# Geodetikus gömbök metszetéről

Horváth Márton
BME Geometria Tanszék
doktori témavezetőmmel, Csikós Balázzsal közös munka
ELTE TTK Geometriai Tanszék

Kerékjártó Geometriai Szeminárium
Szeged, 2013. november 7.

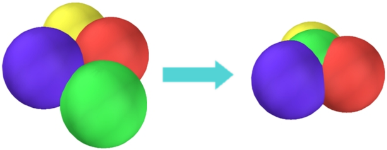
## Kneser–Poulsen-sejtés (1954-55)

*Tegyük fel, hogy a* $P_1, \dots, P_N$ *és* $Q_1, \dots, Q_N$ $\mathbb{E}^n$*-beli pontokra*

$$d(P_i, P_j) \geq d(Q_i, Q_j) \quad \forall\, 1 \leq i < j \leq N.$$

*Következik-e ebből, hogy tetszőleges* $r > 0$*-ra*

$$\mathrm{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(P_i, r) \right) \geq \mathrm{Vol}_n \left( \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}(Q_i, r) \right)?$$



## Megjegyzés

- Igaznak látszik különböző sugarak esetén is.
- Az ismert speciális esetek azt sugallják, hogy a sejtés valószínűleg igaz a $\mathbb{H}^n$ és $\mathbb{S}^n$ terekben is.

### Kérdés

*Igaz lehet-e a Kneser–Poulsen-sejtés az állandó görbületű tereknél még általánosabb Riemann-sokaságokban?*

Ha igaz, akkor gömbök uniójának a térfogata csak a gömbök sugaraitól és a középpontjaik közti távolságoktól függ.
Szita formula: hasonló feltétel metszetre.

### Definíció

$KP_k$ tulajdonság: $k$ nyílt gömb metszetének térfogata csak a gömbök sugaraitól és a középpontjaik páronkénti távolságaitól függ.

Az eredeti sejtésnek megfelelően bevezethető egy gyengébb feltétel is:

### Definíció

$KP_k^=$ tulajdonság: $k$ nyílt azonos sugarú gömb metszetének térfogata csak a gömbök sugarától és a középpontjaik páronkénti távolságaitól függ.

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c}\text{Kneser–Poulsen-sejtés}\\ k \text{ különböző sugarú gömbre}\end{array} & \Rightarrow & KP_k & \Rightarrow & KP_{k-1} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\begin{array}{c}\text{Kneser–Poulsen-sejtés}\\ k \text{ azonos sugarú gömbre}\end{array} & \Rightarrow & KP_k^= & \Rightarrow & KP_{k-1}^=
\end{array}
$$

# $KP_1$ tulajdonságú Riemann-sokaságok

Nincs különbség a $KP_1$ és a $KP_1^{=}$ tulajdonságok közt.
$KP_1$ szorosan összefügg az O. Kowalski és L. Vanhecke által bevezetett gömbhomogenitás fogalmával. Egy Riemann-sokaságot gömbhomogénnek neveznek, ha a „kicsi" geodetikus gömbök térfogata csak a sugaruktól függ.

$$\mathrm{Vol}_n(\mathcal{B}(P,r)) = V_n(r)\left(1 - \frac{s(P)}{6(n+2)}r^2 + O(r^4)\right),$$

ahol

- $V_n(r)$ az euklideszi $r$ sugarú gömb térfogata,
- $s(P)$ a skalárgörbület a $P$ pontban.

A gömbhomogén terek $s$ skalárgörbülete állandó.

## Megjegyzés

Homogén terek nyilván rendelkeznek a $KP_1$ tulajdonsággal.

# $KP_2$ tulajdonságú Riemann-sokaságok

### Definíció

Egy Riemann-sokaság 2-ponthomogén, ha bármely két azonos távolságú pontpárt izometriával egymásba lehet vinni.

Minden 2-ponthomogén tér rendelkezik a $KP_2$ tulajdonsággal.

### Lichnerowicz-sejtés

*Minden harmonikus tér 2-ponthomogén.*

### Definíció

Egy Riemann-sokaság harmonikus, ha a kis geodetikus gömbfelületek állandó középgörbületűek.

### Tétel (Szabó I. Z., 1990)

*Egy egyszeresen összefüggő teljes harmonikus Riemann-sokaságon teljesül a $KP_2$ tulajdonság.*

### Megjegyzés

Az ottani bizonyításból kiolvasható, hogy a tétel megfordítása is igaz.

# Kis gömbfelületek Weingarten-leképezése

- $\gamma\colon (a,b) \to M$ egy természetes paraméterezésű geodetikus $(0 \in (a,b))$,
- $\Sigma_\gamma(r)$ a $\gamma(r)$ középpontú, $|r|$ sugarú gömbfelület $(0 \neq r \in (a,b))$.
- Ha $|r|$ elég kicsi, akkor $\Sigma_\gamma(r)$ egy sima hiperfelület $\gamma(0)$-n keresztül.
- $L_\gamma(r)$ a $\Sigma_\gamma(r)$ Weingarten-leképezése a $\gamma(0)$ pontban a $\gamma'(0)$ normálvektorra vonatkozóan.

Ekkor a $\Sigma_\gamma(r)$ hiperfelület tetszőleges $\mathbf{v}$ érintővektorára

$$L_\gamma(r)(\mathbf{v}) = -J'(0),$$

ahol $J$ az a $\gamma$ menti Jacobi-mező, melyre $J(r) = \mathbf{0}$ és $J(0) = \mathbf{v}$.
Ha $\hat{L}_\gamma$ a $L_\gamma$ mátrixa:

$$\hat{L}_\gamma(r) = I\frac{1}{r} + \frac{\hat{R}_\gamma(0)}{3}r + O(r^2),$$

ahol $\hat{R}_\gamma(0)$ az $R(\cdot,\gamma'(0))\gamma'(0)$ Jacobi-operátor $\gamma'(0)^\perp$-re való megszorításának mátrixa.

# Aszimptotika éppen metsző tartományok térfogatára

Tekintsük a $D_1$ és $D_2$ két érintkező reguláris tartományt.

- $D_1$ határa $\Sigma_1$, $D_2$-é $\Sigma_2$,
- az érintkezési pont $P$,
- $\mathbf{N}$ a $P$-beli közös normálvektor, mely a $D_1$ belsejébe mutat,
- $X$ egy vektormező $P$ egy környetében,
- $D_1^t$ a $D_1$ képe az $X$ folyama által,
- a $\Sigma_i$ $\mathbf{N}$-re vonatkozó Weingarten-leképezésének mátrixa $L_i$.

Tegyük fel, hogy $L_1 - L_2$ pozitív definit, és $\langle X(P), \mathbf{N}\rangle$ negatív. Ekkor $t$ kis értékeire:

$$\mu(D_1^t \cap D_2) = \frac{\omega_{n-2}}{n^2-1} \frac{|2\langle X(P), \mathbf{N}\rangle|^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{|\det(L_1 - L_2)|}} t^{\frac{n+1}{2}} + O\left(t^{\frac{n+2}{2}}\right),$$

ahol $\mu$ a Riemann-sokaság térfogati formája, és $\omega_{n-2}$ jelöli az $n-1$ dimenziós euklideszi egységgömb $n-2$ dimenziós mértékét.

# $KP_2$ és $KP_2^=$ tulajdonságú Riemann-sokaságok

Tetszőleges $\gamma$ geodetikusra tekinstsük a

$$D_\gamma(r_1, r_2) = \det(L_\gamma(r_1) - L_\gamma(r_2))$$

függvényt.

## Állítás

- *$KP_2$ tulajdonság $\Rightarrow$ a $D_\gamma(r_1, r_2)$ függvény $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ origóbeli csírája nem függ a $\gamma$-tól*
- *$KP_2^=$ tulajdonság $\Rightarrow$ az $r \mapsto D_\gamma(r, -r)$ függvény $0 \in \mathbb{R}$ origóbeli csírája nem függ a $\gamma$-tól*

## Következmény

- *Egy $KP_2$ tulajdonságú teljes Riemann-sokaság harmonikus.*
- *Egy $KP_2^=$ tulajdonságú teljes Riemann-sokaság Einstein.*

További számolásokkal az is kihozható, hogy a $KP_2^=$ tulajdonságú Riemann-sokaságok harmonikusak.

# Bizonyítások

## Állítás

*Egy $KP_2$ tulajdonságú teljes Riemann-sokaság harmonikus.*

## Bizonyítás

Az $L^0_\gamma(r) = rL_\gamma(r) = I + \frac{R_\gamma(0)}{3}r^2 + O(r^3)$ jelöléssel

$$\det\left(\frac{r_2 L^0_\gamma(r_1) - r_1 L^0_\gamma(r_2)}{r_2 - r_1}\right) = \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)^{n-1} D(r_1, r_2).$$

A bal oldalt deriválva

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\left(\det\left(\frac{r_2 L^0_\gamma(r_1) - r_1 L^0_\gamma(r_2)}{r_2 - r_1}\right)\right)\Bigg|_{(r_1,r_2)=(r,0)} =$$

$$= \mathrm{tr}\left(-\frac{L^0_\gamma(r)}{r} - {L^0_\gamma}'(0) + \frac{L^0_\gamma(0)}{r}\right) = -\mathrm{tr}(L_\gamma(r)) + \frac{n-1}{r}.$$

A $\mathrm{tr}(L_\gamma(r))$ egy $r$ sugarú geodetikus gömbfelület középgörbülete.

# Bizonyítások

## Állítás

*Egy $KP_2^=$ tulajdonságú teljes Riemann-sokaság Einstein.*

## Bizonyítás

Mivel $L_\gamma(r) = I\frac{1}{r} + \frac{R_\gamma(0)}{3} r + O(r^2)$,

$$\det\left(L_\gamma(r) - L_\gamma(-r)\right) = \det\left(I\frac{2}{r} + \frac{2R_\gamma(0)}{3} r + O\left(r^2\right)\right)$$
$$= \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \det\left(I + \frac{R_\gamma(0)}{3} r^2 + O\left(r^3\right)\right).$$

Ezt $r$ szerint sorba fejtve:

$$\det\left(I + \frac{R_\gamma(0)}{3} r^2 + O\left(r^3\right)\right) = 1 + \operatorname{tr}\left(\frac{R_\gamma(0)}{3}\right) r^2 + O\left(r^3\right).$$

A $\operatorname{tr}(R_\gamma(0))$ állandó, így a sokaság Einstein.

# A $KP_2^=$ tulajdonság és a harmonikusság ekvivalenciája

### Tétel

*Egy összefüggő, egyszeresen összefüggő, teljes Riemann-sokaság pontosan akkor rendelkezik a $KP_2^=$ tulajdonsággal, ha harmonikus.*

A bizonyításhoz használt eszközök:

- A gömbök érintkezési pontját is változtatjuk.
- D'Atri-terek ekvivalens jellemzése:
  - $h_P(Q) = h_Q(P)$ minden elég közeli $P, Q \in M$ pontokra,
  - $h_P(\exp_P(\mathbf{v})) = h_P(\exp_P(-\mathbf{v}))$ minden $P \in M$ pontra, és elég kicsiny normájú $\mathbf{v} \in T_P M$ érintővektorra,

  ahol $h_P(Q)$ a $P$ középpontú, $d(P, Q)$ sugarú gömbfelület $Q$-beli középgörbülete.
- Einstein-sokaságok analitikusak.

# $KP_3$ tulajdonságú Riemann-sokaságok

## Tétel (Csikós B., Kunszenti-Kovács D., 2007)

- *Ha egy $M^n$ Riemann-sokaság rendelkezik a $KP_3$ tulajdonsággal, akkor $M^n$ állandó szekcionális görbületű.*
- *Ha $M^n$ összefüggő és teljes is, akkor $M^n$ a $\mathbb{H}^n_\kappa$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n_\kappa$ terek egyike.*

## Megjegyzés

Három gömb metszetéről csak azt használjuk fel, hogy üres-e vagy sem, a tényleges térfogatot nem.

## Tétel

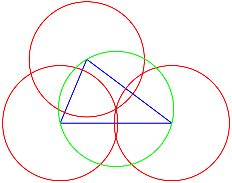
*Ha egy $M$ Riemann-sokaság rendelkezik a $KP_3^=$ tulajdonsággal, akkor $M$ állandó szekcionális görbületű.*

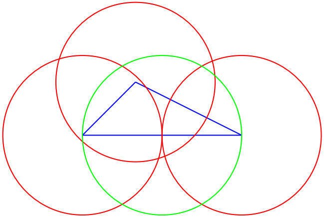
# A bizonyítás vázlata

### Definíció

Egy ponthármas minimális fedő sugara azon $r$ számok minimuma, melyre igaz, hogy $r$ sugarú zárt geodetikus gömbbel lefedhetőek.

$$\begin{aligned} r_{ABC} &= \min\{r \mid \exists P \in M, \text{ amire } A, B, C \in \overline{\mathcal{B}}(P, r)\} \\ &= \min\{r \mid \overline{\mathcal{B}}(A, r) \cap \overline{\mathcal{B}}(B, r) \cap \overline{\mathcal{B}}(C, r) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$



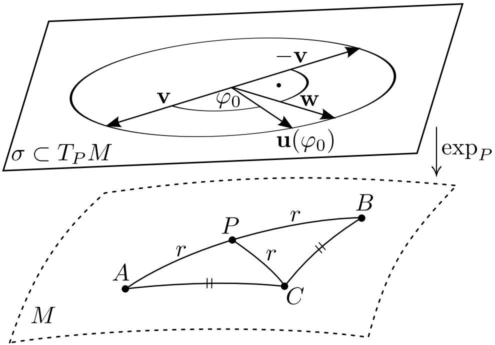


### Észrevétel

Egy $KP_3^=$ tulajdonságú sokaságon ez a szám csak a pontok páronkénti geodetikus távolságaitól függ.

# Speciális háromszögek

Háromszögeket konstruálunk egy $P \in M$ pontból, egy $\sigma \subset T_P M$ síkállásból, egy $r$ sugárból és $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \sigma$ vektorokból (melyekre fennáll, hogy $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = r$ és $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$).




## Állítás

*A $d(A, C)$ távolság csak az $r$-től függ.*

# Rauch tétele

## Tétel (Rauch)

- *$M_1$ és $M_2$ két azonos dimenziós Riemann-sokaság,*
- *$P_1 \in M_1$ és $P_2 \in M_2$ tetszőleges pontok,*
- *$r$ olyan kicsi, hogy az $\exp_{P_i}$ exponenciális függvény diffeomorfizmus a $\mathcal{B}(0, r)$ gömbön ($i = 1, 2$),*
- *$I \colon T_{P_1}M_1 \to T_{P_2}M_2$ egy skalárisszorzat-tartó lineáris leképezés,*
- *$c_1 \colon [a, b] \to \exp_{P_1}(\mathcal{B}(0, r))$ egy tetszőleges görbe,*
- *$c_2 = \exp_{P_2} \circ I \circ \exp_{P_1}^{-1}(c_1)$ görbe,*
- *minden $\sigma_1 \subset TM_1$ és $\sigma_2 \subset TM_2$ síkállásra $\kappa(\sigma_1) \leq \kappa(\sigma_2)$.*

*Ekkor $\ell(c_1) \geq \ell(c_2)$.*

## Észrevétel

A bizonyításból kiolvasható, hogy elég a görbületi feltételt az $M_1$ sokaságban csak bizonyos $S_{P_1}(c_1)$ síkállásokra (a $P_1$ pont és $c_1$ „által meghatározott síkban") megkövetelni. A $\tilde{c}_1 = \exp_{P_1}^{-1} c_1$ jelöléssel:

$$S_{P_1}(c_1) = \{\mathrm{im} T_{(s,t)} \exp_{P_1}(s\tilde{c}_1(t)) \mid s \in [0, 1], t \in [a, b] \text{ és ez kétdimenziós}\}$$

# Egy lemma

$$S_P(c) = \{\mathrm{im} T_{(s,t)} \exp_P(s\tilde{c}(t)) \mid s \in [0,1], t \in [a,b] \text{ és ez kétdimenziós}\}$$

## Lemma

*Ha $\gamma_{AC}$ a konstruált háromszögünk megfelelő oldala, akkor $S_P(\gamma_{AC})$ közel van $\sigma$-hoz a $\mathrm{Gr}_2(TM)$-ben.*

Nyilvánvalónak tűnik, de óvatosnak kell lenni.

## Megjegyzés

A lemma nem igaz, ha

- a görbe nem geodetikus,
- a görbe geodetikus, de nem a konstruált háromszög két csúcsát köti össze.

A bizonyítás nem igényel nagy ötletet, de hosszú.

# A bizonyítás befejezése és következmények

Ha lenne két $\sigma_1$ és $\sigma_2$ síkállás, melyekhez tartozó szekcionális görbületek különbözőek lennének, akkor az exponenciális leképezésnél vett képükben felvéve a speciális háromszögeinket, Rauch összehasonlítási tételével ellentmondásba kerülnénk az Állításunkkal.

## Tétel (Csikós B., Kunszenti-Kovács D., 2007)

*Ha $M^n$ egy teljes, összefüggő, állandó görbületű Riemann-sokaság, mely rendelkezik a $KP_2^=$ tulajdonsággal, akkor $M$ a $\mathbb{H}^n_\kappa$, az $\mathbb{E}^n$, az $\mathbb{S}^n_\kappa$ vagy az $\mathbb{RP}^n_\kappa$ terek egyike.*

## Következmény

*Ha $M^n$ egy teljes, összefüggő $KP_3^=$ tulajdonságú Riemann-sokaság, akkor $M^n$ a $\mathbb{H}^n_\kappa$, az $\mathbb{E}^n$ vagy az $\mathbb{S}^n_\kappa$ terek egyike.*

Csak az $\mathbb{RP}^n_\kappa$ elliptikus teret kell kizárni.

# A $KP_k$ tulajdonságok $k > 3$-ra

Ha $k > 3$, akkor a $KP_k^=$ tulajdonságból következik a $KP_3^=$ tulajdonság, így ezek állandó görbületűek.

Másrészt az egyszeresen összfüggő, teljes állandó görbületű terek rendelkeznek a $KP_k^=$, $KP_k$ tulajdonságokkal.

Köszönöm a figyelmet!