

SZAKDOLGOZAT

Takács László

2012

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi és Informatikai Kar

Geometria Tanszék

Matematika Bsc_LAK

SZAKDOLGOZAT

Kísérlettervezés latin négyzetek felhasználásával

Készítette:

Takács László

Témavezető:

Dr. Nagy Gábor Péter

2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Rövidítések jegyzéke	5
3. Latin négyzetek	6
3.1. A latin négyzetek jellemzése	6
3.2. Ortogonális latin négyzetek	7
4. Egyváltozós szóráselemzés	9
4.1. Statisztikai alapok	9
4.2. Az egyváltozós modell	12
4.3. Példa egyváltozós szóráselemzésre	15
5. Kísérlettervezés 3 faktor esetén	18
5.1. A háromfaktoros modell	18
5.2. Példa háromfaktoros kísérlettervezésre	23
6. Kísérlettervezés legalább 4 faktor esetén	26
6.1. A többfaktoros modell	26
6.2. Példa többfaktoros kísérlettervezésre	29
7. Összefoglalás	32
8. Mellékletek	33
9. Nyilatkozat	34
10. Irodalomjegyzék	35

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Nagy Gábor Péternek, amiért lehetőséget biztosított számomra a szakdolgozatom elkészítésére a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Karának Geometria Tanszékén, valamint egy érdekes téma kiválasztásáért és munkám támogatásáért.

Köszönettel tartozom egykori vezetőmnek, Dr. Kardos Zsuzsannának, amiért lehetővé tette számomra, hogy munkám átszervezésével elkezdhessem egyetemi tanulmányaimat és kéthetente újra iskolapadba ülhessek.

Köszönöm egyetemi oktatóimnak, hogy lelkiismeretes munkájukkal sok-sok örömet és utólag tekintve sok-sok izgalommal teli pillanatot okoztak nekem. Elmondani sem tudom, mennyi csodálatos emlékkal gazdagodtam.

Köszönöm rövidebb vagy hosszabb ideig mellém kerülő csoporttársaimnak, hogy kellemesebbé és emlékezetesebbé tették számomra a hosszú vonatozásokat és a szegedi hétvégeket és elviselték helyenként túlzott lelkesedésemet.

Köszönöm munkatársaimnak, hogy a vizsgaidőszakok alatt megértőek voltak szétszórtságommal vagy fáradtságommal szemben.

Végül köszönöm Édesanyámnak, hogy mindvégig támogatta egyetemi tanulmányaimat.

1. BEVEZETÉS

Folyamatosan gyorsuló, információk milliárdjaival telített világunkban egyre fontosabbá válik, hogy a felmerülő kérdésekre gyorsan és a lehető legkevesebb erőfeszítés árán tudjunk válaszolni.

Kérdésekben pedig nincs hiány az élet egy területén sem: mi fontos egy parfüm sikerességénél, az illat, a csomagolás vagy hogy hogyan reklámozzák és ki, esetleg csak az ár? Vagy hány funkció zsúfolható be egy svájci bicskába, hogy senki se mondja „na ez már túlzás”? Hogyan érhető el, hogy egyre kevesebb földterületen egyre több élelmiszer tudjunk termelni, trágyázással, növényvédőszerrel vagy a megfelelő növényfajta kiválasztásával? Hogyan tudnánk csökkenteni egy gyógyszerhatóanyag előállítási költségét, új katalizátor alkalmazásával, a reakció hőmérséklet változtatásával vagy jobb logisztikai szervezéssel? Folytathatnánk ezt a sort a végtelenségig.

Ezek az igények hívták életre a kísérlettervezési metodológiákat, melyeknek ma már számos módszere ismeretes a különböző feladatok megoldásához: mitől függ egy vizsgált mennyiség értéke, milyen paramétereknél van egy vizsgált folyamat optimuma akár különböző szempontok esetén is, vagy mennyire sérülékeny-robosztus egy eljárás. Megjegyzendő, hogy kísérlet alatt bármilyen vizsgálatot érthetünk, nem csak kémiai vagy fizikai stb. kísérletet, így annak eredménye is igen sokféle jellemző lehet.

Kísérletterezés során elsőként mindig azt kell megvizsgálunk, hogy milyen tényezőktől vagy a használatos terminológia szerint faktoroktól függ egy kísérlet eredménye, hiszen ezek ismeretében akár nagymértékben csökkenthető a további kísérletek száma.

Első ránézésre ez egyszerű feladatnak tűnik, hiszen ha elvégzünk egy kísérletet egy faktor két különböző értékénél, a használatos terminológia szerint szintjénél miközben a többi faktor szintjét nem változtatjuk, akkor az eredmény egyértelműen megadja, hogy az adott faktortól függ-e.

Sajnos a helyzet nem ilyen egyszerű, minden kísérletnél hatnak zavaró, többnyire ismeretlen tényezők is, ezért csak azoktól a faktoroktól függ a kísérlet, melyek az eredményben az elkerülhetetlen szórásnál határozottan nagyobb eltérést okoznak. Ilyen kérdések vizsgálatához pedig statisztikai módszerek szükségesek.

Egy vagy két faktor esetén jól használható a közismert egy- vagy kétváltozós varianciaanalízis, de a legtöbb kísérlet esetén ennél lényegesen több faktor vizsgálata szükséges egyszerre.

A latin négyzetek használatán alapuló módszer az ilyen kísérletek megtervezéséhez és értékeléséhez ad egy nagyon hatékony módszert. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez a módszer az egy- és kétváltozós varianciaanalízis természetes általánosításának tekinthető.

Szakdolgozatom elsősorban a Laywine C.F. és Mullen G.L. latin négyzetekről szóló könyvének statisztikával foglalkozó fejezetének feldolgozása. A latin négyzetekkel foglalkozó résznél nagyrészt Dénes Tamásnak a Híradártechnikában megjelent cikkére támaszkodtam, míg a statisztikai alapoknál és egyéb általános észrevételeknél Viharos László tankönyve szolgált fő forrásomul.

2. RÖVIDÍTÉSEK JEGYZÉKE

$P(A)$	az A esemény valószínűsége
ξ, η, ξ_i, η_j	valószínűségi változók
$F(x)$	valószínűségi változó eloszlásfüggvénye
$f(x)$	valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$E_n(\xi), \bar{\xi}$	mintaátlag
$E(\xi), \mu, \mu_i$	várható érték
$V_n(\xi)$	empirikus szórásnégyzet, empirikus variancia
$D_n(\xi)$	empirikus szórás
$D(\xi), \sigma$	szórás
$N(\mu, \sigma^2)$	μ várható értékű, σ szórású normális eloszlás
$F_{m,n}(x)$	m és n paraméterű F-eloszlás eloszlásfüggvénye
F_{krit}	F-eloszlás táblázatából származó kritikus érték
$H_0, H_0^{(i)}$	nullhipotézis
t	a szimbólum változók száma
$x_{ij}, x_{ij(k)}, x_{ij(k_1, \dots, k_t)}$	az i, j változókhoz tartozó kísérlet eredménye
$\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij(k)}, \varepsilon_{ij(k_1, \dots, k_t)}$	az i, j változókhoz tartozó kísérleti hiba
$\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \gamma_{k_t}^{(t)}$	a faktorok hozzájárulása a kísérlet eredményéhez
$\bar{x}$	az összes kísérlet eredményének átlaga
$\bar{x}_i, \bar{x}_{j(\cdot)}, \bar{x}_{\cdot(k_1, \dots, k_t)}$	adott faktor adott szintjéhez tartozó kísérletek eredményének átlaga
T	az összes kísérlet eredményének összege
$T_i, T_{j(\cdot)}, T_{\cdot(k_1, \dots, k_t)}$	adott faktor adott szintjéhez tartozó kísérletek eredményének összege
SST	a kísérletek átlagtól való négyzetes eltérésének összege
SSE	a variancia becsléséhez négyzetes eltérés összeg
SSR, SSC, SSS, SSS _i	a faktorok hatásának becsléséhez négyzetes eltérés összeg
MSE	a variancia becslésére szolgáló tag
MSR, MSC, MSS, MSS _i	a faktorok hatásának becslésére szolgáló tagok

3. LATIN NÉGYZETEK

3.1. A latin négyzetek jellemzése

Egy n -ed rendű latin négyzeten olyan $n \times n$ méretű négyzetes táblázatot értünk, amelynek soraiban az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek mindegyike egyszer és csak egyszer szerepel (1. ábra). Általában az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek az $1, 2, \dots, n$ természetes számok, de lehetnek görög vagy latin betűk, vagy akár tetszőleges szavak is.

1	2	3	4	3	1	2	4
2	3	4	1	1	4	3	2
3	4	1	2	2	3	4	1
4	1	2	3	4	2	1	3

1. ábra

Az 1. ábrán két 4-ed endű latin négyzetre láthatunk példát. Az elnevezés Leonhard Euler (1707-1783) XVIII. századi matematikustól származik, mivel ő alkalmazott a táblázatbeli elemek jelölésére latin betűket az addig megszokott számok helyett. Sokan Eulert tartják a latin négyzetek és a később ismertetendő ortogonális latin négyzet párok megalkotójának is, pedig már a XVII. század elején ismertek voltak (Claude-Gaspar Bachet de Méziriac és M. Ozanam) játékkártyákkal kapcsolatos vizsgálatokban.

Egy n -ed rendű latin négyzet összesen n^2 elemet tartalmaz, ezeket reprezentálhatjuk n^2 (s, o, sz) triplettel, ahol s a sorindex $(1, \dots, n)$, o az oszlopindex $(1, \dots, n)$ és sz a táblázatban szereplő szimbólum. Például az 1. ábra bal oldalán szereplő latin négyzet reprezentációja a következő: $\{(1,1,1), (1,2,2), (1,3,3), (1,4,4), (2,1,2), (2,2,3), (2,3,4), (2,4,1), (3,1,3), (3,2,4), (3,3,1), (3,4,2), (4,1,4), (4,2,1), (4,3,2), (4,4,3)\}$. Ezt a reprezentációt ortogonális tömb reprezentációnak nevezzük.

Egy latin négyzetre ránézve úgy tűnik, hogy a sor- és oszlopindexnek kitüntetett szerepe van. Az ortogonális tömb reprezentáció jól mutatja, hogy a sor- és oszlopindex, valamint a szimbólum gyakorlatilag teljesen egyenértékű. Például az 1. ábra bal oldalán levő latin négyzet oszlopindexét és szimbólumát felcserélve ismét egy vele ekvivalens latin négyzetet kapunk (2. ábra).

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

2. ábra

A statisztikai alkalmazások szempontjából kulcsfontosságú a latin négyzeteknek ez a fajta szimmetria tulajdonsága, ami lehetővé teszi felhasználásukat 3 faktoros kísérletek tervezésénél.

Érdemes megemlíteni, hogy a manapság méltán népszerű sudoku játék feladata egy speciális latin négyzet elkészítése.

3.2. Ortogonális latin négyzetek

Eulertől származik a híres 36 tiszt problémájaként ismert feladat: Válasszunk ki hat csapattest mindegyikéből hat különböző rendfokozatú tisztet úgy, hogy minden csapattestből ugyanazokat a különböző rendfokozatokat válasszuk ki. Elhelyezhetőek-e a tisztek párosával egy 6 x 6-os alakzatba úgy, hogy minden egyes sorban és oszlopban minden rendfokozat és minden csapattest pontosan egyszer szerepeljen?

Euler sejtette, hogy ennek a feladatnak nincs megoldása, bizonyítani csak 1900-ban sikerült G. Tarry-nak. Négy csapattest, négy rendfokozat és 4 x 4-es alakzat esetén viszont van megoldása a feladatnak (3. ábra).

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

őrm.	had.	száz.	ezr.
ezr.	száz.	had.	őrm.
had.	őrm.	ezr.	száz.
száz.	ezr.	őrm.	had.

őrm. 1	had. 2	száz. 3	ezr. 4
ezr. 3	száz. 4	had. 1	őrm. 2
had. 4	őrm. 3	ezr. 2	száz. 1
száz. 2	ezr. 1	őrm. 4	had. 3

3. ábra

Láthatjuk, hogy a feladat megoldásához két latin négyzet szükséges, amelyek egyesítésével egy olyan táblázatot kapunk, melynek mind az n^2 eleme különböző. Az ilyen

tulajdonságú latin négyzet párokat ortogonális latin négyzeteknek nevezzük.

A 36 tiszt problémája mutatja, hogy n -ed rendű ortogonális latin négyzet párok nem minden esetben léteznek. Bizonyítható, hogy legfeljebb $n-1$ olyan $n \times n$ -es latin négyzet létezik, melyek közül bármelyik kettő ortogonális és ha valóban léteznek, akkor ortogonális latin négyzetek teljes rendszeréről beszélünk.

A latin négyzetek elmélete még számos nyitott kérdést tartalmaz, de azt már bizonyították, hogy ha n prímszám (például $n = 3, 4, 5, 7, 8$), akkor létezik teljes n -ed rendű ortogonális rendszer, továbbá ha n páratlan ($n \geq 3$), akkor létezik legalább egy ortogonális latin négyzet pár.

Az ortogonális latin négyzetek felhasználhatók legalább négyfaktoros kísérletek tervezésénél.

Végül megemlítem, hogy az ortogonális latin négyzet párok felhasználhatóak bűvös négyzetek készítéséhez. A bűvös négyzetek olyan $n \times n$ -es táblázatok, melyek az $1, 2, \dots, n^2$ számokat tartalmazzák és minden sorban valamint oszlopban azonos a számok összege (néha még az átlóban is).

Könnyen belátható, hogy egy ortogonális $n \times n$ -es latin négyzet pár összege bűvös négyzetet ad, ha az egyik latin négyzet az $1, \dots, n$ számokat, a másik a $0, n, 2n, \dots, n(n-1)$ számokat tartalmazza. A 4. ábrán látható egy 4×4 -es bűvös négyzet készítése.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

4	12	8	0
0	8	12	4
12	4	0	8
8	0	4	12

1+4	2+12	3+8	4+0
3+0	4+8	1+12	2+4
4+12	3+4	2+0	1+8
2+8	1+0	4+4	3+12

5	14	11	4
3	12	13	6
16	7	2	9
10	1	8	15

4. ábra

4. EGYVÁLTOZÓS SZÓRÁSELEMZÉS

4.1. Statisztikai alapok

A következőkben röviden összefoglalom a kísérlettervezéshez szükséges legfontosabb valószínűségszámítási és matematikai statisztikai fogalmakat, eredményeket.

Ahhoz, hogy egy kísérletet matematikai módszerekkel elemezni tudjunk valamilyen számszerű eredménnyel kell rendelkeznie. Ez sokszor természetes módon teljesül, például egy kémiai kísérlet termelése, egy hektáron termelt gabona mennyisége, vagy egy üzletbe adott idő alatt betérő vásárlók száma. Néha azonban valamilyen számszerű adatot szükséges rendelni a kísérlet eredményéhez, például ha piros golyót húznak egy urnából.

A valószínűségi változó lehetővé teszi a kísérletek egységes kezelését. Legyen adott egy elemi eseményekből, szigma algebrából és valószínűségi mértékből álló $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor egy $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést valószínűségi változónak nevezünk. Ha bekövetkezik egy $\omega \subseteq \Omega$ elemi esemény, az produkál egy $\xi(\omega)$ véletlen számot. A ξ leképezésnek rendelkeznie kell azzal a tulajdonsággal, hogy az $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\}$ halmaznak eseménynek kell lennie.

Az $F(x) = P(\xi < x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük. Az eloszlásfüggvény monoton növekedő és balról folytosos, határértéke a $-\infty$ -ben 0, a $+\infty$ -ben 1. Segítségével tetszőleges valószínűség könnyen meghatározható, például:

$$P(a \leq \xi < b) = P(\{\xi < b\} - \{\xi < a\}) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a).$$

A ξ valószínűségi változót diszkrétnek nevezzük, ha értékei véges vagy végtelen sorozatba rendezhetők, és folytonosnak, ha létezik olyan $f(x)$ függvény, melyre:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Az $f(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük. Segítségével az előző valószínűség:

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(t)dt.$$

A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha tetszőleges $x_1, \dots, x_n$ valós számokra: $P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n < x_n)$. Ez az eloszlásfüggvények segítségével a következőképpen írható fel: $F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \cdot \dots \cdot F(x_n)$.

Egy kísérletet többször elvégezve az egyes kísérletek kimeneteleit független, azonos eloszlású valószínűségi változók írják le. A kísérletsorozat fontos jellemzője a mintaátlag:

$$E_n(\xi) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \bar{\xi}$$

és az empirikus szórás:

$$D_n(\xi) = \sqrt{V_n(\xi)} = \sqrt{\frac{(\xi_1 - E_n(\xi))^2 + \dots + (\xi_n - E_n(\xi))^2}{n}},$$

ahol $V_n(\xi)$ az empirikus szórásnégyzet, vagy variancia. A négyzetreemelések elvégzésével megkapjuk a variancia egyszerűsített kiszámolási módját, mely igen hasznos a gyakorlati számítások során:

$$V_n(\xi) = E_n(\xi^2) - E_n^2(\xi).$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor a mintaátlag a várható értékhez, az empirikus szórás a szóráshoz tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(\xi) = E(\xi) = \mu \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\xi) = \sqrt{V(\xi)} = D(\xi) = \sigma$$

Egy kísérlet ismétlésénél valamennyi valószínűségi változó várható értéke és szórása azonos, ekkor az egyszerűség kedvéért csak μ és σ jelöli ezeket a mennyiségeket.

Az alkalmazások szempontjából fontos, hogy a mintaátlag várható értéke megegyezik a valószínűségi változó várható értékével, míg a variancia várható értéke attól egy kicsit eltér:

$$E(E_n(\xi)) = \mu \text{ és } E(V_n(\xi)) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

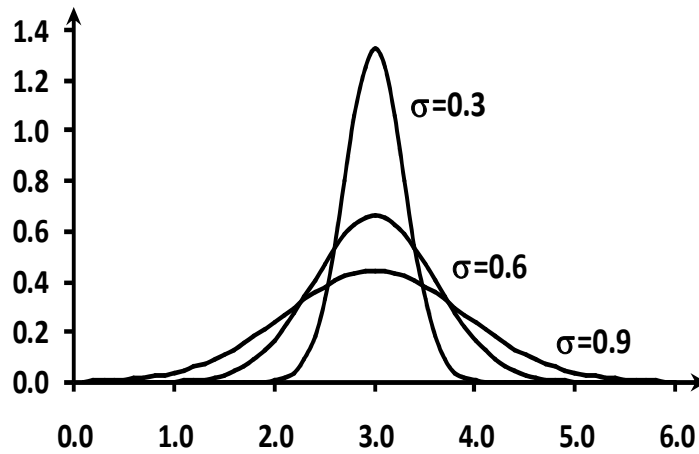
Több helyen szükségünk lesz arra az ismert tényre, hogy a mintaátlag varianciája a minta varianciájának az elemszámmal való hányadosa:

$$V(E_n(\xi)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A további alkalmazások szempontjából két folytonos valószínűségeloszlást kell kiemelnünk, a normális és az F-eloszlást. A normális eloszlás igen elterjedt, jelentőségét a központi határeloszlás tétel is mutatja. Mérési hibák gyakran normális eloszlásúak 0 várható értékkel. Ha ξ normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással (jelölése: $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$), akkor sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Az 5. ábrán $\mu = 3$ várható értékű normális eloszlások sűrűségfüggvényei láthatók:



5. ábra

Fontos megjegyezni, hogy ha $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $(\xi - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$, ahol az $N(0, 1)$ eloszlást standard normális eloszlásnak nevezzük. A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékei táblázatokban megtalálhatók.

A kísérlettervezés szempontjából a másik fontos eloszlás az F-eloszlás. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ és $\eta_1, \dots, \eta_m$ teljesen független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor az

$$F = \frac{\frac{1}{m}(\eta_1^2 + \dots + \eta_m^2)}{\frac{1}{n}(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)} \sim F_{m,n}(x)$$

mennyiség F eloszlású az m és n paraméterekkel. Várható értéke 1-nél nagyobb, ha $n > 2$:

$$E(F_{m,n}(x)) = \frac{n}{n-2}.$$

Megmutatható, hogy ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ és $\eta_1, \dots, \eta_m$ teljesen független azonos normális eloszlású valószínűségi változók, akkor az

$$F_2 = \frac{\frac{m}{m-1}V_m(\xi)}{\frac{n}{n-1}V_n(\eta)} = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m(\eta_i - \bar{\eta})^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n(\xi_j - \bar{\xi})^2}$$

mennyiség $F_{m-1,n-1}$ eloszlású. A tört nevezőjében és számlálójában is a szórásnégyzet becslése található, a négyzetes eltérések előtt szereplő szorzószámok a mögöttük álló kifejezések szabadsági fokainak (a szabadon megválasztható változóknak) a reciprokai. Például a számlálóban szereplő összeg szabadsági foka eggyel kisebb a tagok számánál, mert

$$\eta_m - \bar{\eta} = -((\eta_1 - \bar{\eta}) + \dots + (\eta_{m-1} - \bar{\eta})).$$

Általában igaz, hogy normális eloszlások szórásnégyzetének becslésekor a szabadsági fokok számával kell osztani a négyzetes eltérések összegét és két ilyen becslés hányadosa F-eloszláu lesz, ahol a paramétereket a szabadsági fokok szám adja meg.

Az előzőleg leírtak alapján a szórások egyezőségének vizsgálatára nyílik lehetőség. A statisztikai vizsgálat általános menete a következő: azt a nullhipotézist (H_0) vizsgáljuk, hogy a szórások megegyeznek, tehát az F_2 mennyiség valóban F-eloszlású, ehhez a kísérleti adatok alapján meghatározzuk az F_2 mennyiséget, majd az $F_{m-1, n-1}$ eloszlás táblázata alapján meghatározzuk azt a kritikus mennyiséget, melyre teljesülne hogy $P(F_2 < F_{krit}) = P_{krit}$. Ha valóban teljesül, hogy $F_2 < F_{krit}$, akkor a szórások egyezését elfogadjuk, különben elvetjük. A P_{krit} érték leggyakrabban 0.90, 0.95 vagy 0.99. Az F-eloszlás ezen valószínűségekhez tartozó kritikus értékei megtalálhatók a mellékletekben.

Megjegyzendő, hogy szokás egy és kétoldali próbáról is beszélni, utóbbi esetben két kritikus érték közé kell esnie egy vizsgált mennyiségnek. Kísérlettervezés során, annak jellegéből adódóan viszont mindig egyoldalú próbát végzünk.

Statisztikai próba során mindig kell hibával számolnunk. Elsőfajú hibának nevezzük, ha a próba során a hipotézist elvetjük, pedig az igaz. Ez a hiba ismert és a P_{krit} érték segítségével kézben tartható, ha például a $P_{krit} = 0.95$, akkor az elsőfajú hiba 5%, hiszen ekkora a valószínűsége, hogy $F_2 > F_{krit}$. Másodfajú hibának nevezzük, ha a hipotézist elfogadjuk, pedig az nem igaz. Ez a hiba általában nem ismert, de a P_{krit} érték növekedésével biztosan növekszik, ezért nem célszerű tetszőlegesen kicsire csökkenteni az elsőfajú hibát. A hiba csökkentését leghatékonyabban a kísérletszám növelésével érhetjük el.

4.2. Az egyváltozós modell

Egy adott jelenségre különböző tényezők – amiket a továbbiakban faktoroknak nevezünk – hatnak. Például egy kémiai reakció termelésére hathat a hőmérséklet, a reagensek ekvivalenciája, vagy az oldószer típusa. A továbbiakban egy faktor hatását vizsgáljuk, esetünkben legyen ez a hőmérséklet.

A következőkben leírt eljárást egyfaktoros szóráselemzésnek, vagy egyfaktoros varianciaanalízisnek (ANOVA) nevezzük.

Azt szeretnénk megvizsgálni, hogy egy faktor értékétől, szintjétől mennyire függ a vizsgált mennyiség, esetünkben a hőmérséklettől mennyire függ a termelés. Ehhez

különböző faktor szintek mellett végzünk kísérleteket, a hibák figyelembevételéhez minden szinten többet is. Ezután a következő modellt állíthatjuk fel:

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n_i.$$

A modellben k faktorszintet különböztetünk meg, az i . szinten n_i kísérletet végzünk, x_{ij} a vizsgált mennyiség, esetünkben a termelés értéke az i . faktorszint, vagyis hőmérséklet mellett a j . ismételtnél. Az i . szint hatása μ_i , amit csak pontatlanul tudunk megfigyelni, az ε_{ij} mérési hibákról feltételezzük, hogy független $N(0, \sigma^2)$ eloszlásúak ($\sigma > 0$).

Azt a nullhipotézist vizsgáljuk, hogy a szintek nem eredményeznek eltérő hatásokat:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k.$$

A későbbiekben tárgyalandó kísérlettervezéssel való szorosabb kapcsolat érdekében feltesszük, hogy minden szinten azonos számú kísérletet végzünk és a modellt is kissé másképpen írjuk fel:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n.$$

Itt μ az összes elvégzett kísérlet eredményének, a termeléseknek a várható értéke és az α_i tagok képviselik az i . szint hozzájárulását a termeléshez. A vizsgálandó nullhipotézis az, hogy az eltérő szinteknek nincs hatása a termelésre.

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Nézzük az összes (nk) kísérlet termelésének az összegét, majd képezzük az összeg várható értékét:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n E(x_{ij}) = nk\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\mu + \alpha_i + E(\varepsilon_{ij})) = nk\mu + n \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n E(\varepsilon_{ij}).$$

Figyelembe véve, hogy az ε_{ij} hibatagok $N(0, \sigma^2)$ eloszlásúak, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Képezzük a következő statisztikákat:

$$\bar{x} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad i = 1, \dots, k.$$

A nullhipotézis vizsgálatához tekintsük a következő összeget:

$$\begin{aligned}
 SST &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.} + \bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 + \\
 &\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.})(\bar{x}_{i.} - \bar{x}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 + n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2
 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.})(\bar{x}_{i.} - \bar{x}) = \sum_{i=1}^k \left((\bar{x}_{i.} - \bar{x}) \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) \right) = \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})(n \bar{x}_{i.} - n \bar{x}_{i.}) = 0.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$SST = SSE + SSR$$

ahol

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 \text{ és } SSR = n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2.$$

Ha igaz a nullhipotézis, akkor az SSE és az SSR mennyiségek egyaránt a kísérleti hibák, varianciák becslései.

Az SSE mennyiség $k \cdot n$ tagból áll és k darab átlag szerepel benne, ezért a szabadsági fokok száma $k \cdot n - k = k \cdot (n - 1)$:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 = \frac{SSE}{k(n-1)}.$$

Az SSR mennyiség k tagból és egy átlagból áll, ezért a szabadsági fokok száma $k-1$. Figyelembe véve, hogy n tagú átlag szórása szerepel benne:

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = \frac{SSR}{n(k-1)},$$

ezért

$$\sigma^2 \approx \frac{SSR}{k-1}.$$

Tehát, ha igaz a nullhipotézis, akkor az

$$F = \frac{SSR/(k-1)}{SSE/k(n-1)}$$

kifejezés F-eloszlású lesz $F_{k-1, k(n-1)}$ szabadsági fokkal.

SST szabadsági fokainak száma $k \cdot n - 1$, ennek meg kell egyeznie SSE és SSR szabadsági fokainak összegével, ami valóban teljesül:

$$k - 1 + k(n - 1) = kn - 1.$$

Ha nem igaz a nullhipotézis (létezik $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, k$), akkor SSE továbbra is a varianciára ad becslést, míg SSR a varianciára és az α_i tagok négyzetes összegére, ezért valószínű, hogy $SSR/(k-1) > SSE/k(n-1)$, tehát elegendő egyoldalú próbát végeznünk.

Ha $F < F_{\text{krit}}$, akkor a nullhipotézist elfogadjuk, egyébként elvetjük.

A számítást megkönnyíthetjük a következő egyszerűsítésekkel:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \bar{x} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - 2nk\bar{x}^2 + nk\bar{x}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - nk\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{T^2}{kn}, \end{aligned}$$

ahol

$$T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

valamint

$$\begin{aligned} SSR &= n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 = n \sum_{i=1}^k \bar{x}_{i.}^2 - 2n \sum_{i=1}^k \bar{x}_{i.} \bar{x} + n \sum_{i=1}^k \bar{x}^2 = n \sum_{i=1}^k \bar{x}_{i.}^2 - 2nk\bar{x}^2 + nk\bar{x}^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k T_{i.}^2 - \frac{T^2}{kn}, \end{aligned}$$

ahol

$$T_{i.} = \sum_{j=1}^n x_{i.}$$

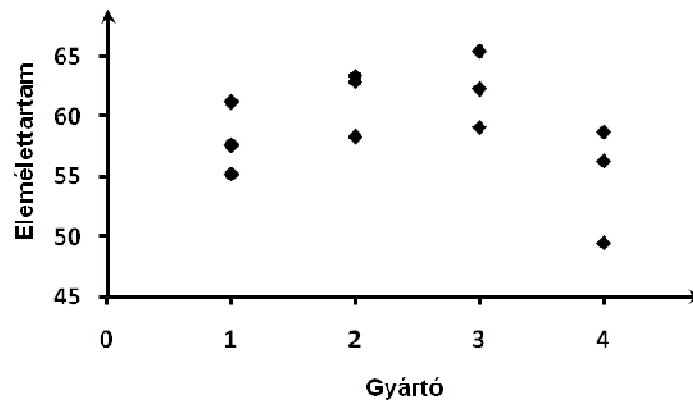
4.3. Példa egyváltozós szórásanalízisre

A következő táblázat négy különböző gyártó 3-3 azonos márkájú ceruzaelemének az élettartamát tartalmazza:

Gyártó	Élettartam (óra)		
1	55.2	57.6	61.2
2	58.3	63.4	62.9
3	65.4	62.3	59.1
4	49.5	58.7	56.3

Azt szeretnénk megvizsgálni, hogy van-e szignifikáns eltérés a különböző gyártók termékei között. Ehhez egyváltozós szórásanalízist végzünk, a gyártót tekintjük a faktornak, a faktorszintek az egyes gyártók, tehát négy faktorszint van és mindegyik szinten három ismétlés. A kísérletek eredménye az elemélettartam órában.

A nullhipotézis az, hogy mind a négy gyártó azonos élettartamú elemet gyárt. A 6. ábrán grafikusán ábrázoltuk az elemélettartamokat:



6. ábra

Az ábra alapján az elemek nem azonos élettartamúak, a 4. gyártó terméke határozottan rövidebb élettartamúnak tűnik a többitől. Vajon ugyanezt az eredményt adja-e a szórásanalízis? Az előző fejezet jelöléseit használva:

$$k = 4 \text{ és } n = 3$$

$$T = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij} = 55.2 + 57.6 + \dots + 58.7 + 56.3 = 709.9$$

$$T_{1.} = \sum_{j=1}^3 x_{1j} = 55.2 + 57.6 + 61.2 = 174$$

$$T_{2.} = \sum_{j=1}^3 x_{2j} = 58.3 + 63.4 + 62.9 = 184.6$$

$$T_{3.} = \sum_{j=1}^3 x_{3j} = 65.4 + 62.3 + 59.1 = 186.8$$

$$T_{4.} = \sum_{j=1}^3 x_{4j} = 49.5 + 58.7 + 56.3 = 164.5$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 = 55.2^2 + 57.6^2 + \dots + 58.7^2 + 56.3^2 = 42201.99$$

Ezután a statisztikák:

$$SST = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 - \frac{T^2}{kn} = 42201.99 - \frac{709.9^2}{4 \cdot 3} = 205.49$$

$$SSR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 T_i^2 - \frac{T^2}{kn} = \frac{1}{3} (174^2 + 184.6^2 + 186.8^2 + 164.5^2) - \frac{709.9^2}{4 \cdot 3} = 106.05$$

$$SSE = SST - SSR = 205.49 - 106.05 = 99.44$$

Most már a varianciák összehasonlíthatók:

$$F = \frac{SSR/(k-1)}{SSE/k(n-1)} = \frac{106.05/(4-1)}{99.44/4(3-1)} = \frac{106.5/3}{99.44/8} = 2.856$$

Ha igaz a nullhipotézis, akkor F eloszlása $F_{3,8}$. Néhány ehhez tartozó kritikus érték a mellékletekben lévő táblázatokból:

$$F_{3,8}^{-1}(0.90) = 2.924$$

$$F_{3,8}^{-1}(0.95) = 4.066$$

$$F_{3,8}^{-1}(0.99) = 7.591$$

Láthatjuk, hogy már $F < F_{\text{krit}}(0.90)$ is teljesül, vagyis a nullhipotézist elfogadhatjuk, azaz a különböző gyártók elemei azonos élettartamúnak tekinthetők.

A számított és a grafikonról vizuálisan sejthető eredmény eltérését a kis ismétlésszám és ezáltal a viszonylag nagy szórás okozza. Az ismétlésszám növelésével különbség adódhat az egyes gyártók termékei között.

5. KÍSÉRLETTERVEZÉS 3 FAKTOR ESETÉN

5.1. A háromfaktoros modell

A legtöbb valós kísérletben általában nem csak egy változó van. Az egyszempontos szórásanalízisnek ugyan van kétszempontos változata, de sokszor két változónál is több hatást kell vizsgálnunk.

A továbbiakban először háromváltozós, vagyis háromfaktoros kísérleteket vizsgálunk, a kidolgozott módszer a későbbiekben könnyen általánosítható lesz tetszőleges számú faktorra.

A vizsgálatok előtt két - számos esetben szigorúnak számító - megkötést kell tennünk a faktorokra, egyrészt teljesen függetlennek kell lenniük, másrészt mindhárom faktornak azonos számú szintjének kell lennie. Ha ezen megkötések teljesülnek, a kísérlettervezés történhet latin négyzetek felhasználásával.

Három faktor esetén minden lehetséges kísérleti beállításhoz összesen n^3 kísérletet kellene végeznünk, ha megelégszünk azzal, hogy bármely két faktor tekintetében minden kísérleti beállítás szerepeljen és csak pontosan egyszer, akkor elég n^2 kísérletet végeznünk. Például tegyük fel, hogy minden faktornak négy szintje van és tekintsük a következő latin négyzetet (7. ábra):

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

7. ábra

Feleljenek meg a sorok az egyik faktor szintjeinek, az oszlopok a másikkak és a négyzetbe írt számok pedig a harmadiknak. Jelölje mondjuk egy növénytermesztési kísérletnél a sorindex a műtrágya típusát, az oszlopindex a rovarirtó típusát, míg a négyzetbe írt szimbólumok a gabona típusát. A kísérlet során a termelt gabona mennyisége az eredmény. A latin négyzet tulajdonságaiból következik, hogy minden műtrágya pontosan egy

kísérletben szerepel együtt minden rovarirtóval vagy gabonával és egy rovarirtó valamint egy gabonafajta is pontosan egy kísérletben szerepel együtt a másik két faktor minden szintjével. Tehát n faktor esetén elég n^2 kísérletet végeznünk, hogy bármelyik két faktor bármelyik két szintje szerepeljen egy kísérletben és pontosan egyszer. Például a 2-es gabonafajta az (1, 2), (2, 4), (3, 3) és (4, 1) műtrágya-rovarirtó párossal szerepel egy kísérletben.

Legyen $x_{ij(k)}$ az i . műtrágya, a j . rovarirtó és a k . gabonafajta alkalmazása esetén termelt gabona mennyisége. A k index azért szerepel zárójelben, mert nem független az i és j értékektől, azok egyértelműen meghatározzák. A következő modellt állíthatjuk fel:

$$x_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij(k)}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Ez a modell természetes általánosítása a szórásanalízis során használt 4.2. részben tárgyalt modellnek. A modellben μ az összes elvégzett kísérlet eredményének, a gabona hozamoknak a várható értéke, az α_i tagok képviselik sorváltozó, a műtrágya i . szintjének hozzájárulását a termeléshez, a β_j tagok az oszlopváltozó, a rovarirtó j . szintjének hozzájárulását a termeléshez, a γ_k tagok pedig a szimbólum változó, a gabona fajta k . szintjének hozzájárulását a termeléshez, az $\varepsilon_{ij(k)}$ tagok a mérési hibák, független $N(0, \sigma^2)$ eloszlásúak ($\sigma > 0$).

Feltehetjük, hogy:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{k=1}^n \gamma_k = 0.$$

Hiszen például az α_i értékeket tetszőleges konstanssal csökkenthetjük, hogy az összegük 0 legyen, ha közben a μ értékét megnöveljük ezzel a konstanssal, ezt a β_j és γ_k értékekkel is megtehetjük. Ezután is fennáll, hogy μ az összes elvégzett kísérlet eredményének a várható értéke lesz. Továbbá a következő összegek kiszámolásakor egyszerre kiküszöbölhető két vagy három faktor hatása:

$$T_{i(.)} = \sum_{j=1}^n x_{ij(k)} = \sum_{j=1}^n (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij(k)}) = n\mu + n\alpha_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij(k)} \approx n(\mu + \alpha_i),$$

$$T_{.j(.)} = \sum_{i=1}^n x_{ij(k)} = \sum_{i=1}^n (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij(k)}) = n\mu + n\beta_j + \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij(k)} \approx n(\mu + \beta_j),$$

$$T_{..(k)} = \sum_{k=k_{\text{konst.}}} x_{ij(k)} = \sum_{k=k_{\text{konst.}}} (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij(k)}) = n\mu + n\gamma_j + \sum_{k=k_{\text{konst.}}} \varepsilon_{ij(k)} \approx n(\mu + \gamma_k),$$

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ij(k)}) = n^2 \mu + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij(k)} \approx n^2 \mu$$

Hiszen ha bármelyik faktor értékét rögzítjük, a másik két faktor pontosan egyszer felveszi mindegyik értékét, ezáltal külön becsülhetővé válik az egyes faktorok hatása az eredményre, vagyis a gabona hozamra.

Térjünk most vissza a modellre. Nullhipotézisünk legyen az, hogy egyetlen faktornak sincs hatása az eredményre. Mivel három faktorunk van és mindet külön szeretnénk vizsgálni, ezért három nullhipotézist fogalmazunk meg. Az első, hogy a sorváltozónak, vagyis a műtrágyának nincs hatása a gabonahozamra:

$$H_0^{(1)}: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

A második, hogy az oszlopváltozónak, a rovarirtónak nincs hatása a gabonahozamra:

$$H_0^{(2)}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0.$$

A harmadik, hogy a szimbólum változónak, a gabonafajtának nincs hatása a gabonahozamra:

$$H_0^{(3)}: \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0.$$

A megfelelő ellenhipotézisek, hogy valamelyik $\alpha_i \neq 0$, vagy valamelyik $\beta_j \neq 0$, vagy valamelyik $\gamma_k \neq 0$.

A hipotézisek teszteléséhez az egyváltozós szóráselemzéshez hasonlóan vizsgáljuk a következő négyzetes eltérés összeget, amely megadja az összes kísérleti eredmény eltérését az átlagtól:

$$SST = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x})^2.$$

Használjuk itt is a 4.2. résznél alkalmazott felbontást:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(\bar{x}_{i(\cdot)} - \bar{x}) + (\bar{x}_{j(\cdot)} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot(k)} - \bar{x}) \\ &+ (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i(\cdot)} - \bar{x}_{j(\cdot)} - \bar{x}_{\cdot(k)} + 2\bar{x})]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{i(\cdot)} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{j(\cdot)} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{\cdot(k)} - \bar{x})^2 + \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i(\cdot)} - \bar{x}_{j(\cdot)} - \bar{x}_{\cdot(k)} + 2\bar{x})^2 = n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i(\cdot)} - \bar{x})^2 + n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{j(\cdot)} - \bar{x})^2 + n \sum_{k=1}^n (\bar{x}_{\cdot(k)} - \bar{x})^2 + \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i(\cdot)} - \bar{x}_{j(\cdot)} - \bar{x}_{\cdot(k)} + 2\bar{x})^2 = SSR + SSC + SSS + SSE. \end{aligned}$$

A négyzetreemelés során az összes vegyesszortat eltűnik, nézzük például a következőt:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}) (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i.(.)} - \bar{x}_{.j(.)} - \bar{x}_{..(k)} + 2\bar{x}) &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}) (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i.(.)} - \bar{x}_{.j(.)} - \bar{x}_{..(k)} + 2\bar{x}) = \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n \left((\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}) \sum_{i=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i.(.)} - \bar{x}_{.j(.)} - \bar{x}_{..(k)} + 2\bar{x}) \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Az első egyenlőség azért teljesül, mert a kettős összeg az összes elvégzett kísérletre vonatkozik és a latin négyzet tulajdonságaiból adódóan ez az összegzés bármelyik két változóra ugyanazt adja. Az utolsó egyenlőség pedig azért teljesül, mert a második összegzésben szereplő kifejezés minden k esetén:

$$\sum_{i=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i.(.)} - \bar{x}_{.j(.)} - \bar{x}_{..(k)} + 2\bar{x}) = n\bar{x}_{..(k)} - n\bar{x} - n\bar{x} - n\bar{x}_{..(k)} + 2n\bar{x} = 0.$$

Tehát a felbontás során azt kaptuk, hogy:

$$SST = SSR + SSC + SSS + SSE,$$

ahol:

$$\begin{aligned}
 SSR &= n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i.(.)} - \bar{x})^2, \quad SSC = n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j(.)} - \bar{x})^2, \quad SSS = n \sum_{k=1}^n (\bar{x}_{..(k)} - \bar{x})^2 \text{ és} \\
 SSE &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x}_{i.(.)} - \bar{x}_{.j(.)} - \bar{x}_{..(k)} + 2\bar{x})^2.
 \end{aligned}$$

Ha igaz a nullhipotézis, akkor az SST, SSR, SSC, SSS és SSE mennyiségek segítségével egyaránt becslést kaphatunk a kísérletek varianciájára, melyek hányadosa F-eloszlású lesz. Viszont, ha nem igaz a nullhipotézis, akkor az SSR mennyiség mutatja a sorváltozó, a műtrágya fajtájának, az SSC mennyiség az oszlopváltozó, a rovarirtó fajtájának, az SSS mennyiség a szimbólum változó, a gabona fajtájának hatását az eredményre, a gabona hozamra. Az SSE mennyiség továbbra is a varianciára ad becslést.

Nézzük például az SSR mennyiséget a modell alapján:

$$SSR = n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i.(.)} - \bar{x})^2 = n \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i.(.)}}{n} - \frac{T}{n^2} \right)^2 \approx n \sum_{i=1}^n \left(\frac{n(\mu + \alpha_i)}{n} - \frac{n^2\mu}{n^2} \right)^2 = n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

A többi mennyiség jelentése is hasonlóan igazolható. A próba során célszerű az SSC, SSR és SSS mennyiségeket az SSE mennyiséghez viszonyítani, ha igaz a nullhipotézis akkor egy körüli értéket fogunk kapni, ha nem akkor attól akár jelentősen nagyobbat. Ezért ismét elegendő egyoldali próbát végezni.

A próba elvégzéséhez meg kell határoznunk az egyes mennyiségek szabadsági fokait. Az SST mennyiség n^2 kísérlet eredményének négyzetes eltérését tartalmazza az összes kísérlet átlagától, ezért a szabadsági fokainak száma $n^2 - 1$. Az SSC, SSR és SSS n tagból álló mennyiségek, különböző faktorszintek átlagainak négyzetes eltéréseit tartalmazzák az összes kísérlet átlagától, ezért a szabadsági fokainak a száma $n - 1$. Figyelembe véve, hogy n tagú átlagok négyzetes eltérése szerepel bennük, az SSR mennyiségre:

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{SSR}{n(n - 1)},$$

Tehát

$$\sigma^2 \approx \frac{SSR}{n - 1} = MSR.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sigma^2 \approx \frac{SSC}{n - 1} = MSC \text{ és } \sigma^2 \approx \frac{SSS}{n - 1} = MSS.$$

Már csak az SSE mennyiség szabadsági fokainak a számát kell meghatároznunk. Ez közvetlenül kissé nehézkes lenne, viszont felhasználhatjuk, hogy az SSR, SSC, SSS és SSE mennyiségek szabadsági fokainak az összege megegyezik az SST mennyiség szabadsági fokainak számával, ezért az SSE mennyiség szabadságfokainak a száma:

$$n^2 - 1 - 3(n - 1) = (n - 1)(n - 2).$$

Az SSE mennyiségben a kísérletek négyzetes eltérése szerepel, ezért:

$$\sigma^2 \approx \frac{SSE}{(n - 1)(n - 2)} = MSE.$$

Ha igaz a nullhipotézis, akkor az

$$F_R = \frac{MSR}{MSE}, \quad F_C = \frac{MSC}{MSE}, \quad F_S = \frac{MSS}{MSE}$$

mennyiségek $F_{n-1, (n-1)(n-2)}$ eloszlásúak. Ha $F_R < F_{krit}$, $F_C < F_{krit}$, $F_S < F_{krit}$, akkor a megfelelő nullhipotézist elfogadjuk, különben elvetjük.

Itt is van lehetőség a számítások egyszerűsítésére a fejezet elején bevezetett mennyiségek használatával:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k)}^2 - 2x_{ij(k)}\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k)}^2 - 2n^2\bar{x} + n^2\bar{x}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k)}^2 - n^2\bar{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k)}^2 - n^2 \left(\frac{T}{n^2}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k)}^2 - \frac{T^2}{n^2}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} SSR &= n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i(.)} - \bar{x})^2 = n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i(.)}^2 - 2\bar{x}_{i(.)}\bar{x} + \bar{x}^2) = n \sum_{i=1}^n \bar{x}_{i(.)}^2 - 2n^2\bar{x}^2 + n^2\bar{x}^2 = \\ &= n \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{i(.)}}{n}\right)^2 - n^2 \left(\frac{T}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i(.)}^2 - \frac{T^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$SSC = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{j(.)}^2 - \frac{T^2}{n^2} \quad \text{és} \quad SSS = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_{..(k)}^2 - \frac{T^2}{n^2},$$

végül

$$SSE = SST - SSR - SSC - SSS.$$

A kísérleti adatok birtokában először meghatározzuk a T , $T_{i(.)}$, $T_{j(.)}$, $T_{..(k)}$ segédmennyiségeket és az összes kísérlet eredményének a négyzetösszegét, majd kiszámoljuk az SST, SSR, SSC, SSS és SSE mennyiségeket, eztután az MSR, MSC, MSS és MSE mennyiségeket, végül az F_R , F_C és F_S mennyiségeket. Táblázatból kikeressük a kritikus értékeket és elvégezzük az összehasonlítást.

5.2. Példa háromfaktoros kísérlettervezésre

Nézzünk most a gyakorlatban az előző pontban többször hivatkozott növénytermesztési kísérletet. Egy szántóföldet 16 parcellára osztottunk. A 7. ábrán levő latin négyzetnek megfelelően a egyes sorokban más-más műtrágyát használtunk, az egyes oszlopokban más-más rovarirtót és a négyzetben levő számoknak megfelelően más-más búzafajtát, mindegyik változóból 4-4 félélt.

Aratás után a 8. ábrán látható búzahozamokat kaptuk. A hozamok alatt feltüntettük a szimbólum változó értékeit is, valamint a sor- és oszlopösszegeket és azok négyzetes értékét.

A kísérletek során mindhárom változónak 4 szintje volt, tehát $n = 4$. Ezután a műtrágya, a rovarirtó és a búzafajta változók szabadsági fokainak száma $4 - 1 = 3$, az SSE

hibabecslés szabadsági fokainak a száma $(4 - 1)(4 - 2) = 6$.

					$T_{i.(.)}$	$(T_{i.(.)})^2$
	112 (1)	132 (2)	110 (3)	116 (4)	470	220900
	89 (3)	94 (4)	98 (1)	110 (2)	391	152881
	90 (4)	81 (3)	115 (2)	94 (1)	380	144400
	120 (2)	105 (1)	72 (4)	84 (3)	381	145161
$T_{.j(.)}$	411	412	395	404	T = 1622	
$(T_{.j(.)})^2$	168921	169744	156025	163216		

8. ábra

A még hiányzó segédmenyiségek:

$$T_{..(1)}^2 = (112 + 98 + 94 + 105)^2 = 409^2 = 167281,$$

$$T_{..(2)}^2 = (132 + 110 + 115 + 120)^2 = 477^2 = 227529,$$

$$T_{..(3)}^2 = (110 + 89 + 81 + 84)^2 = 364^2 = 132496,$$

$$T_{..(4)}^2 = (116 + 94 + 90 + 72)^2 = 372^2 = 138384,$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_{ij(k)}^2 = 112^2 + 132^2 + \dots + 72^2 + 84^2 = 168372.$$

Ezután:

$$SST = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k)}^2 - \frac{T^2}{n^2} = 168372 - \frac{1622^2}{4^2} = 168372 - 164430.25 = 3941.75,$$

$$SSR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i.(.)}^2 - \frac{T^2}{n^2} = \frac{1}{4} (220900 + 152881 + 144400 + 145161) - 164430.25 = 1405.25,$$

$$SSC = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{.j(.)}^2 - \frac{T^2}{n^2} = \frac{1}{4} (168921 + 169744 + 156025 + 163216) - 164430.25 = 46.25,$$

$$SSS = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_{..(k)}^2 - \frac{T^2}{n^2} = \frac{1}{4} (167281 + 227529 + 132496 + 138384) - 164430.25 = 1992.25,$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SSS = 3941.75 - 1405.25 - 46.25 - 1992.25 = 498.0.$$

Most már kiszámolhatjuk a variancia közelítéseit:

$$MSR = \frac{SSR}{n-1} = \frac{1405.25}{3} = 468.42,$$

$$MSC = \frac{SSC}{n-1} = \frac{46.25}{3} = 15.42,$$

$$MSS = \frac{SSS}{n-1} = \frac{1992.25}{3} = 664.08,$$

$$MSE = \frac{SSE}{(n-1)(n-2)} = \frac{498.0}{3 \cdot 2} = 83.0.$$

A számolt F értékek:

$$F_R = \frac{MSR}{MSE} = \frac{468.42}{83.0} = 5.64, \quad F_C = \frac{MSC}{MSE} = \frac{15.42}{83.0} = 0.186, \quad F_S = \frac{MSS}{MSE} = \frac{664.08}{83.0} = 8.00.$$

A táblázatból kikeresett kritikus F értékek:

$$F_{3,6}^{-1}(0.90) = 3.289$$

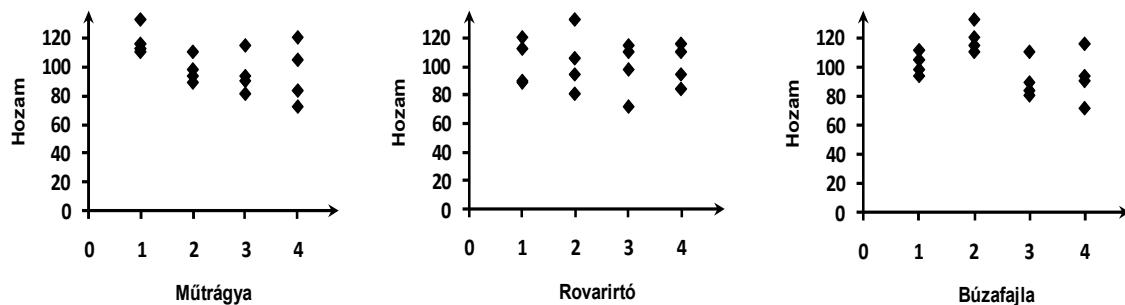
$$F_{3,6}^{-1}(0.95) = 4.757$$

$$F_{3,6}^{-1}(0.99) = 9.780$$

Láthatjuk, hogy már $F_C < F_{krit}(0.90)$ is teljesül, ezért az oszlopváltozóra vonatkozó nullhipotézist elfogadhatjuk, tehát a rovarirtónak nincs atása a búzahozamra. A másik két változó esetén viszont:

$$F_{krit}(0.95) < F_R, F_S < F_{krit}(0.99),$$

Ezért a műtrágya és a búzafajta változók esetén elvethetjük a nullhipotézist, ezeknek van hatása a búzahozamra. A 9. ábrán feltüntettük a hozamokat az egyes változók függvényében. Vizuálisan most már nehezebb következtetéseket levonni.



9. ábra

6. KÍSÉRLETTERVEZÉS LEGALÁBB 4 FAKTOR ESETÉN

6.1. A többfaktoros modell

Sokszor háromnál több faktort szeretnénk egyszerre vizsgálni, viszont egy latin négyzet egyszerre csak három faktor vizsgálatát teszi lehetővé. Kézenfekvőnek tűnik, hogy akkor egyszerre több latin négyzetet használjunk. Ez valóban megvalósítható a 3.2. fejezetben ismertetett ortogonális latin négyzetekkel.

A 10. ábrán ábrázoltunk két 4 x 4-es ortogonális latin négyzet párt:

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

4	3	2	1
1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3

10. ábra

A négyzetekhez úgy rendelünk változókat, hogy mindkét négyzetben ugyanaz legyen a sorváltozó és az oszlopváltozó, a szimbólum változók viszont különböznek, ezáltal két négyzet négy változó vizsgálatát teszi lehetővé n^2 kísérlet elvégzésével. A modell szempontjából fontos ortogonális tulajdonság itt is teljesül, vagyis minden változó minden szintje pontosan egy kísérletben szerepel együtt bármely másik változó bármely szintjével. Tehát a háromfaktoros modell gyakorlatilag teljesen megegyezik a többfaktoros modellel, csupán a szimbólum változók száma növekszik.

A háromfaktoros modellhez hasonlóan itt is megkötés, hogy minden faktornak azonos számú szintjének és bármely két faktornak függetlennek kell lennie. Ezenkívül van még egy megkötés. Adott n esetén maximum $n - 1$ tagú teljesen ortogonális latin négyzet rendszer létezhet és létezik is, ha n prímhatvány. Ezért, ha t jelöli a szimbólum változók számát ($t \geq 2$), mindig teljesülnie kell, hogy

$$t \leq n - 1, \quad \text{vagyis} \quad t + 2 \leq n + 1.$$

Azaz $n \times n$ -es latin négyzetek segítségével maximum $n + 1$ faktor hatását tudjuk vizsgálni n^2 kísérlettel. A következőkben csak a $t + 2 < n + 1$ esetet vizsgáljuk, az egyenlőségre majd

később visszatérünk.

A háromfaktoros modellhez hasonlóan a többfaktoros modell a következő:

$$x_{ij(k_1, \dots, k_t)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{k_1}^{(1)} + \dots + \gamma_{k_t}^{(t)} + \varepsilon_{ij(k_1, \dots, k_t)},$$

Ahol $x_{ij(k_1, \dots, k_t)}$ a sorváltozó i . szintjéhez és az oszlopváltozó j . szintjéhez tartozó kísérlet eredménye, μ az összes elvégzett kísérlet eredményének a várható értéke, az α_i tagok képviselik sorváltozó i . szintjének hozzájárulását a termeléshez, a β_j tagok az oszlopváltozó j . szintjének hozzájárulását a termeléshez, a $\gamma_{k_1}^{(1)}, \dots, \gamma_{k_t}^{(t)}$ tagok a szimbólum változók megfelelő szintjeinek hozzájárulását a termeléshez, az $\varepsilon_{ij(k_1, \dots, k_t)}$ tagok a mérési hibák, független $N(0, \sigma^2)$ eloszlásúak ($\sigma > 0$).

Most is feltehetjük, hogy

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{k_1=1}^n \gamma_{k_1}^{(1)} = \dots = \sum_{k_t=1}^n \gamma_{k_t}^{(t)} = 0.$$

A nullhipotézisek száma megegyezik a változók számával:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \\ H_0^{(2)}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0 \\ H_0^{(3)}: \gamma_1^{(1)} = \gamma_2^{(1)} = \dots = \gamma_t^{(1)} = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ H_0^{(t+2)}: \gamma_1^{(t)} = \gamma_2^{(t)} = \dots = \gamma_t^{(t)} = 0 \end{aligned}$$

A szórások összehasonlítása ismét az SST összeg - az összes kísérleti eredmény négyzetes eltérése az átlagtól - felbontásával történik:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k_1, \dots, k_t)} - \bar{x})^2 \\ SST &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left((\bar{x}_{i.(, \dots, ,)} - \bar{x}) + (\bar{x}_{.j(, \dots, ,)} - \bar{x}) + (\bar{x}_{..(k_1, \dots, ,)} - \bar{x}) + \dots + (\bar{x}_{i.(, \dots, k_t)} - \bar{x}) \right. \\ &\quad \left. + (x_{ij(k_1, \dots, k_t)} - \bar{x}_{i.(, \dots, ,)} - \bar{x}_{.j(, \dots, ,)} - \bar{x}_{..(k_1, \dots, ,)} - \bar{x}_{i.(, \dots, k_t)} + (t+1)\bar{x}) \right)^2 \end{aligned}$$

A négyzetreemelés után az összes keresztszorzat eltűnik, az 5.1. részben leírt bizonyítás szinte teljes egészében átvehető. Végül a következő kifejezést kapjuk:

$$SST = SSR + SSC + SSS_1 + \dots + SSS_t + SSE,$$

ahol

$$\begin{aligned} SSR &= n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i.(, \dots,)} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i.(, \dots,)}^2 - \frac{T^2}{n^2} \\ SSC &= n \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{.j(, \dots,)} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{.j(, \dots,)}^2 - \frac{T^2}{n^2} \\ SSS_1 &= n \sum_{k_1=1}^n (\bar{x}_{..(k_1, \dots,)} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{..(k_1, \dots,)}^2 - \frac{T^2}{n^2} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ SSS_t &= n \sum_{k_t=1}^n (\bar{x}_{..(, \dots, k_t)} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{..(, \dots, k_t)}^2 - \frac{T^2}{n^2} \\ SST &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij(k_1, \dots, k_t)} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k_1, \dots, k_t)}^2 - \frac{T^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SSS_1 - \dots - SSS_t$$

A kifejezésekben feltüntettük az egyszerűsített kiszámításmódjukat is, T az összes kísérlet eredményének az összege, $\bar{x}_{i.(, \dots,)}, \bar{x}_{.j(, \dots,)}, \bar{x}_{..(k_1, \dots,)}, \dots, \bar{x}_{..(, \dots, k_t)}$ azon kísérletek eredményének az átlaga ahol a sorváltozó az i értéket, az oszlopváltozó a j értéket, az 1. szimbólum változó a k_1 értéket..., a t. szimbólum változó a k_t értéket veszi fel, $T_{i.(, \dots,)}, T_{.j(, \dots,)}, T_{..(k_1, \dots,)}, \dots, T_{..(, \dots, k_t)}$ pedig azon kísérletek eredményének az összege ahol a sorváltozó az i értéket, az oszlopváltozó a j értéket, az 1. szimbólum változó a k_1 értéket..., a t. szimbólum változó a k_t értéket veszi fel.

Az SST összeg szabadsági fokainak száma $n^2 - 1$, míg az SSC, SSR, $SSS_1, \dots, SSS_t$ mennyiségeké a háromfaktoros modellhez hasonlóan $n - 1$, az utóbbi mennyiségekben n tagú átlagok négyzetes eltérése szerepel, ezért:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\approx \frac{SSR}{n - 1} = MSR, \\ \sigma^2 &\approx \frac{SSC}{n - 1} = MSC, \\ \sigma^2 &\approx \frac{SSS_1}{n - 1} = MSS_1, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

$$\sigma^2 \approx \frac{SSS_t}{n-1} = MSS_t,$$

Az SSE mennyiség szabadsági fokainak száma:

$$n^2 - 1 - (t+2)(n-1) = (n-1)(n-t-1), \text{ ezért}$$

$$\sigma^2 \approx \frac{SSE}{(n-1)(n-t-1)} = MSE.$$

Ha $t+2 < n+1$, azaz $t < n-1$, akkor a fenti kifejezés pozitív egész szám és eddig ezzel az esettel foglalkoztunk.

Viszont, ha $t+2 = n+1$, akkor az SSE kifejezésnek nem lesz szabadsági foka, így a valódi szórásra nem lehet becslést adni. Ezt az esetet a következőképpen szemléltethetjük: van két faktorunk és mindkettőnek csak egy szintje van. Elvégezzünk két kísérletet, két különböző eredményt kapunk. El tudjuk-e dönteni, hogy a különböző eredmények a faktorok hatásának következményei, vagy csak a kísérletek szórásából fakadnak? Bármelyik esetet választhatjuk, dönteni köztük nem tudunk. Viszont, ha még egyszer elvégezzük ugyanazt a két kísérletet, akkor már lesz információnk a szórásról és ezáltal a faktorok hatása is vizsgálható. Ez a megoldás több faktor esetén is alkalmazható, ha megismételjük az összes kísérletet, akkor az SSE mennyiségnek is lesz szabadsági foka. Persze erre nincs feltétlenül szükség, elég ha valamilyen jól megtervezett beállításnál – például a faktortér középpontjában, ha értelmezhető – elvégezzünk néhány kísérletet a szórás meghatározásához. A továbbiakban ezzel az esettel nem foglalkozunk.

Ha teljeülnek a nullhipotézisek, akkor az MSR , MSC , $MSS_1, \dots, MSS_t$ mennyiségek és az MSE mennyiség hányadosa F -eloszlású $n-1$ és $(n-1)(n-t-1)$ szabadsági fokkal. Ha a számolt F érték kisebb a táblázatból kikeresett F_{krit} értéknél, akkor a nullhipotézist elfogadjuk, különben elvetjük. Az összehasonlítás minden faktorra külön elvégezhető.

6.2. Példa többfaktoros kísérlettervezésre

Egy cég szeretne egy új energiatöltő bevezetni a piacra. Ehhez az országban 4 régiót jelöltek ki tesztelés céljából, a vizsgált szempontok a csomagolás, a reklámkampány és a koffeintartalom voltak, minden faktornál négy különböző értéket vizsgáltak, összesen 16 kísérletet végeztek. Az eredmény az adott idő alatt vásárolt energiatöltő mennyisége volt száz doboz egységben.

A 11. ábrán látható ortogonális latin négyzet párt használták a kísérlet megtervezéséhez. A sorváltozó a régió volt, az oszlopváltozó a csomagolás, az első

szimbólum változó a reklámkampány típusa, a második szimbólum változó pedig a koffeintartalom volt.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

11. ábra

A kísérletek eredményei a 12. ábrán láthatók, az eredmények alatt zárójelben feltüntettük a szimbólumváltozókat is.

56 (1, 1)	71 (2, 2)	59 (3, 3)	59 (4, 4)
54 (3, 4)	69 (4, 3)	57 (1, 2)	68 (2, 1)
50 (4, 2)	75 (3, 1)	53 (2, 4)	64 (1, 3)
51 (2, 3)	72 (1, 4)	59 (4, 1)	68 (3, 2)

12. ábra

A faktorok számának növekedésével egyre több számítást kell végezni, ezért a jobb áttekinthetőség érdekében célszerű táblázatban feltüntetni a számítási eredményeket. A következő táblázatban az adott faktorértékhez tartozó kísérleti eredmények összege és a belőlük származtatott mennyiségek láthatók:

Faktorszint (n = 4)	1	2	3	4	T	$\sum T_x^2$	$\frac{1}{4}\sum T_x^2$
Régió	245	248	242	250	985	242593	60648.25
Csomagolás	211	287	228	259	985	245955	61488.75
Reklám	249	243	256	237	985	242755	60688.75
Koffein	258	246	243	238	985	242773	60693.25

Az SSR, SSC, SSS₁,..., SSS_t mennyiségek kiszámolásához szükséges tag:

$$\frac{T^2}{n^2} = \frac{985^2}{4^2} = \frac{970225}{16} = 60639.06$$

$$SST = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij(k_1, \dots, k_t)}^2 - \frac{T^2}{n^2} = 56^2 + 71^2 + \dots + 59^2 + 68^2 - 60639.06 = 969.94$$

A többi mennyiség kiszámolásához szükséges összefüggések:

$$\begin{aligned} SSR &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{i.(, \dots,)}^2 - \frac{T^2}{n^2}, & MSR &= \frac{SSR}{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \\ SSS_t &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{..(, \dots, k_t)}^2 - \frac{T^2}{n^2}, & MSS_t &= \frac{SSS_t}{n-1} \end{aligned}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SSS_1 - \dots - SSS_t, \quad MSE = \frac{SSE}{(n-1)(n-t-1)}.$$

Az SSR, SSC, SS₁, ..., SSS_t mennyiségek szabadsági fokainak száma $n-1 = 4-1 = 3$, az SSE mennyiség szabadsági fokainak száma $(n-1)(n-t-1) = (4-1)(4-2-1) = 3$, az SST mennyiség szabadsági fokainak száma $n^2 - 1 = 4^2 - 1 = 16$. A számolási eredmények a következő táblázatban láthatók:

Faktor	Szabadsági fokok száma	SS(X)	MS(X)	F számolt MS(X)/MSE
Régió (R)	3	9.19	3.06	1.28
Csomagolás (C)	3	849.69	283.23	118.5
Reklám (S ₁)	3	49.69	16.56	6.93
Koffein (S ₂)	3	54.19	18.06	7.56
Hiba	3	7.18	2.39	
Összesen	15	969.94		

A táblázatból kikeresett kritikus F értékek:

$$F_{3,3}^{-1}(0.90) = 5.391$$

$$F_{3,3}^{-1}(0.95) = 9.277$$

$$F_{3,3}^{-1}(0.99) = 29.46$$

Az adatok összehasonlítása alapján a következőket állapíthatjuk meg:

$$F_R < F_{krit}(0.90) < F_{S_1}, F_{S_2} < F_{krit}(0.95) < F_{krit}(0.99) < F_C$$

Tehát a régiótól nem függ a vásárolt energiatartal mennyisége, a reklámozás módjától és a koffeintartalomtól valamennyire függhet, ehhez további kísérletek elvégzése szükséges, a csomagolás módjától viszont határozottan függ.

7. ÖSSZEFOGLALÁS

Egy kísérlet eredményét számos tényező, faktor befolyásolhatja. A kísérlettervezés első és egyik legfontosabb feladata annak kiderítése, hogy valójában mely faktorok hatnak a kísérlet eredményére és melyek nem.

Szakedolgozatomban egy hatékony kísérlettervezési módszert ismertetek, mely lehetővé teszi, hogy az elvileg lehetséges kísérleti beállítások számánál jóval kevesebb kísérleti beállítással megválaszolhassuk az iménti kérdést.

Dolgozatom első felében ismertetem a módszer felépítéséhez szükséges fogalmakat. Először a latin négyzeteket, utána a statisztikai definíciókat és eszközöket, különös tekintettel az egyszempontos varianciaanalízisre.

A latin négyzetek $n \times n$ -es méretű táblázatok, melyek minden sorban és minden oszlopban ugyanazt az n különböző szimbólumot tartalmazzák pontosan egyszer. Definíciójukból adódóan különleges szimmetriával rendelkeznek, mely lehetővé teszi felhasználásukat éppúgy bűvös négyzetek készítésére, mint statisztikai analízisben a faktorok hatásának szétválasztására.

Legyegeyszerűbb kísérlettervezési módszernek az egyszempontos varianciaanalízis tekinthető, ugyanis megmutatja hogy egy faktor hatással van-e egy kísérlet eredményére vagy sem. A varianciaanalízisnek van kétszempontos változata is, de három faktor esetén már nem használható.

Egy latin négyzet sor- és oszlopindexeihez, valamint a négyzetbe írt szimbólumokhoz egy-egy faktor szintjeit rendelve három faktor vizsgálatára alkalmas modellt kapunk, mely kiterjeszthető több faktor vizsgálatára ortogonális latin négyzetek felhasználásával.

Szakedolgozatomban kiemelem, hogy a latin négyzeteken alapuló kísérlettervezés az egyszempontos varianciaanalízis természetes általánosításának tekinthető.

Mint minden módszernek, a latin négyzeteken alapuló kísérlettervezésnek is vannak korlátai. Egyrészt minden vizsgált faktornak statisztikai értelemben függetlennek kell lennie, másrészt minden faktornak azonos számú szinttel kell rendelkeznie. Több faktor vizsgálata esetén van egy harmadik kikötés is, a vizsgált faktorok száma maximum eggyel haladhatja meg a faktorok szintjeinek a számát.

Az egyszempontos varianciaanalízis, a három- és többfaktoros kísérlettervezés használatát egyaránt egy-egy példával szemléltetem.

8. MELLÉKLETEK

Az F-eloszlás kritikus értékei²

$$F_{m,n}^{-1}(0.90)$$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.20
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	3.377	2.347	2.323

$$F_{m,n}^{-1}(0.95)$$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.014	8.941	8.887	8.450	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.410	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.773	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.501	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.257	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.136	3.072	3.020	2.978

$$F_{m,n}^{-1}(0.99)$$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.75	10.93	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.25	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.26	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.56	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.04	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849

9. NYILATKOZAT

Alulírott **Takács László, matematika BsC_LAK** szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat/diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Aláírás

Dátum

10. IRODALOMJEGYZÉK

1. Dénes Tamás, Híradástechnika LIX. évfolyam, 2004/10, 19-24

Latin és bűvös négyzetek a játékos alkalmazásoktól a biztonságig

2. Viharos László, POLYGON Jegyzettár, 2008

A sztochasztika alapjai

3. Laywine C.F., Mullen G.L., Wiley Interscience Publications, New York, 1998

Discrete mathematics using Latin squares, Chapter 12. Statistics