

Berwald sokaságok – és néhány lépés tovább

Szilasi József

Debreceni Egyetem

Kerékjártó Geometriai Szeminárium
Szeged, 2013. szeptember 26.

Szeged–Debrecen relációk



Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

Valamennyi sokaság (Hausdorff, megszámlálható bázisú, véges dimenziós és) *sima*.

M – n -dimenziós sokaság, $n \geq 1$

$C^k(M, N) := \{\varphi: M \rightarrow N \mid \varphi \text{ } C^k\text{-osztályú}\} \text{ } (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$

$\varphi: M \rightarrow N$ *sima*, ha C^∞ -osztályú; *diffeomorfizmus*, ha *sima* és van *sima* inverze

$C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ – M *sima* függvényeinek valós algebrája

(Sima) *nyaláb*: $\pi: E \rightarrow M$ sima leképezés. Ekkor:

E – teljes sokaság

M – alapsokaság

π – projekció (vagy maga a nyaláb)

$E_p := \pi^{-1}(p)$ – a $p \in M$ pont fölötti fibrum

$\sigma \in C^\infty(M, E)$ (sima) *szelése* π -nek ha

$$\sigma(p) \in E_p, \text{ minden } p \in M\text{-re} \quad (\Leftrightarrow \pi \circ \sigma = 1_M).$$

$\Gamma(\pi)$ vagy $\Gamma(E)$ – $\pi: E \rightarrow M$ szeléseinek halmaza

$\pi: E \rightarrow M$ k -rangú vektornyaláb, ha nyaláb, valamennyi fibrum k -dimenziós valós vektortér és teljesül a *lokális trivialitás* (megadható M -nek $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ nyílt lefedése és $\psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ diffeomorfizmusok egy $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ családja oly módon, hogy

$$(\psi_\alpha)_p: \mathbb{R}^k \rightarrow E_p, \quad v \mapsto (\psi_\alpha)_p(v) := \psi_\alpha(p, v)$$

lineáris izomorfizmus $(\alpha \in A, p \in \mathcal{U}_\alpha \text{ tetszőleges})$).

Az érintőnyaláb

$\tau: TM \rightarrow M$ – M érintőnyalábja

$\Gamma(TM) =: \mathfrak{X}(M)$ – M (sima) vektormezőinek $C^\infty(M)$ -modulusa

$o \in \mathfrak{X}(M)$ – a zérus vektormező

$\mathring{TM} := TM \setminus o(M)$, $\mathring{\tau} := \tau|_{\mathring{TM}}$,

$\mathring{\tau}: \mathring{TM} \rightarrow M$ – M hasított érintőnyalábja

$\varphi \in C^k(M, N)$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) deriváltja: $\varphi_*: TM \rightarrow TN$

$$\begin{array}{l} \nearrow f^\vee := f \circ \tau \in C^\infty(TM) \\ f \in C^\infty(M) \\ \searrow f^c \in C^\infty(TM), f^c(v) := v(f) \end{array}$$

Lokális leírás

$(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ – térkép M -en $\rightsquigarrow (\tau^{-1}(\mathcal{U}), ((x^i)_{i=1}^n, (y^i)_{i=1}^n))$,
 $x^i := (u^i)^\vee$, $y^i := (u^i)^c$ – az indukált térkép TM -en

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

Nyújtások és homogenitás

$$\mu_t: TM \rightarrow TM, v \mapsto \mu_t(v) := tv$$

nyújtás t -vel ($t \in \mathbb{R}^*$ rögzített);

$$\mu_t^+: TM \rightarrow TM, v \mapsto \mu_t^+(v) := e^t v$$

pozitív nyújtás ($t \in \mathbb{R}$ rögzített);

$$\mu^+: \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM, (t, v) \mapsto \mu^+(t, v) := \mu_t^+(v) = e^t v$$

globális folyam, sebességvektormezője a $C \in \mathfrak{X}(TM)$ Liouville-vektormező.

Lokálisan:

$$C \stackrel{(\mathcal{U})}{=} y^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

$F \in C^\infty(\mathring{TM})$ k^+ -homogén, ha $CF = kF$

$\xi \in \mathfrak{X}(\mathring{TM})$ k^+ -homogén, ha $\mathcal{L}_C \xi = [C, \xi] = (k-1)\xi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Pre-Finsler függvények

$F: TM \rightarrow \mathbb{R}$, $E := \frac{1}{2}F^2$ („ F -hez csatolt energia”)

F *pre-Finsler függvény*, ha

(F_1) $F \in C^0(TM) \cap C^\infty(\overset{\circ}{T}M)$;

(F_2) 1^+ -homogén;

(F_1) $\wedge$ (F_2) $\Rightarrow F(0) = 0$

Egy pre-Finsler függvény *pozitív definit*, ha

(F_3) $F \upharpoonright \overset{\circ}{T}M > 0$.

Elliptikusság

Jelölés $F_p := F \upharpoonright T_p M$, $E_p := E \upharpoonright T_p M$; $p \in M$

$$\forall u \in \mathring{T}M : g_u := (E_{\tau(u)})''(u) : T_{\tau(u)}M \times T_{\tau(u)}M \rightarrow \mathbb{R}$$

g_u *skaláris szorzat* $T_{\tau(u)}M$ -en (szimmetrikus bilineáris forma).

Egy pozitív definit pre-Finsler függvény FINSLER-FÜGGVÉNY, ha teljesül

(F_4) (*Elliptikusság*) g_u nemelfajuló skaláris szorzat minden $u \in \mathring{T}M$ esetén ($\rightsquigarrow (T_{\tau(u)}M, g_u)$ szemieuklideszi vektortér).

(M, F) *Finsler-sokaság*, ha $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ *Finsler-függvény*, reverzibilis, ha $F(-v) = F(v)$, $v \in TM$.

Gauge-függvény

F *gauge-függvény*, ha pozitív definit pre-Finsler függvény és

(F_4^*) F_p szubadditív minden $p \in M$ esetén.

$(\Rightarrow F_p$ konvex függvény)

(M, F) *gauge-sokaság*, ha $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ gauge-függvény.

Példa

(M, g) Riemann-sokaság

$$F(v) := \|v\|_g := \sqrt{g_{\tau(v)}(v, v)}, \quad v \in TM$$

$\rightsquigarrow F$ reverzibilis Finsler-függvény, *kvadrátikus Finsler-függvény*

1. állítás

Ha (M, F) Finsler-sokaság, akkor tetszőleges $u \in \mathring{T}M$ esetén $(T_{\tau(u)}M, g_u)$ euklideszi vektortér.

2. állítás

Legyen (M, F) pozitív definit pre-Finsler sokaság. Ha tetszőleges $p \in M$, $u \in T_pM \setminus \{0\}$ esetén $(F_p)''(u)(v, v) = 0 \Rightarrow v \in \text{span}(u)$, akkor (M, F) Finsler-sokaság.

[CSF], Th. 9.1.36.

3. állítás

Ha (M, F) Finsler-sokaság, akkor $E \in C^1(TM)$. $E \in C^2(TM)$ pontosan akkor teljesül, ha F kvadratikus Finsler-függvény. Ebben az esetben $E \in C^\infty(TM)$.

F. Warner: *Conjugate locus of a Riemannian manifold*, Amer. Journal Math. **87** (1965) 574–604, Proposition 4.1; [CSF], Prop. 9.2.26

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en**
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

TTM vertikális résznyalábja

$$VTM := \text{Ker}(\tau_*) \subset TTM,$$

$$\tau_{TM}^v := \tau_{TM} \upharpoonright VTM$$

$$\tau_{TM}^v: VTM \rightarrow TM - TTM \text{ vertikális résznyalábja}$$

$$\mathfrak{X}^v(TM) := \Gamma(VTM) - TM \text{ vertikális vektormezőinek} \\ C^\infty(TM)\text{-modulusa}$$

Ha $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, a következők ekvivalensek:

- (i) $\xi \in \mathfrak{X}^v(TM)$;
- (ii) $\xi \approx_\tau o \ (\Leftrightarrow \tau_* \circ \xi = o \circ \tau)$;
- (iii) $\xi f^v = 0$, minden $f \in C^\infty(M)$ -re.

TM vektormezőit egyértelműen meghatározza a $C^\infty(M)$ -beli függvények teljes liftjein való hatásuk.

(Yano–Ledger-tétel, [CSF], Lemma 4.1.37)

$$\begin{array}{lcl}
 X \in \mathfrak{X}(M) & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} X^\vee \in \mathfrak{X}(TM), \quad X^\vee f^c = (Xf)^\vee \\ \Rightarrow X^\vee \in \mathfrak{X}^\vee(TM), \quad X \text{ vertikális liftje} \\ \\ X^c \in \mathfrak{X}(TM), \quad X^c f^c = (Xf)^c \quad (\Rightarrow X^c f^\vee = (Xf)^\vee) \\ - X \text{ teljes liftje} \end{array}
 \end{array}$$

A Liouville-vektormező jellemzése: $Cf^c = f^c$ ($f \in C^\infty(M)$); $C \in \mathfrak{X}^\vee(TM)$

Ha $(X_i)_{i=1}^n$ n -élmező M egy $\mathcal{U}$ nyílt halmazán, akkor $((X_i^v)_{i=1}^n, (X_i^c)_{i=1}^n)$ n -élmező TM $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ nyílt halmazán.
 ([CSF], Lemma 4.1.53)

- $\Rightarrow$ TM kovariáns vagy $(1, s)$ -típusú $(s \in \mathbb{N}^*)$ tenzormezőinek megadásához elegendő megadni hatásukat a $\mathfrak{X}(M)$ -beli vektormezők vertikális és teljes liftjein
- $\Rightarrow \exists! \mathbf{J} \in \mathcal{T}_1^1(TM) \cong \text{End}(\mathfrak{X}(TM))$, hogy $\mathbf{J}X^v = 0$, $\mathbf{J}X^c = X^v$, minden $X \in \mathfrak{X}(M)$ -re
 $(\Rightarrow \text{Im}(\mathbf{J}) = \text{Ker}(\mathbf{J}) = \mathfrak{X}^v(TM), \mathbf{J}^2 = 0)$

$\mathbf{J}$ – TTM vertikális endomorfizmusa

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor**
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

(M, F) – Finsler-sokaság

$g: u \in \mathring{T}M \mapsto g_u \in T_2^0(T_{\tau(u)}M) - (M, F)$ *fundamentális tenzora*

Indokolt-e a „tenzor” elnevezés – interpretálható-e g egy vektornyaláb szeléseként?

A Finsler-geometria kalkulatív apparátusának lehetséges színterei:

$$\tau_{TM}: TTM \rightarrow TM \quad (\text{Grifone})$$

$$\tau_{TM}^V: VTM \rightarrow TM \quad (\text{Bejancu})$$

$$\begin{cases} \pi: TM \times_M TM \rightarrow TM \\ \mathring{\pi}: \mathring{T}M \times_M TM \rightarrow \mathring{T}M \end{cases} \quad \checkmark$$

Finsler-nyaláb, hasított Finsler-nyaláb

$$\begin{aligned} TM \times_M TM &:= \{(u, v) \in TM \times TM \mid \tau(u) = \tau(v)\}, \\ \mathring{TM} \times_M TM &:= \{(u, v) \in \mathring{TM} \times TM \mid \mathring{\tau}(u) = \tau(v)\}; \\ \pi &:= \text{pr}_1 \restriction TM \times_M TM, \quad \mathring{\pi} := \text{pr}_1 \restriction \mathring{TM} \times_M TM; \end{aligned}$$

u fölötti fibrum:

$$\pi^{-1}(u) = \{u\} \times T_{\tau(u)}M \cong T_{\tau(u)}M,$$

ill.

$$\mathring{\pi}^{-1}(u) = \{u\} \times T_{\mathring{\tau}(u)}M \cong T_{\tau(u)}M \quad (u \in \mathring{TM}).$$

Finsler-vektormezők

$$\tilde{X} \in \Gamma(\overset{\circ}{\pi}) \Leftrightarrow \tilde{X} = (1_{\overset{\circ}{T}M}, \underline{X}), \quad \underline{X} \in C^\infty(\overset{\circ}{T}M, TM), \quad \tau \circ \underline{X} = \overset{\circ}{\tau}$$

– $\underline{X}$ a szelés *főrésze*

$\tilde{\delta} = (1_{TM}, 1_{TM}) - \pi$ kanonikus szelése

$$X \in \mathfrak{X}(M) \rightsquigarrow \hat{X} := (1_{TM}, X \circ \tau) \in \Gamma(\pi)$$

$\hat{X}$ – *bázikus szelés*

A bázikus szelések lokálisan generálják $\Gamma(\pi)$ -t.

Finsler-tenzormezők

$$F_l^k(\mathring{T}M) := \{(u, A) \in \mathring{T}M \times_M T_l^k(TM) \mid \mathring{\tau}(u) = \tau_l^k(A)\}$$

$\mathring{\pi}_l^k: F_l^k(\mathring{T}M) \rightarrow \mathring{T}M$ – a (k, l) ($\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)-típusú *Finsler-tenzorok* nyalábja

$\mathcal{F}_l^k(\mathring{T}M) := \Gamma(\mathring{\pi}_l^k)$ – a (k, l) -típusú *Finsler-tenzormezők* nyalábja

$$\mathcal{F}_l^k(\mathring{T}M) \cong T_l^k(\Gamma(\mathring{\pi}))$$

$$g \in \mathcal{F}_2^0(\mathring{T}M), \quad g(\hat{X}, \hat{Y}) = X^\nu Y^\nu E$$

$$g_{ij} := g\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) = \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén**
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

$$G^i, G_j^i, G_{jk}^i, G_{jkl}^i$$

(M, F) – Finsler-sokaság, $E := \frac{1}{2}F^2$

(a) SPRAY-KOEFFICIENSEK

$$G^i = \frac{1}{2}g^{ij} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^j \partial x^k} y^k - \frac{\partial E}{\partial x^j} \right); \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$G^i \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathring{T}M) \cap C^1(\tau^{-1}(\mathcal{U}))$$

2^+ -homogenitás

(b) „KÉTINDEXES CHRISTOFFEL-SZIMBÓLUMOK”

$$G_j^i := \frac{\partial G^i}{\partial y^j}; \quad i, j \in \{1, \dots, n\}; \quad 1^+\text{-homogenitás}$$

(c) „HÁROMINDEXES CHRISTOFFEL-SZIMBÓLUMOK”

$$G_{jk}^i := \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k}; \quad 0^+\text{-homogenitás}$$

– még mindig nem tenzorkomponensek

A Berwald-tenzor

$$G_{jkl}^i := \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l} \quad - (-1)^+ \text{-homogenitás}$$

TENZORKOMPONENSEK!

Megadható olyan $\mathbf{B} \in \mathcal{F}_3^1(\overset{\circ}{T}M)$ Finsler-tenzormező, hogy

$$\mathbf{B} \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} \right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^l}} = G_{jkl}^i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}$$

$\mathbf{B}$ – a Finsler-sokaság **Berwald-tenzora**

(M, F) **Berwald-sokaság**, ha $\mathbf{B} = 0$.

V. Matveev kérdése (2011. április):

„I always thought that a Finsler manifold is Berwald if and only if there exists a torsion-free affine connection whose parallel transport preserves the Finsler function F . Is the statement correct? If yes, do you have a reference where it is written?

Of course I understand that a Berwald metric (in a standard definition) does have the above property (...). Thus, my question is essentially whether the existence of an affine connection preserving the Finsler function implies that the metric is Berwald. ...”

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon**
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

Kanonikus objektumok

$C^\infty(TM)$ - homomorfizmusok kanonikus egzakt sorozata:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Gamma(\pi) & \xrightarrow{\mathbf{i}} & \mathfrak{X}(TM) & \xrightarrow{\mathbf{j}} & \Gamma(\pi) \rightarrow 0 \\ & & \widehat{X} & \mapsto & X^v & \mapsto & 0 \\ & & & & X^c & \mapsto & \widehat{X} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(\mathbf{i}) = \mathfrak{X}^v(TM) = \text{Ker}(\mathbf{j}) \Rightarrow \mathbf{j} \circ \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} \circ \mathbf{j} = \mathbf{J} \\ \mathbf{i} \circ \widetilde{\delta} = C \end{aligned}$$

A nyalábok szintjén:

$$\begin{aligned} 0 \mapsto TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \rightarrow 0 \\ \mathbf{i}: (u, v) \mapsto y^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_u =: v^\uparrow(u) \in T_v TM = \text{Ker}(\tau_{*v}) \\ \mathbf{j}: w \in T_v TM \mapsto (v, (\tau_*)_v(w)) \in TM \times_M TM \end{aligned}$$

A kanonikus spray

$$G^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^j \partial x^k} y^k - \frac{\partial E}{\partial x^j} \right)$$

Létezik egyetlenegy olyan $S: TM \rightarrow TTM$ leképezés, hogy

$$(S_1) \quad S \in C^\infty(\mathring{TM}, TTM) \cap C^1(TM, TTM)$$

$$(S_2) \quad \tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$$

$$(S_3) \quad \tau_* \circ S = 1_{TM} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{J}S = C)$$

$$(S_4) \quad [C, S] = S \quad (2^+\text{-homogenitás})$$

$((S_1)-(S_4): S \text{ spray } M \text{ fölött}; S \text{ affin spray, ha } S \in C^2(TM, TTM))$

$$(EL) \quad i_S d(dE \circ \mathbf{J}) = -dE$$

Az (EL) feltételnek eleget tevő spray a Finsler-sokaság **kanonikus sprayje**.

A kanonikus spray koordinátakifejezése:

$$S \underset{(\mathcal{U})}{=} y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Affin eset:

$$\begin{cases} S \underset{(\mathcal{U})}{=} y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - y^j y^k (\Gamma_{jk}^i \circ \tau) \frac{\partial}{\partial y^i}, \\ \Gamma_{jk}^i \in C^\infty(\mathcal{U}), \Gamma_{jk}^i \circ \tau = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} \end{cases}$$

4. állítás – A Berwald-sokaságok első jellemzése

Egy Finsler-sokaság pontosan akkor Berwald-sokaság, ha a kanonikus sprayje affin spray.

A kanonikus konnexió

$$G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$$

$$\mathcal{H}(\hat{X}) = X^h := \frac{1}{2}(X^c + [X^v, S]), \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

$\rightsquigarrow C^\infty(\mathring{T}M)$ lineáris kiterjesztés:

(Ehr₁) $\mathcal{H}: \Gamma(\mathring{\pi}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ $C^\infty(\mathring{T}M)$ -lineáris leképezés

(Ehr₂) $\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = 1_{\Gamma(\mathring{\pi})}$ ($\mathcal{H}$ hasítás)

(Ehr₁)–(Ehr₂): $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió $\mathring{T}M$ -en.

A kanonikus konnexió

Erre az Ehresmann-konnexióra teljesül:

(CC₁) $[C, \mathcal{H}(\hat{X})] = 0 \quad (X \in \mathfrak{X}(M))$ – (pozitív) homogenitás;

(CC₂) $[X^h, Y^v] - [Y^h, X^v] - [X, Y]^v = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$
– torziómentesség;

(CC₃) $dF \circ \mathcal{H} = 0 \quad (\Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{X}(M) : X^h F = 0)$ – kompatibilitás a Finsler-függvénnyel.

Ekkor

$$\mathcal{H} \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} \right) = \frac{\partial}{\partial y^i} - G_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}; \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

$\mathcal{H}$ a Finsler-sokaság **kanonikus/Berwald-konnexiója**.

Unicitás-tétel

Egy Finsler-sokaságon CSAK EGY olyan Ehresmann-konnexió létezik, amely eleget tesz a (CC₁)–(CC₃) feltételeknek.

Bizonyítás-vázlat.

$\bar{\mathcal{H}}$ – Ehresmann-konnexió, eleget téve (CC_1) – (CC_3) -nak (homogenitás, torziómentesség, kompatibilitás)

$(CC_2) \Rightarrow \exists \bar{S}: \overset{\circ}{T}M \rightarrow TTM$ leképezés, amelyre (S_1) – (S_3) teljesül és

$$X^{\bar{h}} := \bar{\mathcal{H}}(\hat{X}) = \frac{1}{2}(X^c + [X^v, \bar{S}]) \quad („\bar{S} generálja $\bar{\mathcal{H}}$ -t”)$$

(M. Crampin tétele; [CSF], Th. 7.8.7)

$$(CC_1) \Rightarrow [C, \bar{S}] = \bar{S} \text{ (} S \text{ spray)} \xrightarrow{[\text{CSF}], \text{Cor. 7.3.6}} \bar{S} \in \text{Im}(\bar{\mathcal{H}}) \\ - \bar{S} \text{ } \bar{\mathcal{H}}\text{-horizontális} \quad (*)$$

$$(CC_3) \Rightarrow \forall X \in \mathfrak{X}(M): \quad 0 = 2X^{\bar{h}}F = X^cF + X^v(\bar{S}F) - \bar{S}(X^vF)$$

$$\xrightarrow{(CC_3), (*)} X^cF - \bar{S}(X^vF) = 0$$

$$\Rightarrow i_{\bar{S}}d(dE \circ \mathbf{J}) + dE = 0$$

$$\Rightarrow \bar{S} = S \Rightarrow \bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$$

A Berwald-derivált

$$G_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k}$$

$$\nabla: \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \times \Gamma(\overset{\circ}{\pi}) \rightarrow \Gamma(\overset{\circ}{\pi}), (\xi, \tilde{Y}) \mapsto \nabla_\xi \tilde{Y}$$

$$\nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}} \tilde{Y} = \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathcal{H}\tilde{Y}] \rightsquigarrow \nabla_{X^\vee} \hat{Y} = 0$$

$$\mathbf{i}(\nabla_{\mathcal{H}\tilde{X}} \tilde{Y}) = [\mathcal{H}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}] \rightsquigarrow \mathbf{i}\nabla_{X^\mathbf{h}} \hat{Y} = [X^\mathbf{h}, Y^\vee]$$

∇ – a $\mathcal{H}$ -ból származó *Berwald-deriválás*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial y^j}} = \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)^\mathbf{h}} \widehat{\frac{\partial}{\partial y^k}} = G_{jk}^i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}$$

– a G_{jk}^i függvények a Berwald-deriválás Christoffel-szimbólumai

A Berwald-sokaságok 2. jellemzése

6. állítás

Egy (M, F) Finsler-sokaság pontosan akkor Berwald-sokaság, ha van olyan D kovariáns derivált M -en, hogy

$$\mathbf{i}(\nabla_{X^h} \hat{Y}) = [X^h, Y^v] = (D_X Y)^v; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ekkor D torziómentes.

Ismét a Berwald-tenzor

$$G_{jkl}^i = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l}$$

$$\mathbf{i} \mathbf{B}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z} := [X^v, [Y^h, Z^v]]$$

$\mathbf{B} - (M, F)$ Berwald-tenzora

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás**
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

$\mathcal{H}: \begin{cases} \Gamma(\pi) \rightarrow \mathfrak{X}(TM) \\ TM \times_M TM \rightarrow TTM \end{cases}$ pozitív homogén Ehresmann-konnexió

$\gamma: I \rightarrow M$ sima görbe, $0 \in I$

$X: I \rightarrow TM$ γ -menti vektormező ($\tau \circ X = \gamma$)

X ($\mathcal{H}$)-párhuzamos γ mentén, ha

$$\dot{X}(t) = \mathcal{H}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \quad (\text{„}X \text{ sebességvektormezője horizontális”})$$

$$\Leftrightarrow (X^i)' + (\gamma^j)'(G_j^i \circ X) = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

(időfüggő ODE, G_j^i homogén X -ben)

$\Rightarrow$ Tetszőlegesen adott $v \in T_{\gamma(0)}M$ esetén egyértelműen létezik olyan $X: I \rightarrow TM$ $\mathcal{H}$ -párhuzamos vektormező, hogy $X(0) = v$

$\rightsquigarrow$ *Párhuzamos eltolás* γ -mentén:

$$P_0^t(\gamma): T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M, \quad v \mapsto X(t)$$

pozitív homogén diffeomorfizmusa $\overset{\circ}{T}_{\gamma(0)}M$ -nek $\overset{\circ}{T}_{\gamma(t)}M$ -re

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”**
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

A Berwald-sokaságok 3. jellemzése

(M, F) – Finsler sokaság

Ha van olyan D torziómentes kovariáns deriválás M -en, hogy a D -szerinti párhuzamos eltolások megőrzik M érintővektorainak Finsler-normáját, akkor (M, F) Berwald-sokaság. Megfordítva, minden Berwald-sokaság rendelkezik a mondott tulajdonsággal.

A bizonyítás gondolatmenete

(1) D segítségével konstruálunk egy

$$\mathcal{H}_D: TM \times_M TM \rightarrow TTM$$

Ehresmann-konnexiót:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_D: (v, w) \in TM \times_M TM \mapsto \mathcal{H}_D(v, w) := Y_*(w) - (D_w Y)^\uparrow(v) \\ Y \in \mathfrak{X}(M), Y(\tau(v)) = v \end{cases}$$

$\mathcal{H}_D$ torziómentes és homogén

- (2) A D -hez tartozó párhuzamos eltolások megegyeznek a $\mathcal{H}_D$ -hez tartozó párhuzamos eltolásokkal.
- (3) **Lemma** Legyen $\mathcal{H}$ pozitív-homogén Ehresmann-konnexió,
 $F \in C^1(TM)$. $\mathcal{H}$ pontosan akkor kompatibilis F -fel ($dF \circ \mathcal{H} = 0$), ha
 tetszőleges $X: I \rightarrow TM$ $\mathcal{H}$ -párhuzamos γ -menti vektormező esetén
 $F \circ X: I \rightarrow \mathbb{R}$ konstans függvény.
- (4) $(2) \wedge (3) \Rightarrow \mathcal{H}_D$ kompatibilis F -fel.
- (5) $\mathcal{H}_D$ torziómentes, homogén és kompatibilis F -fel $\xRightarrow{\text{unicitás tétel}} \mathcal{H}_D$
 (M, F) kanonikus konnexiója $\Rightarrow (M, F)$ kanonikus sprayje affin spray
 4. $\xRightarrow{\text{állítás}} (M, F)$ Berwald-sokaság.
- (6) Megfordítva: (M, F) Berwald-sokaság $\Rightarrow [X^h, Y^v] = (D_X Y)^v$
 (2. jellemzés) $\Rightarrow \mathcal{H}_D = \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}_D$ kompatibilis F -fel $\xRightarrow{(2)} \mathcal{H}_D$ ugyanazt
 a párhuzamosságot generálja mint $D \Rightarrow D$ megőrzi a Finsler-normát.
 (Részletek: [SzLK].)

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás**
- 10 Kitekintés

Gauge-vektorterek

V – n -dimenziós valós vektortér ($n \geq 1$)

$f: V \rightarrow \mathbb{R}$ *gauge-függvény*, ha

(G_1) $f \in C^0(V) \cap C^\infty(\mathring{V})$, $\mathring{V} := V \setminus \{0\}$;

(G_2) f 1^+ -homogén ($f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$);

(G_3) f pozitív definit: $f|_{\mathring{V}} > 0$;

(G_4) f szubadditív: $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$; $u, v \in V$.

$\rightsquigarrow (V, f)$ *gauge-vektortér*

$\psi := \frac{1}{2}f^2$ – a csatolt energiafüggvény

$B := \{v \in V \mid f(v) \leq 1\}$ – f -egységgömb

$\text{bd } B = \{v \in V \mid f(v) = 1\} = f^{-1}(1)$ – f -egységszféra

Az átlagolt skaláris szorzat

$\omega \in A_n(v)$ – térfogati forma V -n

$\omega_{\partial B}$ – az indukált térfogati forma az egységszférán

$$\psi''(u, v): \mathring{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \psi''(u, v)(p) := \psi''(p)(u, v)$$

$((u, v) \in V \times V \text{ rögzített})$

Ekkor

$$\begin{cases} b_f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto b_f(u, v) \\ b_f(u, v) := \frac{1}{\int_{\partial B} \omega_{\partial B}} \int_{\partial B} \psi''(u, v) \omega_{\partial B} \end{cases}$$

jól definiált pozitív definit skaláris szorzat – az *átlagolt skaláris szorzat* V -n.

Bizonyítás: [CSF] Prop. and Def. 9.1.51.

További diszkusszió:



M. Crampin, *On the construction of Riemannian metric for Berwald spaces by averaging*, Houston J. Math (to appear).

Technikai lemma ([CSF], Lemma 9.8.5)

(M, D) – affinösszefüggő sokaság, $p \in M$, $\mathcal{U}$ normálkörnyezete p -nek

$\forall v \in T_p M : \exists t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ és $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ nyílt környezete p -nek, hogy:

$$\begin{cases} X: \mathcal{U}_0 \rightarrow TM, \quad q \mapsto X(q) := P_0^{t_0}(\gamma_q)(v) \\ \gamma_q \text{ a } p\text{-t } \gamma_q(t_0) = q\text{-val összekötő egyetlen } \mathcal{U}_0\text{-beli geodetikus szakasz} \end{cases}$$

sima vektormező $\mathcal{U}_0$ fölött.

Riemann-metrizálás

Egy (M, F, D) hármas *Berwald–Matveev-sokaság*, ha (M, F) gauge-sokaság, D torziómentes kovariáns derivált M -en, és D kompatibilis F -fel.

7. állítás

Ha (M, F, D) Berwald–Matveev-sokaság, akkor létezik olyan Riemann-metrika M -en, amelynek D a Levi-Civita deriváltja.

A bizonyítás ötlete: Tetszőleges $p \in M$ esetén legyen g_p a $(T_p M, F_p)$ gauge-vektoréren konstruált átlagolt skaláris szorzat. Ekkor

$$g: p \in M \rightarrow T_2^0(TM), \quad p \mapsto g \in T_2^0(T_p M)$$

„durva” $(0, 2)$ -tenzormező; a technikai lemma alapján megmutatható, hogy g ténylegesen sima.

Következmény (Szabó Zoltán)

Ha (M, F) Berwald-sokaság és D az F -fel kompatibilis torziómentes kovariáns derivált M -en, akkor D Riemann-metrizálható az előbbi értelemben.

Tartalom

- 1 Alapvető megállapodások és jelölések
- 2 Finsler- és gauge-függvények
- 3 Kitérő: vektormezők TM -en
- 4 A fundamentális tenzor
- 5 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – a klasszikus tenzorkalkulus nyelvén
- 6 A Finsler-sokaságok néhány alapvető adata – intrinsic módon
- 7 Párhuzamos eltolás
- 8 „Matveev tétele”
- 9 Átlagolás
- 10 Kitekintés

Túl a Berwald-sokaságokon?

- (A) Egy Finsler-sokaság *általánosított Berwald-sokaság*, ha van olyan, nem szükségképpen torziómentes, kovariáns derivált az alapsokaságon, amely kompatibilis a Finsler-függvénnyel.
- (B) (M, F) – Finsler-sokaság
 $g - (M, F)$ fundamentális tenzora
 $\mathcal{H}$ – a Berwald-konnexió
 $X^h := \mathcal{H}(\hat{X}), X \in \mathfrak{X}(M)$
 $\nabla: \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \times \Gamma(\overset{\circ}{\pi}) \rightarrow \Gamma(\overset{\circ}{\pi})$ – az indukált Berwald-derivált

(M, F) *Landsberg-sokaság*, ha

$$X^h g(\hat{Y}, \hat{Z}) = g(\nabla_{X^h} \hat{Y}, \hat{Z}) + g(\hat{Y}, \nabla_{X^h} \hat{Z}), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

– „a fundamentális tenzor kovariánsan konstans a horizontális Berwald-deriválásra nézve”.

Y. Ichijyō tétele

Megjegyzés: Tetszőleges $p \in M$ estén a

$$g_p: u \in \mathring{T}_p M \mapsto (g_p)_u := (E_p)''(u) \in T_2^0(T_p M) \cong T_2^0(T_u \mathring{T}_p M)$$

leképezés Riemann-metrika, így $(\mathring{T}_p M, g_p)$ Riemann-sokaság.

8. állítás (Y. Ichijyō)

Egy (M, F) Finsler-sokaság akkor és csak akkor Landsberg-sokaság, ha tetszőleges $p, q \in M$ pontok esetén a Berwald-konnexió szerinti párhuzamos eltolások izometriák a $(\mathring{T}_p M, g_p)$ és a $(\mathring{T}_q M, g_q)$ Riemann-sokaságok között.



Y. Ichijyō, *On Holonomy Mappings Associated to a Non-linear connection*, J. Math. Tokushima Univ. **17** (1983), 1–9.

Következmény

Minden Berwald-sokaság Landsberg-sokaság.

Sejtés

Minden Landsberg-sokaság Berwald-sokaság.

Egy bizonyítási ötlet (Szabó Z. – T. Aikou)

1. lépés (T. Aikou) Egy Finsler-sokaság pontosan akkor Berwald-sokaság, ha létezik olyan g_M Riemann-metrika M -en, hogy ha

$$\hat{g}_M(\hat{X}, \hat{Y}) := (g_M(X, Y))^{\vee}; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

akkor

$$\forall Z \in \mathfrak{X}(M) : \mathcal{L}_{Z^h} \hat{g}_M = 0.$$

Bizonyítás: [SzLK].

2. lépés Meghatározzuk az átlagolt Riemann-metrikát M -en, legyen ez γ .

3. lépés Föltéve, hogy (M, F) Landsberg-sokaság, megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_{Z^h} \hat{\gamma} = 0$ ($Z \in \mathfrak{X}(M)$) $\rightsquigarrow$ ezt nem sikerült kivitelezni.

Irodalomjegyzék



J. Szilasi, R. L. Lovas, D. Cs. Kertész, *Connections, Sprays and Finsler Structures*, World Scientific, 2014.



J. Szilasi, R. L. Lovas, D. Cs. Kertész, *Several ways to a Berwald manifold – and some steps beyond*, *Extracta Mathematicae*, **26** (2011), 89–130.