

SZAKDOLGOZAT

4-dimenziós centrális tulajdonságú politópok

Zarnócz Tamás

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2012

Tartalomjegyzék

1. Összefoglalás, célkitűzés	3
2. Bevezetés	4
2.1. Jelölések	4
3. Politópok	5
3.1. Politópokról általában	5
3.1.1. Speciális politópok	6
3.1.2. Antipodális politópok	8
3.2. 4-dimenziós centrális tulajdonságú politópok	9
Köszönetnyilvánítás	15
Irodalomjegyzék	16
Ábrák	17
Nyilatkozat	19

1. fejezet

Összefoglalás, célkitűzés

Dolgozatomban erősen élantipodális és centrális tulajdonságú politópokkal foglalkozok. Vizsgálataim alapjául elsősorban Bisztriczky, Böröczky, Fodor, Heppes és Oliveros [4] cikke szolgál, melyben a 4-dimenziós kocka centrált részpolitópjairól van szó. Az általam tekintett kérdés is ebben a cikkben merült fel.

Az antipodális politópok vizsgálata Erdős Pál sejtésével indult el, miszerint bármilyen $\mathbb{E}^d$ -beli, 2^d -nél nagyobb elemszámú halmazban van 3 pont, melyek egy tompaszögű háromszög csúcsai. Pár évvel később Victor Klee pedig azt a kérdést tette fel, hogy mekkora lehet egy $\mathbb{E}^d$ -beli ponthalmaznak a maximális számossága, amelynek bármely két különböző x, y pontjára létezik a halmaznak H_x, H_y párhuzamos támaszhipersíkja úgy, hogy $x \in H_x$ és $y \in H_y$. A két problémát egyszerre oldotta meg 1962-ben Danzer és Grünbaum [6]. Az ő eredményeiről olvashatunk még magyarul G. Horváth Ákos és Lángi Zsolt [8] könyvében. Ez utóbbiban is említésre kerül, de külön is megemlítem Talata István nevét, aki [9] cikkében bevezette az *élantipodális politópok* fogalmát. Mi ebben a dolgozatban egy ennél szűkebb osztállyal fogunk foglalkozni, az *erősen élantipodális* politópokkal, és az ezekkel párhuzamosan vizsgálható *centrális tulajdonságúakkal*.

Látni fogjuk a 3. fejezetben, hogy az erős élantipodalitás helyett ugyanolyan hasznos a centrális tulajdonságot vizsgálni, hiszen az erősen élantipodális, illetve a centrális tulajdonságú politópok egymás polárisai. 3 dimenzióban az összes (erősen) élantipodális politóp (így minden centrális tulajdonságú is) ismert. 4 dimenzióban azon centrális tulajdonságú politópok ismertek, melyek a 4-kocka részpolitópjai, számuk 32. Ezekről bővebben a [4] cikkben olvashatunk. Azonban később rámutatunk, hogy létezik olyan centrális tulajdonságú 4-politóp is, mely nem 0/1-politóp. Van tehát értelme további olyan magasabb dimenziós politópokat keresni, melyek rendelkeznek a – később pontosan definiált – centrális tulajdonsággal. Ebben a dolgozatban a legegyszerűbb, még ismeretlen esettel fogunk kiemelten foglalkozni, azaz a 4-dimenziós, (azon belül is a lehető legkevesebb átlóval rendelkező) centrális tulajdonságú politópokkal.

2. fejezet

Bevezetés

2.1. Jelölések

Ebben a részben bevezetjük a téma tárgyalásához szükséges jelöléseket.

Az $\mathbb{E}^d$ d -dimenziós térben fogunk dolgozni. Ennek pontjait kis latin betűkkel jelöljük, mint például x , vagy x_1, x_2 stb. Speciálisan az origót o jelöli. A pontthalmazok jelölésére nagy latin betűket fogunk használni: $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$, $P = [x_1, x_2 \dots x_n]$. Az előbb látott $[x, y, z]$ rövidített jelölése a $\text{conv}(x, y, z)$ -nek, azaz a pontok konvex burkának. Itt jegyezzük meg, hogy ha nem mondunk mást, akkor az alsó indexszel ellátott kis latin betű, mint például az x_1 az szintén az $\mathbb{E}^d$ euklideszi tér egy pontja. Azon kevés esetben, mikor koordinátát jelöl, azt külön jelezni fogjuk. A tér pontjait azonosítjuk az adott pont helyvektorával, s jelölésben sem teszünk különbséget (a szövegkörnyezetből kiderül, hogy melyikre gondolunk)

Az $\mathbb{E}^d$ téren definiáljuk a szokásos $\langle x, y \rangle$ -nal jelölt belső szorzást (s ezáltal a szokásos normát is) a következőképpen:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i,$$

ahol $x, y \in \mathbb{E}^d$, $x = (x_1 \dots x_d)$, $y = (y_1 \dots y_d)$. A szokásos euklideszi normája egy vektornak pedig az önmagával vett belső szorzatának (normanégyzetének) a négyzetgyöke, jelölése pedig: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Az $\mathbb{E}^d$ d -dimenziós térben *hipersík* alatt egy $(d - 1)$ -dimenziós affin alteret értünk, avagy vele ekvivalensen egy lineáris egyenlet megoldáshalmazát: $H = \{x \mid x_1 v_1 + \dots + x_d v_d = c, v = (v_1 \dots v_d) \in \mathbb{E}^d, c \in \mathbb{E}^d, x = (x_1 \dots x_d)\}$. Egy hipersík két diszjunkt nyílt féltérre bontja a teret.

3. fejezet

Politópok

3.1. Politópokról általában

A politópokat jellemzően kétféleképp szoktuk definiálni. Az egyik definíció szerint politóp alatt véges sok pont konvex burkát értjük. A másik definícióhoz először a poliédereket definiáljuk, mint véges sok zárt féltér metszetét, s politópnak a korlátos poliédereket nevezzük. Belátható, hogy a két definíció egymással ekvivalens. Következzen néhány számkra szükséges definíció.

3.1.1. Definíció (Affin (konvex) burok). *Egy pontthalmaz affin (konvex) burkán a pontthalmazt tartalmazó összes affin altér (konvex halmaz) metszetét értjük.*

A konvex burok fogalmára már a politópok definíciójához szükségünk lesz, az affin burok pedig a tartalmazó hipersík fogalmához lesz szükséges.

3.1.2. Definíció (Konvex politóp). *Az $\mathbb{E}^d$ euklideszi térben politópnek nevezzük véges sok pont konvex burkát. Politóp dimenziója alatt affin burkának dimenzióját értjük.*

Egy politóp lapjainak definiálásához szükségünk lesz a támaszhipersík fogalmára is.

3.1.3. Definíció (Támaszhipersík). *Egy pontthalmaz támaszhipersíkján olyan hipersíkot értünk, melynek van közös pontja a pontthalmazzal és a halmaz minden pontja ugyanabban a (hipersík által határolt) zárt féltérben van.*

Végül a fogalom, ami miatt bevezetésre került a támaszhipersík, nézzük mit értünk politóp egy lapján.

3.1.4. Definíció. *A P politóp lapján egy támaszhipersíkjával vett metszetét értjük.*

Ismert, hogy egy $P \subset \mathbb{E}^d$ konvex politóp minden lapja is (kisebb dimenziós) konvex politóp, hiperlapjai $(d-1)$ -dimenziósak. A P politóp i -dimenziós (ahol $i = 1, 2, \dots, n-1$)

lapjainak halmazát $\mathcal{F}_i(P)$ jelöli. Amennyiben az alsó indexet elhagyjuk, úgy a hiperlapok halmazát jelentse, azaz az index hiánya esetén annak helyére $(n - 1)$ értendő. Ha egy halmazt abszolútérték jelek közé zárunk, akkor annak számosságára gondolunk, így pl. $|\mathcal{F}_0(P)|$ a P politóp csúcsainak számát jelenti.

Egy fontos eljárás az úgynevezett *polarizálás*.

3.1.5. Definíció. Rögzített origó esetén az $\mathbb{E}^d$ térben egy origótól különböző x pont polárisán azt a x^* zárt féltérrel értjük, melynek határoló hipersíkja merőleges az origó és az x pont által meghatározott szakaszra, az origót belsejében tartalmazza, attól mért távolsága $\|x\|^{-1}$, illetve a határoló hipersík az o végpontú x -et tartalmazó félegyenest metszi (röviden az $\langle u, x \rangle \leq 1$ megoldáshalmazát). Egy pont tartalmaz polárisa alatt pedig az összes pont polárisának metszetét értjük.

Tudjuk, hogy konvex politópok polárisa is konvex politóp, melyet csúcsainak polarizálásával kaphatunk. Konvex politóp polárisának polárisa önmaga. A P d -politóp lapjainak halmazán a polarizálás egy a tartalmazás relációt megfordító eljárás, így k -dimenziós lapokból $(d - k - 1)$ -dimenziósak lesznek, illetve ha P egy F lapjának lapja volt G , akkor a P^* -gal jelölt poláris politópban a G -nek megfelelő lapnak lapja lesz az F -nek megfelelő lap. Így például $|\mathcal{F}_0(P)| = |\mathcal{F}(P^*)|$, illetve $x \in \mathcal{F}_0(P)$ csúcs megfelelője a P^* politópban egy X hiperlap, melynek annyi hiperlapja van, mint amennyi hiperlap x -et tartalmazta P -ben.

3.1.1. Speciális politópok

Elöljáróban megjegyezzük, hogy az általunk vizsgált fogalmak, tehát az antipodalitás, él-antipodalitás, erős él-antipodalitás és a centrális tulajdonság is érzéketlen a nemelfajuló affín transzformációkra, így számunkra csupán a politópok affín invariáns tulajdonságai lesznek fontosak. Nézzük meg néhány minden dimenzióban létező politóp tulajdonságát.

d-szimplex

A legegyszerűbb d -politóp a d -szimplex, melyet $d + 1$ affín független pont konvex burkaként kapunk. Egy szimplex minden lapja is kisebb dimenziós szimplex. Ha a szimplex csúcsai azonos távolságra vannak egymástól, akkor szabályos szimplexről beszélünk. A standard szabályos d -szimplexet általában $\mathbb{E}^{d+1}$ -be szoktuk beágyazni, mint a standard bázisvektorok végpontjainak konvex burka (ekkor nyilván $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú szimplexet kapunk), és $\triangle_d$ -vel jelöljük. A szimplex polárisa is szimplex, illetve bármely két azonos dimenziós szimplex egymás affín képe. Minden dimenzióban létezik szabályos szimplex.

d -kocka

Két szokásos koordinátázása van a standard kockának $\mathbb{E}^d$ -ben. Az egyik a ± 1 koordinátákból álló összes (2^d darab) pont konvex burka (2 élhosszúságú standard kocka), a másik pedig a 0 és 1 koordinátákból álló pontok konvex burka (standard egységkocka), ez utóbbit jelöljük C_d -vel, viszont ha polarizáljuk, azt mindig úgy értjük, hogy az origót a belsejében tartalmazza (ami egy eltolással könnyen elérhető). A kockának minden lapja is kisebb dimenziós kocka. A szimplexhez hasonlóan (szabályos) kocka is létezik minden dimenzióban, sőt, kockából, illetve bármely (nemelfajuló) affin képéből álló *kövezés* is létezik minden dimenzióban (azaz egybevágó kockákkal hézag- és átfedésmentesen lefedhető a tér úgy, hogy bármely két kocka metszete vagy üres, vagy közös lap). A d -kocka polárisa a C_d^* -gal jelölt d -dimenziós keresztpolitóp.

d -dimenziós keresztpolitóp

A d -dimenziós standard keresztpolitópot megkaphatjuk, mint az egységvektorok, illetve ellentettjeik végpontjának konvex burka. A 2-dimenziós keresztpolitóp megegyezik a kockával (csak épp „élére van állítva” a koordinátarendszerben). A keresztpolitóp minden lapja kisebb dimenziós szimplex. A keresztpolitóp polárisa a megfelelő dimenziós kocka.

Gúla

Vegyünk egy tetszőleges Q $(d - 1)$ -dimenziós konvex politópot, majd vegyünk ennek affin burkán kívül egy x pontot. Ekkor $P = \text{conv}(Q, x)$ politópot Q -alapú d -dimenziós gúlának nevezzük.

Kettős gúla

A gúlához hasonlóan a d -dimenziós kettős gúla a $(d - 1)$ -dimenziós Q politóp, a tartalmazó hipersíkja „alatt” levő x , s a „fölötte” levő y pont konvex burkaként áll elő, amennyiben $[x, y] \cap Q \neq \emptyset$.

Hasáb, antiprizma

Legyen Q egy $(d - 1)$ -dimenziós politóp $\mathbb{E}^d$ -ben, affin burka legyen a H hipersík. Toljuk el Q -t egy H -val nem párhuzamos pozitív nagyságú vektorral, az eltolt legyen Q' . Ekkor Q és Q' konvex burkát d -dimenziós Q alapú hasábnak nevezzük. Ha pedig a Q' politópot el is forgatjuk a tartalmazó hipersíkján belül, akkor az így keletkező Q'' politóp és a Q konvex burkát Q -alapú antiprizmának nevezzük.

3.1.2. Antipodális politópok

3.1.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $X \subset \mathbb{E}^d$ ponthalmaz két pontja x_1, x_2 antipodális, ha létezik H_1, H_2 párhuzamos támaszhipersíkpárja X -nek úgy, hogy $x_1 \in H_1$ és $x_2 \in H_2$. Az X ponthalmaz akkor antipodális ponthalmaz, ha bármely két pontja antipodális.

3.1.7. Definíció. Egy P politóp

- antipodális, ha $\mathcal{F}_0(P)$ (azaz P csúcshalmaza) antipodális ponthalmaz;
- él-antipodális, ha bármely $[x_1, x_2] \in \mathcal{F}_1(P)$ élére x_1 és x_2 antipodális;
- erősen él-antipodális [3], ha bármely él két végpontja különböző párhuzamos hiperlapon fekszik.

Fontos megjegyeznünk, hogy az erősen él-antipodális politópok az él-antipodálisak egy részhalmazát alkotják, viszont 4 dimenzióban és fölötté az antipodális és az él-antipodális fogalmak különböznek. Talata István bizonyította be a [9] cikkében, hogy $d \geq 4$ esetén az él-antipodalitásból nem feltétlen következik az antipodalitás.

Az alábbi tétel, mely az [1, 2, 10] cikkekből származik – és mi a [3] cikkben megtalálható formájában idézzük – osztályozza az él-antipodális 3-politópokat:

3.1.8. Tétel. Egy él-antipodális 3-politóp egyike a következők valamelyikének:

- szimplex ($\triangle_d$ affin képe),
- paralelogramma alapú gúla,
- háromszög alapú kettős gúla,
- * oktaéder (keresztpolitóp, C_3^*), melynek szemközti lapjai párhuzamosak,
- háromszög alapú hasáb,
- háromszög alapú antiprizma,
- * affin kocka (C_3 affin képe),
- * C_3 7 csúcsának konvex burka C_3' (Egy csúcsától megfosztott kocka),
- * C_3 egy élének „összehúzásával” nyert C_3'' .

A sorok elején csillaggal jelöltük közülük az erősen él-antipodális politópokat, ezek polárisai a centrális tulajdonságúak (lásd 3.2.1. Definíció illetve 3.1. ábra).

Magasabb dimenzióban Bisztriczky és Böröczky [3] bebizonyította, hogy az egyszerű él-antipodális politópok antipodálisak és pontosan leírták az egyszerű antipodális politópok típusait.

3.1.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy P politóp F_1 és F_2 hiperlapjai szomszédosak, ha metszetük $(d - 2)$ -dimenziós. Hasonlóan, a politóp két k dimenziós lapja $(0 < k < d)$ szomszédos, ha metszetük $(k - 1)$ -dimenziós.

3.2. 4-dimenziós centrális tulajdonságú politópok

A centrált politópok definíciója megtalálható például a [4] cikkben, ezt a definíciót használom itt is.

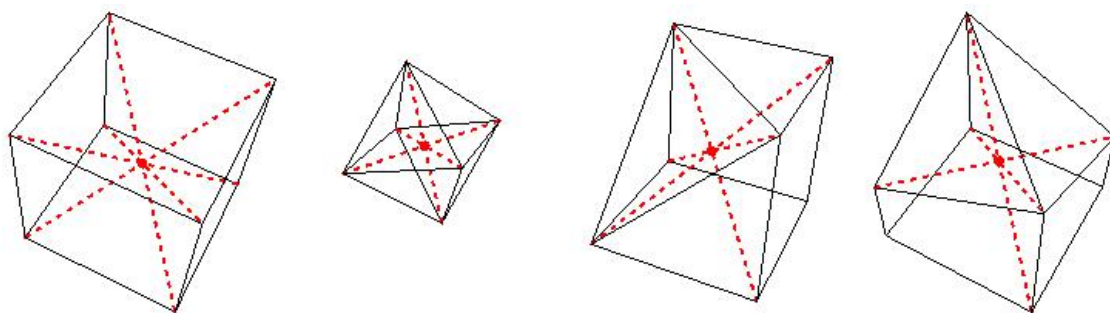
3.2.1. Definíció (Centrális tulajdonság). A P konvex d -politópot centrális tulajdonságúnak nevezünk, ha létezik egy $o \in P$ pont úgy, hogy P bármely szomszédos F_1, F_2 hiperlappárjára létezik egy $[v_1, v_2]$ szakasz (később átló), mely belsejében tartalmazza o -t, s melynek v_1, v_2 végpontjai csúcsok úgy, hogy $v_1 \in F_1 \setminus F_2$, illetve $v_2 \in F_2 \setminus F_1$. Az előbbi $[x_1, x_2]$ szakasz a politóp egy átlója, az o pont pedig a politóp centruma.

Az alábbi tétel biztosítja számunkra, hogy amennyiben a centrált politópokat vizsgáljuk, úgy az ott kapott eredmények az erősen él-antipodális politópokról is mondanak valamit. A tétel megtalálható a [4] cikkben egy észrevételként.

3.2.2. Tétel. Egy P politóp pontosan akkor erősen él-antipodális, ha P^* polárisa centrált.

Az erősen él-antipodális 3-politópok polárisai pontosan a 3-dimenziós centrális tulajdonságúak politópok, ezek rendre C_3, C_3^*, C_3' (önduális), C_3''' .

Bisztriczky és Böröczky a [3] cikkükben felteszik a kérdést, hogy létezik-e olyan erősen él-antipodális politóp, amely nem részpolitópja a C_d kockának. Vegyük észre, hogy a válasz igen, azaz létezik olyan centrált 4-politóp, mely nem részpolitópja a 4-kockának. Nézzük ugyanis C_3''' -ot. Ez egy 3-dimenziós erősen él-antipodális politóp, melynek konstrukciója 4-dimenzióban is erősen él-antipodális politópot eredményez, így polárisa centrális tulajdonságú 4-politóp.

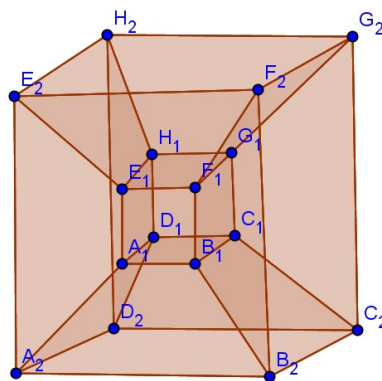


3.1. ábra. A 3-dimenziós centrált politópok (balról: kocka, oktaéder, C_3' , C_3''')

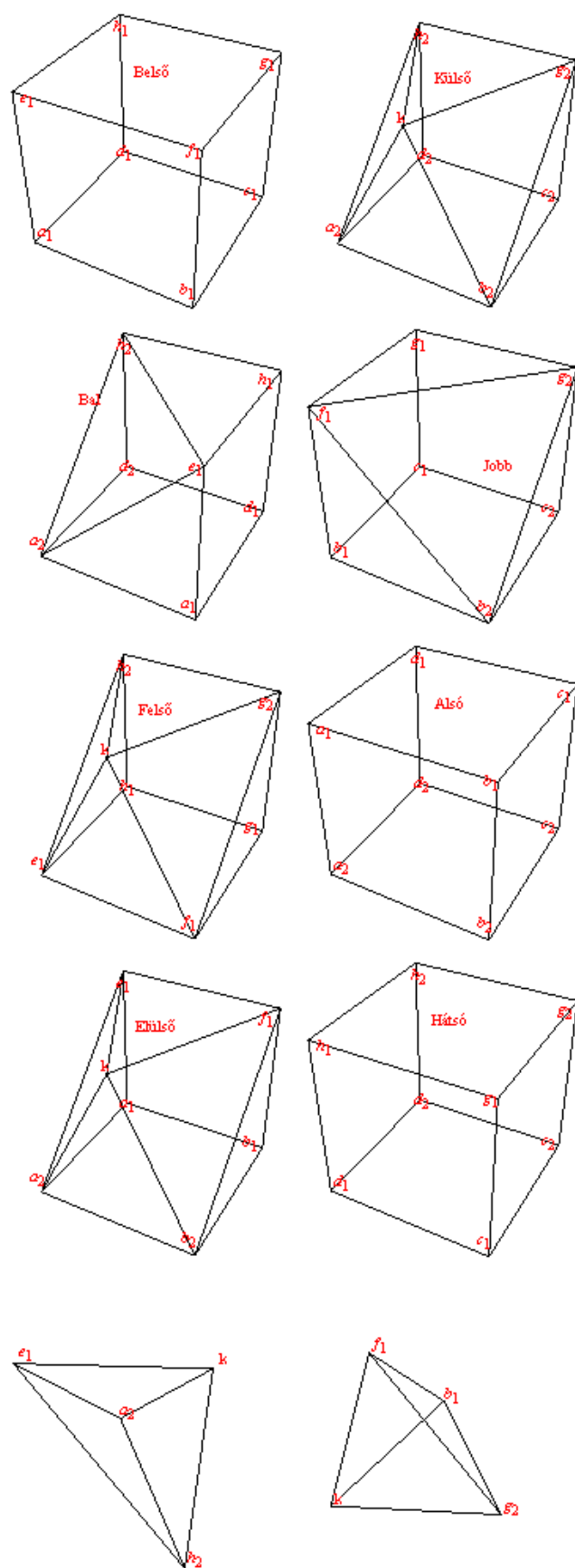
3.2.3. Észrevétel. A C_4 4-dimenziós kocka egy élét „összehúzza” az él középpontjára olyan C_4'' erősen él-antipodális politópot kapunk, mely nem 0/1-politóp, így $C_4''^*$ polárisa sem az, továbbá $C_4''^*$ 3.2.2. tétel értelmében centrált. (lásd 3.3. ábra)

Bizonyítás. C_4'' erős él-antipodalitását fogjuk belátni, ebből ugyanis következik, hogy polárisa centrált. A C_4 kocka csúcsait betűzzük meg a következő módon: Egyik hiperlapjának (minden hiperlapja C_3) csúcsai legyenek a 3.3. ábrának bal felső sarkában látható kockának megfelelően $a_1 \dots h_1$ -gyel betűzve, az ezzel párhuzamos hiperlap csúcsai pedig $a_2 \dots h_2$ -vel úgy, hogy az azonos betűvel jelölt csúcsok alkossanak élt.

Ezután húzzuk össze az $\overline{e_1 f_1}$ élt annak k középpontjára. Az erős él-antipodalitás belátásához azt elég belátnunk, hogy bármely él két végpontjához létezik két párhuzamos hiperlap úgy, hogy az él egyik végpontja az egyikben, másik végpontja pedig a másikban található. Vegyük észre, hogy az él összehúzásával nem tűnik el C_4 egyetlen hiperlapja sem, tehát a 8 hiperlap – melyek páronként párhuzamosak – megmarad, és a C_4 -ben párhuzamosak C_4'' is azok maradnak. Az így keletkező politóp hiperlapjai láthatóak a 3.3. ábrán, az egymással párhuzamosak egymás mellett (kivéve a két keletkező szimplex lap, ezek nem párhuzamosak). Minden élre, ami megmaradt C_4 -ből, található 2 megfelelő hiperlap, hiszen a kocka erősen él-antipodális, tehát abban minden élhez van ilyen hiperlappár, a konstrukció pedig el sem tüntetett hiperlapot, illetve párhuzamosságot sem rontott el. Így csupán azokat az éleket kell vizsgálnunk, amelyek egyik végpontja k , illetve azokat, melyek C_4 -nek nem voltak élei. Ilyen élekből csupán 6-6 darab van, ezek mindegyikehez könnyen található akár az ábra alapján is egy megfelelő hiperlappár, de szimmetriára hivatkozva egy-egy ilyen élhez is elég mutatni megfelelő hiperlapokat. Nézzük például a $\overline{ka_2}$ élt. Ennek k csúcsa benne van az ábrán „felső”-vel címkézett hiperlapban, a_2 csúcsa pedig a felsővel párhuzamos „alsó”-ban. Hasonlóan az $\overline{e_1 h_2}$ él e_1 csúcsa a belső hiperlapban, míg h_2 csúcsa a külsőben van. $\square$



3.2. ábra. A 4-kocka egy ábrázolási módja



3.3. ábra. A 4-kocka egy élének összehúzásával keletkező erősen él-antipodális politóp (C_4'') hiperlapjai

3.2.4. Megjegyzés. A 3.3. ábrán a hiperlapok elnevezései (alsó, felső, stb.) a 4-kocka egy szokásos ábrázolásából adódnak, ezt lásd például a 3.2. ábrán. Ezen jól látszanak az illeszkedések, illetve a hiperlapok és lapok, viszont a párhuzamosság már kevésbé.

A következő tételben belátjuk, hogy egy centrált 4-, vagy annál magasabb dimenziós politópnak legalább 3 átlója létezik, ha pedig ez a szám pontosan 3, akkor a politóp csak 4-dimenziós lehet. Nyitott kérdés, hogy pontosan 3 átlóval rendelkező 4-politóp létezik-e, később erre a kérdésre próbáljuk keresni a választ. A következő állítás a [4] cikkben megtalálható (Lemma 1). Dolgozatomban ennek a bizonyítását az ott leírtakhoz képest nagyobb részletességgel fejtem ki.

3.2.5. Tétel. Legyen P egy centrált d -politóp ($d \geq 4$). Ekkor

- (i) P -nek létezik legalább 3 átlója, és
- (ii) amennyiben P -nek pontosan 3 átlója van, akkor $d = 4$, $|\mathcal{F}(P)| = 8$ és az átlóvégpontok P egyszerű csúcsai. (fokszámuk pontosan d)

Bizonyítás. A tétel első része következik abból, hogy $|\mathcal{F}(P)| \geq 5$. Hiszen két átló legfeljebb 4 hiperlapot fed le, így maradna olyan hiperlap, ami nem tartalmaz átlóvégpontot, ami pedig ellentmond P centráltságának.

A második pont bizonyítása valamivel több meggondolást igényel, és szükségünk lesz hozzá néhány állításra. A továbbiakban legyen $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$ a P politóp három átlója.

3.2.6. Állítás. Legyen P centrált d -politóp ($d \geq 4$). Ekkor bármely $F \in \mathcal{F}(P)$ hiperlap tartalmazza legalább két különböző átló egy-egy végpontját.

Bizonyítás. Tekintsünk egy F hiperlapot. Mivel P -nek van F -fel szomszédos F' hiperlapja, ezért van F -ben legalább egy átlóvégpont, s mivel ezen csúcsot tartalmazó szomszédja is van, így tartalmaz legalább még egy átlóvégpontot. $\square$

3.2.7. Állítás. Ha a P centrált d -politóp valamely $F, F' \in \mathcal{F}(P)$ hiperlapjaira $x_1, x_2 \in F \cap F'$, akkor $\exists [x_3, y_3]$ átló, melynek egyik végpontja F -ben, másik pedig F' -ben van (egyik sem a metszetben).

Bizonyítás. Mivel F és F' metszete legfeljebb $(d - 2)$ -dimenziós, így létezik egy $G \in \mathcal{F}_{d-2}(P)$ lap, melyre $\{x_1, x_2\} \subset G$. Továbbá mivel bármely $(d - 2)$ -dimenziós lapot pontosan 2 hiperlap tartalmaz, és ez a két hiperlap definíció szerint szomszédos, kell, hogy létezzen egy átló közöttük, amelynek egyik végpontja sem lehet a metszetben. $\square$

3.2.8. Lemma. Ha $[x_1, x_2] \in \mathcal{F}_1(P)$, (azaz egy él) akkor P -nek van legalább 4 átlója.

Bizonyítás. Legyen $[x_1, x_2] \subset F \in \mathcal{F}(P)$. Mivel F maga is egy $((d-1)$ -dimenziós) politóp, így létezik legalább $d-2$ különböző hiperlapja $G_1 \dots G_{d-2}$ (ezek P -nek $(d-2)$ -dimenziós lapjai, $G_i \in \mathcal{F}_{d-2}(P)$), melyre $[x_1, x_2] \subset G_i \subset F$, $i = 1 \dots d-2$. Ekkor minden F_j ($j = 1 \dots d-2$) szomszédja F -nek úgy, hogy $F \cap F_j = G_j$ ($j = 1 \dots d-2$). Mivel F és F_j szomszédos és $[x_1, x_2] \subset F \cap F_j$ ezért a 3.2.7. állításból következik, hogy létezik $y_3 \in F$ és $x_3 \in F_j$, $j = 1 \dots d-2$ (különben találtunk egy 4. átlót). Azaz

$$[x_1, x_2, x_3] \subset \bigcap_{j=1}^{d-2} F_j \Rightarrow (E \stackrel{\text{def}}{=} \text{aff}(x_1, x_2, x_3) \cap F \in \mathcal{F}_2(P).$$

Így viszont léteznek F', F'' hiperlapok úgy, hogy $E \subset F' \cap F''$ amiből viszont 3.2.7. állítás értelmében következik, hogy létezik $[x_4, y_4]$ átló P -ben. $\square$

3.2.5. (ii) *rész bizonyítása.* Feltesszük, hogy $[x_i, y_i]$ P -nek átlói $i = 1, 2, 3$ esetén, és hogy nincs több átló. Legyen $X = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$. Célunk belátni, hogy $d = 4$, $|\mathcal{F}(P)| = 8$ valamint, hogy X csúcsai egyszerűek.

Most megmutatjuk, hogy P minden F hiperlapja tartalmaz 3 csúcsot X -ből (természetesen páronként különböző átlók végpontjait). A 3.2.6. állításból tudjuk, hogy minden $F \in \mathcal{F}(P)$ tartalmaz legalább két átlóvégpontot. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $F \in \mathcal{F}(P)$ hiperlap, hogy $\{x_1, x_2\} \subset F$, $F \cap (X \setminus \{x_1, x_2\}) = \emptyset$, illetve a 3.2.8. lemma alapján az is feltehető, hogy $[x_1, x_2]$ nem él. Ha létezik olyan $G \in \mathcal{F}(P)$, hogy $\{x_1, x_2\} \subseteq G$, akkor a 3.2.7. állítás alapján F tartalmazza egy harmadik átló egyik végpontját, ami ellentmond az indirekt feltevésnek. Tehát semelyik $G \in \mathcal{F}(P)$ hiperlapra $\{x_1, x_2\} \not\subseteq G$. Ekkor léteznek $F'_1 \dots F'_k$, $k \geq d-1$ hiperlapjai P -nek, melyek mindegyike szomszédos F -fel, $x_1 \in F'_i$ és $x_2 \notin F'_i$, $\forall i = 1 \dots k$. Így, valamint a centráltság miatt

$$y_2 \in \bigcap_{i=1}^{d-1} F'_i, \dim \bigcap_{i=1}^{d-1} F'_i \leq 1, \Rightarrow \text{aff}(x_1, y_2) \cap P = [x_1, y_2] \in \mathcal{F}_1(P).$$

Ekkor azonban a 3.2.8. lemma alapján létezik egy 4. átló, ami pedig ellentmond a feltevésünknek.

A fenti ellentmondást úgy is láthatjuk, ha összeszámoljuk, hogy P -nek hány olyan hiperlapja létezhet, amely szomszédos F -fel, és tartalmazza x_1 -et. A 3.2.7. állítás alapján könnyű látni, hogy ilyen legfeljebb 2 lehet, ami ellentmond annak, hogy $d-1 \geq 3$.

Így minden hiperlapon van 3 átlóvégpont. Ebből viszont azonnal következik, hogy $|\mathcal{F}(P)| \leq 8$ (hiszen ugyanaz a 3 végpont nem lehet 2 különböző hiperlapon, mert akkor egy $(d-2)$ -dimenziós lapon is rajta lenne, ami újabb átló létezését jelentené), valamint az is, hogy X minden csúcsában legfeljebb 4 hiperlap találkozik (utóbbi két következmény egyszerű kombinatorikai megfontolásokból adódik, ha tudjuk, hogy csak 3 átló létezik),

ami viszont azt jelenti, hogy $d = 4$ és X minden csúcsa egyszerű.

Vegyük észre, hogy mivel $d \geq 4$, így X minden csúcsára legalább 4 hiperlap kell, hogy illeszkedjen. Ez alapján pedig $|\mathcal{F}(P)| = 8$

Tehát ha P -nek pontosan 3 átlója van, akkor $d = 4$, a 6 átlóvégpont mind egyszerű csúcsa P -nek, és $|\mathcal{F}(P)| = 8$.

□

Az eddigi eredményeket figyelembe véve egy fontos észrevételt fogalmazhatunk meg a 3 átlóval rendelkező centrált (továbbiakban 3 átlós) 4-politópokról.

3.2.9. Észrevétel. *Ha P 3 átlós 4-politóp, akkor nem lehet szimplex hiperlapja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy P -nek van egy szimplex hiperlapja: $S \in \mathcal{F}(P)$. Ekkor viszont S a 3.2.5. szerint pontosan 3 átlóvégpontot tartalmaz, de mivel egy 3 dimenziós szimplex bármely 3 csúcsa egy háromszög (azaz P egy 2-dimenziós lapja), így szükségképp S 4. csúcsa is átlóvégpont kellene, hogy legyen a 3.2.8. lemmában látottak miatt, ami egy 4. átló létezését jelentené. □

Brückner 1909-es cikkében [5] tett egy kísérletet a 8 cellával (hiperlappal) rendelkező egyszerű 4-politópok kombinatorikus típusainak felsorolására. Ebben 39 típust mutatott be, amit később Grünbaum és Sreedharan [7] 37-re korrigáltak, s be is látták, hogy ez az összes. (2-ről kiderült, hogy egymással ekvivalens, egy harmadikról pedig az, hogy nem létezik) Az utóbbi cikkben ezek polárisai, a 8 csúcsú szimpliciális 4-politópok vannak részletezve, de a polárisaikról is van néhány szó. Ugyan ez még nem az összes 8 lappal rendelkező 4-dimenziós politóp, ezeken kívül vannak még jelöltek, de kiindulásképp először ezen 37 egyszerű politóp között keresünk centráltakat.

A 4. táblázatban (a 17. oldalon) – ami a [7] cikk alapján készült – láthatjuk ezen 37 4-dimenziós 8 hiperlap által határolt egyszerű politóp néhány adatát, úgy mint a határoló hiperlapok típusait, illetve azok számát. (a hiperlapok jelölését az 5. ábrán láthatjuk) Ha a táblázat adatait összevetjük a 3.2.9. észrevétellel, akkor a lehetséges 37-ből 12-t rögtön ki is zárhatunk (hiszen ezeknek van szimplex lapja).

Nézzük meg mélyebben a (létező vagy nem létező) 3 átlós 4-politópunk hiperlapjait! A P 3 átlós 4-politóp átlói legfeljebb egy oktaédert (nem szükségszerűen szabályosat) feszítenek ki. P -t tehát ennek az oktaédernek a H hipersíkja úgy vágja ketté, hogy H minden hiperlapból tartalmaz 3 csúcsot, mégpedig a 3.2.8. lemma értelmében 3 független csúcsot (közülük semelyik kettő nem alkot élt). Ez rögtön három fontos dolgot jelent:

3.2.10. Észrevétel. P 3 átlós 4-politóp, és átlóit tartalmazó H hipersíkra igazak a következők:

- P minden hiperlapja olyan, hogy csúcsai közül kiválasztható 3 független csúcs, sőt
- ez a 3 csúcs nem lehet ugyanazon a 2-dimenziós lapon, valamint
- H úgy vágja ketté P -t, hogy H „alatt”, illetve „fölött” is van P -nek csúcsa (azaz a H által meghatározott két nyílt féltérben van csúcs)

3.2.11. Következmény. P 3-átlós 4-politópnak nem lehet 7-nél kevesebb csúcsot tartalmazó hiperlapja (azaz pl. az 5. ábrán b -vel jelölt prizma – háromszög alapú hasáb – sem).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy P egy $F \in \mathcal{F}(P)$ hiperlapjára $|\mathcal{F}_0(F)| \leq 5$. Ekkor biztosan nincs F -nek 3 független csúcsa, hiszen egy csúcs kiválasztásával legfeljebb egy le nem fogott csúcs marad (hisz F -ben minden csúcs foka legalább 3).

Tegyük most fel indirekten, hogy F -nek 6 csúcsa van. Ekkor F élgráfja $K_{3,3}$ kell, hogy legyen (azaz „három ház-három kút” gráf, avagy 3-3 csúcsú teljes páros gráf) a 3.2.10. első pontjának értelmében, amiről tudjuk, hogy nem rajzolható síkba, tehát a Steinitz-tétel értelmében (ami [8]-ban például megtalálható) nem létezik ilyen 3-politóp. $\square$

Tehát ha létezik 3 átlós 4-politóp, akkor annak sem szimplex (3.2.9. észrevétel), sem háromszög alapú hasáb (3.2.11. következmény) hiperlapja nem lehet, azaz az egyszerűek közül már csak a 26–37 számmal jelöltek jöhetnek szóba (ld. 4. ábra), sőt, ezek közül a 34-es a 4-kocka, amiről tudjuk, hogy centrált, de nem 3, hanem 8 átlója van.

Figyeljük meg azonban, hogy amennyiben P centrált 4-politóp, valóban 3 átlója lenne, akkor ez a 3 átló mindössze egy 3-dimenziós hipersíkot feszítene ki, ami azt jelentené, hogy ez a H hipersík minden egyes hiperlap 3 független csúcsát tartalmazza (s ezáltal minden hiperlapot belső pontban is metsz a 3 csúcs mellett).

Köszönetnyilvánítás

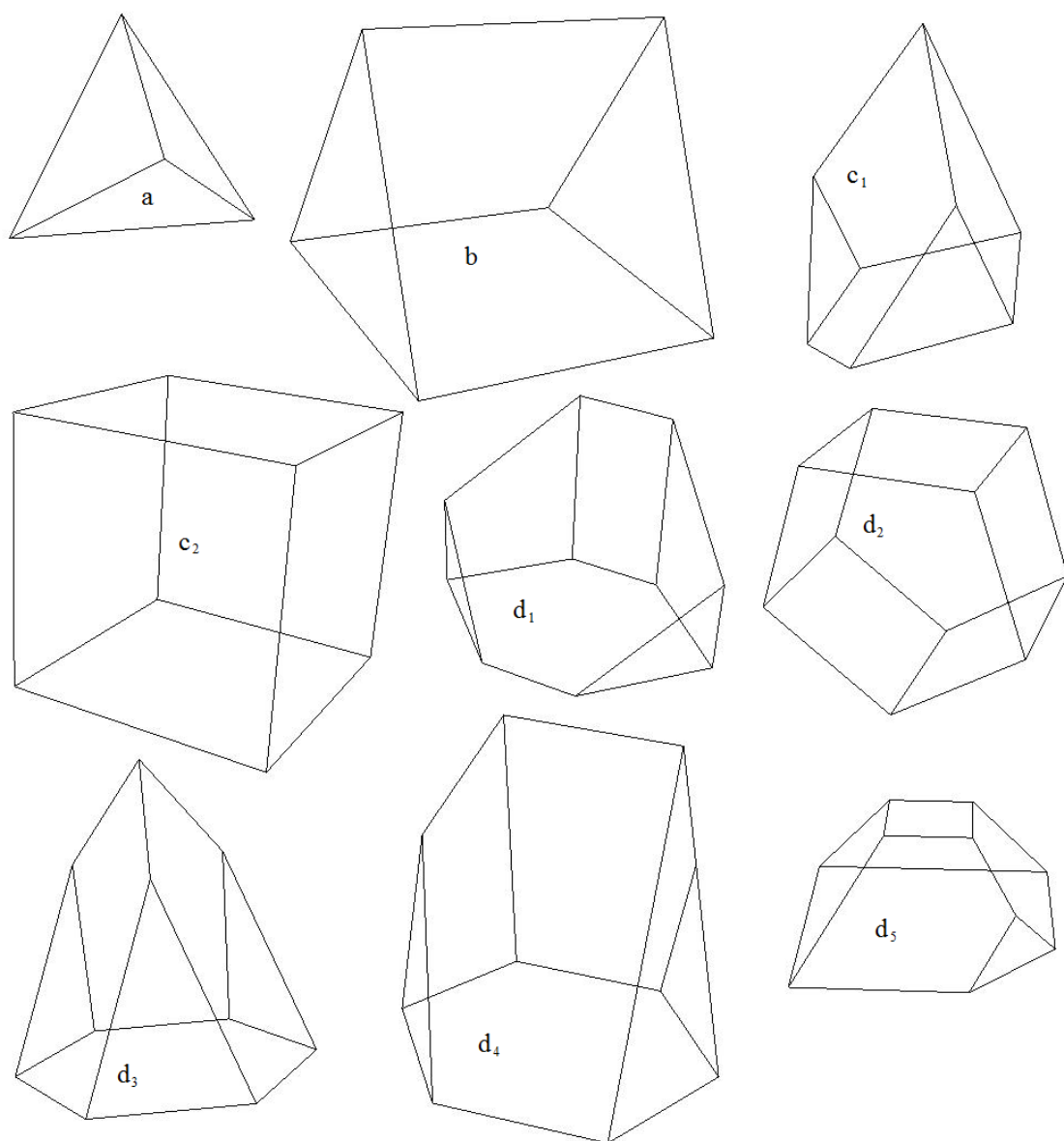
Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Fodor Ferencnek a szakmai és a $\text{\LaTeX}$ -beli segítségért, valamint a felhasznált irodalom biztosításáért, illetve Pallagi Jánosnak (BME TTK Geometria Tanszék) a $\text{\LaTeX}$ -makrókért, a formázásbeli segítségért és a hibák korrigálásáért.

Irodalomjegyzék

- [1] Károly Bezdek, Tibor Bisztriczky, Károly Böröczky, Edge-antipodal 3-polytopes; Discrete and Computational Geometry, MSRI Publications **Vol. 52** (2005)
- [2] T. Bisztriczky, K. Böröczky, On antipodal 3-polytopes, *Rev. Roumanie Math. Pures Appl.* **50.** (2005), 477–481
- [3] T. Bisztriczky, K. Böröczky, On edge-antipodal d-polytopes, *Period. Math. Hungar.* **57**, no. 2, (2008) 131–141.
- [4] T. Bisztriczky, K. Böröczky, F. Fodor, A. Heppes, D. Oliveros, Centred subpolytopes of the 4-cube, *E-Yellow Series Preprints* **#862** (2010) 1–13.
- [5] M. Brückner, Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle (Oktatope) *Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk.* **I 10.** no. 1. (1909), 27 pp.
- [6] L. Danzer and B. Grünbaum, Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee, *Math. Z.* **79** (1962), 95–99.
- [7] B. Grünbaum, V. P. Sreedharan, An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8 vertices, *J. Comb. Theory* **2** (1967), 437–465.
- [8] G. Horváth Ákos, Lángi Zsolt, Kombinatorikus geometria (2011) **3–4. fej.** Konvex politópok, Kombinatorikus geometria napjainkig
- [9] I. Talata, On extensive subsets of convex bodies, *Period. Math. Hungar.* **38** (1999), no. 3, 231–246.
- [10] A. Schürmann, K. Swanepoel, Three-dimensional antipodal and normequilateral sets, *Pacific J. Math.*, **228** (2006), 349–370

típus	csúcsok száma	hiperlapok száma és típusa								
		a	b	c1	c2	d1	d2	d3	d4	d5
1	14	3	0	3	0	0	0	2	0	0
2		2	2	2	0	0	0	0	2	0
3		2	3	0	0	3	0	0	0	0
4	15	2	1	2	0	1	0	2	0	0
5		1	3	1	0	1	0	0	2	0
6		2	0	4	0	0	0	0	2	0
7		1	2	2	1	0	0	0	0	2
13		0	5	0	0	0	3	0	0	0
8	16	1	1	3	0	0	0	1	1	1
9		1	1	2	1	1	0	0	2	0
10		1	2	0	1	4	0	0	0	0
14		0	4	0	0	0	0	0	4	0
15		0	4	0	0	4	0	0	0	0
16		0	3	2	0	0	1	0	0	2
17		0	2	2	2	0	2	0	0	0
34		0	0	0	8	0	0	0	0	0
11	17	1	0	3	0	0	0	2	2	0
12		1	0	3	0	2	0	0	2	0
18		0	2	2	0	1	1	2	0	0
19		0	2	1	1	1	1	0	2	0
20		0	2	2	0	0	0	0	2	2
21		0	2	0	2	4	0	0	0	0
22		0	1	4	0	0	1	0	0	2
26		0	0	3	3	0	0	0	0	2
23	18	0	1	2	0	1	0	0	2	2
24		0	1	2	0	0	1	0	4	0
25		0	1	2	0	2	0	1	1	1
27		0	0	3	1	0	0	0	2	2
28		0	0	4	0	0	2	0	2	0
29		0	0	4	0	0	0	2	0	2
30	19	0	0	2	0	3	1	0	2	0
31		0	0	2	0	1	0	1	3	1
32		0	0	2	0	0	0	0	4	2
33		0	0	2	0	0	0	4	2	0
35	20	0	0	0	0	8	0	0	0	0
36		0	0	0	0	4	0	0	4	0
37		0	0	0	0	2	0	2	4	0

4. ábra. 4-dimenziós egyszerű 8 hiperlap által határolt politópok [7]



5. ábra. A legfeljebb 7 lap által határolt 3-politópok ([7] alapján)

Nyilatkozat

Alulírott Zarnócz Tamás kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozzathatják.