A homológiák végtelenül komplexek

2013. október 17.

Szűcs András

ELTE, Budapest, Magyarország

Kivonat

A homológiák az algebrai topológia leggyakrabban használt eszközei. Egy X tér homológia csoportjai az X tér szimplexeiből algebrai úton állnak elő. A konstrukció algebrai, precíz, koncepcionálisan egyszerű, de nem geometriai és nem szemléletes. (Újabb példa, mely Hermann Weyl azon kijelentését támasztja alá, miszerint: „Napjainkban minden egyes matematikai terület lelkéért harc folyik a Geometria Angyala és az Algebra Ördöge között".) Poincaré eredeti próbálkozása a homológiák megkonstruálására (1900 körül) sokkal geometriaibb volt: részsokaságokat próbált tekinteni ill. azok ekvivalencia osztályait, ahol kettő ekvivalens, ha „együtt határolnak". 1950 körül világossá vált, hogy Poincaré eredeti megközelítése akkor nem járhatott sikerrel. (Poincaré érezte ezt és fel is adta ezt a próbálkozást, helyette a szimplexek segítségével konstruálta meg a homológiákat.) Mindazonáltal minden topológus, mikor egy homológia osztályról beszél, akkor egy részsokaságra gondol (egy sokaságban). Ezért is volt természetes feltenni a kérdést (amint azt Norman Steenrod meg is tette), hogy lehet-e sokaság folytonos leképezésével realizálni minden homológia osztályt. Ezt Rhene Thom 1952-es Field's medálos cikkében igenlően válaszolta meg Z_2 és racionális együtthatókkal, (és tagadólag Z-együtthatókkal). Azonban ez csak félút volt Poncare eredeti elképzelésének a megvalósítása felé. A második lépés annak megválaszolása lett volna, hogy „mennyire választhatjuk a realizáló leképezést szépnek?" Ez nagyrészt nyitva maradt. Csak az 1-kodimenziós homológia osztályokra látták be, hogy azok mindig realizálhatóak beágyazásokkal.

Kb. fél évvel ezelőtt Mark Granttal beláttuk, hogy minden egynél nagyobb k-kodimenzióhoz van olyan (kb. $4k$-dimenziós) sokaság és abban egy k-kodimenziós homológia osztály, ami nem reprezentálható immerzióval.

Tehát meg kell engednünk szingularitásokat. Egy sima leképezés komplexitását azzal jellemezhetjük, hogy milyen szingularitásai vannak, és azok képei milyen multiplicitással metszik egymást a képsokaságban. Pontosabban szólva, véve a képsokaság egy tetszőleges y pontját, tekinthetjük ezen pont valamennyi ősét, és e pontokban a leképezés szingularitásait. Ezen szingularitások halmazát nevezzük a leképezés y pontbeli multiszingularitásának. Legyen most megadva multiszingularitásoknak egy τ véges halmaza. Egy leképezést τ-leképezésnek nevezünk, ha minden multiszingularitása τ-hoz tartozik. Itt ismét egy újabb kiábrándító állítás teljesül:

Tétel. *Minden $k > 1$-re és multiszingularitásoknak minden véges τ halmazára a τ-leképezések nem elegendőek, hogy minden sokaságban reprezentáljanak minden k-kodimenziós homológiaosztályt.*

Ebben az értelemben igaz a címben foglalt állítás.

Mindez melléktermére a τ-leképezések kobordizmus csoportjai vizsgálatának. Ezek extraordináris kohomológia elméleteket alkotnak, melyek talán a leginkább valósítják meg Poincaré eredeti elképzelését, azonban igen nehéz ezeket kiszámolni. Mi ki tudjuk őket számolni racionálisan és néhány esetben sikerült meghatározni a meglepően komplikált torzió csoportjaikat is.

Homologies are infinitely complex

17 október 2013

András Szűcs

ELTE, Budapest, Hungary

Abstract

Homologies are the most often used tools in algebraic topology. The homology groups of a space X are formed in an algebraic way from the simplicies of X. The construction is algebraic, precise, conceptually easy but not geometric and hard to visualize. (Another example proving the correctness of Hermann Weyl's statement: "In these days there is a permanent fight for the soul of each mathematical discipline between the Angel of Geometry and the Devil of Algebra.") The original attempt of Poincaré for the construction of homology (around 1900) was much more geometric: he tried to consider submanifolds up to the equivalence "they bound together".

Around 1950 it became clear that this geometric approach at the time of Poincaré was bound to fail. (Poincaré felt this and he dropped this approach and built homologies from simplicies.) But nevertheless any topologist speaking about a homology class visualizes it as a submanifold (in a manifold). So it was quite natural to ask (and Norman Steenrod formulated this question) whether any homology class could be realized by a continuous map of a manifold. This was answered by Rhene Thom in 1952 in his Field's medal winner paper to the positive for Z_2 and for Q coefficients (and to the negative for Z coefficients.) But this was only half way back to Poincaré's original idea. The second step would be to answer: "How nice can the realizing map be chosen?" In most cases this was left open. It was answered for codimension 1: in this case any homology class could be realized by an embedding.

About half a year ago we proved with Mark Grant that for any codimension k greater than 1 there is a manifold (of dimension approximately 4k) and a homology class of codimension k in it that can not be realized by an immersion.

Hence we have to admit singularities. Complexity of a smooth map can be characterized by the local singularities it has and by the multiplicities how the images of the singularity strata intersect in the target. More precisely for any point y in the target manifold of a smooth map we consider all the preimages of y and the singularites of the map at these preimage points. This set of singularities will be called the multisingularity of the map at the point y.

Now suppose that a finite set τ of multisingularities is given, call a smooth map a τ-map if it has multisingularities only from this given set τ. Here is again a disappointing

Theorem. *For any $k > 1$ and any finite set τ of multisingularities τ-maps are insufficient to realize all codimension k homology classes in all manifolds.*

In this sense the title is true.

All this is a byproduct of the study of cobordism groups of τ-maps. They form extraordinary cohomology theories that are perhaps closest to Poincaré's original idea but are rather hard to compute. We can compute them rationally, and in a few cases their surprisingly complicated torsion part.