hogy a döntés **igazságos** legyen.

m testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul. Titokban azonban mindegyik testvér megvesztegeti a bírót. Egy testvér (bíró által megítélt) öröksége folytonos és monoton növekvő függvénye a saját megvesztegetési pénzének, és csökkenő függvénye minden más testvér megvesztegetési pénzének. Igazoljuk, hogy ha a legidősebb testvér nem ad túl sokat a bírónak, akkor a többiek adhatnak neki úgy, hogy a döntés **igazságos** legyen.

Ha x_j a j -edik testvér megvesztegetési pénze, és $g_j(x_1, \dots, x_m)$ az örökségi része, akkor egy monoton rendszert kapunk

m testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul. Titokban azonban mindegyik testvér megvesztegeti a bírót. Egy testvér (bíró által megítélt) öröksége folytonos és monoton növekvő függvénye a saját megvesztegetési pénzének, és csökkenő függvénye minden más testvér megvesztegetési pénzének. Igazoljuk, hogy ha a legidősebb testvér nem ad túl sokat a bírónak, akkor a többiek adhatnak neki úgy, hogy a döntés **igazságos** legyen.

Ha x_j a j -edik testvér megvesztegetési pénze, és $g_j(x_1, \dots, x_m)$ az örökségi része, akkor egy monoton rendszert kapunk

A feladat annak megmutatása, hogy ha x_m nem túl nagy, akkor vannak olyan $x_1, \dots, x_{m-1}$ értékek, amelyekre $g_j(x_1, \dots, x_m) = g_j(0, \dots, 0)$ minden j -re