

Szakdolgozat

Az affin ívhossz elemi bevezetése

Ocskó Olivér

Témavezető: Dr. Vígh Viktor

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET
GEOMETRIA TANSZÉK

2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Jelölések, fogalmak	3
2.1. Síkgörbék	3
2.2. Affinitások	6
3. Az affin ívhossz bevezetése	8
4. Az affin ívhossz alkalmazásai	17
Hivatkozások	22

1. fejezet

Bevezetés

A szakdolgozat fő témája az *affin ívhossz* bevezetése Fejes Tóth László [3] könyve alapján. A téma megértéséhez szükséges fogalmak tárgyalása után definiáljuk az affin ívhosszot, majd modern eredményekkel szemléltetjük a fontosságát. Az eredményeket a mai matematikában alkalmazott korszerű fogalomrendszerrel és jelölésekkel mutatjuk be.

A második fejezetben a síkgörbék és az affinitások elemi tulajdonságait mutatjuk be, ezek ismerete a továbbiak megértéséhez elengedhetetlen.

A harmadik fejezetben a tárgyalt probléma röviden a következő. Azokat az affin transzformációkat, amelyek mátrixának determinánsa 1 *ekviaffinitásoknak* nevezzük. Az ekviaffinitások a területet invariánsan hagyják. Fejes Tóth László [3] gondolatmenetét követve szeretnénk bevezetni egy olyan, az ívhosszhoz hasonló mennyiséget a görbéken, ami az ekviaffinitásokkal szemben invariánsan viselkedik, épp úgy mint a terület. Első esetben tekintsünk egy görbéhez vett tetszőleges beosztást. A szokásos ívhossz definíciójakor a görbét az osztópontok által definiált töröttvonallal helyettesítjük. Az affin ívhossz bevezetésénél a görbedarabokat unitér-ellipszisek speciális darabjaival helyettesítjük, majd megmutatjuk, hogy a beosztás finomságát 0-hoz tartatva az ellipszisdarabok affin-ívhosszainak összege konvergens. Ezt az egyértelmű határértéket nevezzük affin ívhossznak. A definíció helyességének igazolásából kiderül, hogy az euklideszi síkon vett konvex, kompakt, C^2 sima határu K lemez affin ívhossza a következőképpen számolható:

$$\lambda(K) = \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{3}} d\sigma(x),$$

ahol a K lemez határán integrálunk, a $\kappa(x)$ az x pontban vett görbület és $d\sigma(x)$ jelöli az ívhossz szerinti Lebesgue-integrált.

Az affin-kerület fogalmát először differenciálgeometriai kontextusban vezette be C^2 sima görbéknél W. Blaschke [1] monográfiában. Mivel a κ görbület majdnem

mindenhol létezik, ezért a fenti Lebesgue-mérték szerinti integrál mindig értelmes, vagyis az előbbi formula általános definícióként is használható. Először 1986-ban K. Leichtweiß [6] cikkében jelentette meg a d -dimenziós konvex testekre definiált affin felszínt a fenti integrált általánosítva:

$$\lambda(K) = \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} d\sigma(x).$$

Ezt először C. Schütt és E. Werner [7] 1990-ben ekvivalens definíciót adtak az úszótest által kihagyott térfogatot felhasználva.

A negyedik fejezetben néhány modern problémakört vázolunk, amelyek megoldásában természetes módon kerül elő az affin ívhossz.

2. fejezet

Jelölések, fogalmak

Ebben a fejezetben néhány alapfogalmat gyűjtöttünk össze, amelyek a továbbiak megértésében alapvető fontosságúak. Az A, B, C csúcsú háromszöget $ABC_{\triangle}$ -gel, általában egy sokszöget a csúcsok felsorolásával, vagy egy nagy latin betűvel jelölünk, pl.: $P_1P_2P_3P_4P_5$ ötszög, vagy P . Egy X alakzat területét $T(X)$ -szel jelöljük.

2.1. Tétel (Lagrange–féle középértéktétel). *Ha f folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon és differenciálható a nyílt (a, b) intervallumon, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ szám, amelyre*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

teljesül.

2.2. Definíció (Osztóviszony). *A rendezett kollineáris, nem mind egybeeső P, Q és R ponthármas osztóviszonyának nevezzük azt a $(PQR) \in \mathbb{R}$ számot, amelyre*

$$(PQR)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$$

2.1. Síkgörbék

Az $\mathbf{r}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható leképezés képhalmazát *egyszerű görbének* nevezzük, ha $\mathbf{r}(t)$ inverzével együtt folytonos és $\forall t \in [a, b]$ esetén $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$.

2.3. Definíció. *Egy összefüggő ponthalmazt differenciálható görbének (görbének) nevezzünk, ha minden pontjának létezik olyan környezete, amelyben a halmaz egyszerű görbeív.*

Egy egyszerű görbét többféleképpen paraméterezhetünk. Az $\mathbf{r}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezéshez tartozó egyszerű görbének legyen egy másik paraméteres előállítása

$\mathbf{r}_1(\tau): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ekkor létezik olyan $\varphi(\tau)$ folytonos, szigorúan monoton függvény, amire $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ és $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(\varphi(\tau))$. A φ függvényt az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}_1$ paraméterezések közötti átparaméterezésnek nevezzük. Az $\mathbf{r}$ leképezés felfogható úgy, mint $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$, ahol az $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ a leképezés koordinátafüggvényei. Például origó középpontú, egységsugarú kör esetén a koordinátafüggvények: $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

2.4. Definíció (Unitér-ellipszis). Az $x(t) = a \cos(t)$, $y(t) = b \sin(t)$, ($ab \neq 0$) paraméterezéssel adott görbét ellipszisnek nevezzük. Ha $ab = 1$, akkor unitér-ellipszistről beszélünk.

Egy oválison olyan egyszerű zárt görbét értünk, amelyet a sík bármely egyenese legfeljebb két pontban metsz. Valamely G ovális alakzat A és B pontja közti ívét $\widehat{AB}$ -vel jelöljük.

2.5. Definíció. Egy egyszerű görbe t_1 és t_2 paraméterű pontjai közötti ívhosszon az $\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau$, mennyiséget értjük, ahol az $\mathbf{r}(t)$ a paraméterező függvény.

Egyszerűen látható, hogy az ívhossz független a paraméterezéstől. Ha az egyszerű görbeív bármely két pontja közötti ív hossza éppen a paraméterek különbsége, akkor ívhossz szerinti paraméterezésről beszélünk. Képlettel $\mathbf{r}$ ívhossz szerinti, ha $\forall s \in [0, \ell]$ esetén

$$s = \int_0^s |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau.$$

Konvencionálisan, az ívhossz szerinti paraméterezés paramétere s . A fenti összefüggést deriválva azonnal adódik a következő észrevétel.

2.6. Állítás. Ha egy egyszerű görbe paraméterezése ívhossz szerinti, akkor

$$|\dot{\mathbf{r}}(s)| = 1.$$

Tekintsünk G egyszerű görbét, amely $\mathbf{r}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ -tel paraméterezett és tekintsük egy tetszőleges beosztást az $[a, b]$ intervallumon $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, legyenek $P_0 = \mathbf{r}(t_0), P_1 = \mathbf{r}(t_1) \dots P_n = \mathbf{r}(t_n)$ a megfelelő osztópontok. A $\Pi: P_0 P_1 \dots P_n$ töröttvonal hosszát $\ell(\Pi)$ jelöli. Ha a töröttvonal hossza a beosztástól függetlenül bizonyos korlát alatt marad, akkor a görbe rektifikálható, és ez esetben $\ell(\Pi)$ szuprémumát $\ell(G)$ -vel jelöljük.

2.7. Tétel. Ha az $\mathbf{r}(t)$ ($a \leq t \leq b$) egyszer folytonosan differenciálható leképezés egyszerű ívet ad meg, akkor ez a görbe rektifikálható, és $\ell(G)$ épp a görbe ívhossza.

Bizonyítás. Legyen a már használt beosztása az $[a, b]$ intervallumnak $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, és legyenek $P_0 = \mathbf{r}(t_0), P_1 = \mathbf{r}(t_1) \dots P_n = \mathbf{r}(t_n)$. Ekkor a $\Pi: P_0 P_1 \dots P_n$ töröttvonal hossza $\ell(\Pi)$, vagyis

$$\begin{aligned}\ell(\Pi) &= \sum_{k=0}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=0}^n |\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=0}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a 2.1 Lagrange-féle középértéktételt az $x(t), y(t)$ függvényekre, ekkor az összeget így írhatjuk fel:

$$\ell(\Pi) = \sum_{k=0}^n |t_k - t_{k-1}| \sqrt{(x(\xi_k))^2 + (y(\eta_k))^2},$$

ahol az ξ_k, η_k a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallum valamely belső pontjai. Mivel az $\dot{x}(t_k), \dot{y}(t_k)$ függvények az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen folytonosak, bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha a $|t_k - t_{k-1}| < \delta(\varepsilon)$, akkor a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallum bármely két α_k és β_k pontjára

$$|\dot{x}(\alpha_k) - \dot{x}(\beta_k)| < \varepsilon, \quad |\dot{y}(\alpha_k) - \dot{y}(\beta_k)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

($k = 1, \dots, n$) fennáll. Ha a τ_k a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallum tetszőleges pontja, és

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n |t_k - t_{k-1}| \sqrt{(x(\tau_k))^2 + (y(\tau_k))^2},$$

akkor megmutatjuk, hogy

$$|\ell(\Pi) - \sigma_n| < 2\varepsilon(b - a).$$

Ennek igazolására alkalmazzuk a

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

azonosságot az $A = \dot{x}(\xi_k)^2 + \dot{y}(\eta_k)^2$ és $B = \dot{x}(\tau_k)^2 + \dot{y}(\tau_k)^2$ kifejezésekre. Ekkor

$$\begin{aligned}A - B &= \dot{x}(\xi_k)^2 - \dot{x}(\tau_k)^2 + \dot{y}(\eta_k)^2 - \dot{y}(\tau_k)^2 \\ &= (\dot{x}(\xi_k) + \dot{x}(\tau_k))(\dot{x}(\xi_k) - \dot{x}(\tau_k)) + (\dot{y}(\xi_k) + \dot{y}(\tau_k))(\dot{y}(\xi_k) - \dot{y}(\tau_k)).\end{aligned}$$

Mivel $|\dot{x}(\xi_k)| \leq \sqrt{A}$, $|\dot{x}(\tau_k)| \leq \sqrt{B}$ és így $|\dot{x}(\xi_k) + \dot{x}(\tau_k)| \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}$, ezért

$$\frac{|\dot{x}(\xi_k) + \dot{x}(\tau_k)|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \leq 1.$$

Ugyanígy járunk el, mint az előző képlettel, ha a x -et kicseréljük y -nal, így akkor is érvényben marad az egyenlőtlenség. Kihaszználjuk, hogy az $\mathbf{r}(t_n)$ függvény egyenletesen folytonos, így

$$\left| \sqrt{A} - \sqrt{B} \right| = \left| \frac{\dot{x}(\xi_k) + \dot{x}(\tau_k)}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} (\dot{x}(\xi_k) - \dot{x}(\tau_k)) + \frac{\dot{y}(\eta_k) + \dot{y}(\tau_k)}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} (\dot{y}(\eta_k) - \dot{y}(\tau_k)) \right| < 2\varepsilon,$$

ha $\max |t_k - t_{k-1}| < \delta$. Ebből következik, hogy

$$|\ell(\Pi) - \sigma_n| = \left| \sum_{k=0}^n |t_k - t_{k-1}| \left(\sqrt{A} - \sqrt{B} \right) \right| < 2\varepsilon \sum_{k=0}^n |t_k - t_{k-1}| = 2\varepsilon(b - a).$$

A $\dot{\mathbf{r}}(t)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, így integrálható is. A σ_n közelítő összeg tart a függvény integráljához, amit utóbbi egyenlőséggel összevetve a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Egy legalább 2-szer differenciálható G görbe *érintőjén* $\mathbf{t}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ vektort értjük, az $\mathbf{r}(s)$ második deriváltja a *görbületi vektor*, melynek hossza $\kappa(s) = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|$ a görbe *görbülete*, ahol az s ívhossz szerinti paramétert jelöl. Általános paraméterezésnél a görbület

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} \quad (2.2)$$

formulával számolható.

2.2. Affinitások

A sík önmagára való egyenestartó, bijektív leképezéseit kollineációknak nevezzük. A ϕ *transzformációt* affinitásnak hívjuk, ha valamely koordinátázásban

$$\phi: (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (u, v) = (x, y)A + (u, v)$$

alakban írható, ahol az $u, v \in \mathbb{R}$, az A mátrix determinánsa nem nulla. Az A mátrixot az *affinitás mátrixának* nevezzük. (Jegyezzük meg, hogy az A mátrix függ a koordinátázástól.) A következőkben kimondjuk az affinitások alapvető tulajdonságait.

2.8. Tétel. (1) Egy affin transzformáció minden koordinátázásban az előbb definiált alakba írható.

(2) Minden affinitás kollineáció, és minden kollineáció affinitás.

- (3) Az affinitások tartják az osztóviszonyt.
- (4) Minden affinitás egyértelműen megadható három nem kollineáris pont nem kollineáris képével.
- (5) Egy affinitás mátrixának determinánsa nem függ attól, hogy a mátrixot milyen koordinátázásban írtuk fel. Így beszélhetünk egy ϕ affinitás determinánsáról, amit $\det \phi$ -vel jelölünk.
- (6) Az affinitások tartják a területarányt, pontosabban egy T területű alakzat ϕ affinitás melletti képének területe: $T \cdot |\det \phi|$.

2.9. Definíció (Ekviaffinitás). Az olyan ϕ affinitásokat, amelyekre $|\det \phi| = 1$ ekviaffinitásoknak nevezzük. A fentiek szerint ez pontosan azt jelenti, hogy a ϕ területtartó.

3. fejezet

Az affin ívhossz bevezetése

Vegyük észre, hogy egy ϕ affinitás általában egy görbe ívhosszát nem hagyja invariánsan. Ezt a problémát tárgyalja [3] könyv, és vezeti be az affin ívhossz (affin ke-
rület) fogalmát, amely a területhez hasonlóan ekviaffinitásokkal szemben invariáns. A módszer az ívhossznál látottakhoz hasonlóan történik. A görbét felosztjuk, dara-
bonként unitér-ellipszis megfelelő íveivel helyettesítjük, majd a beosztás finomságát 0-hoz tartatjuk. A következő tétel biztosítja, hogy létezik megfelelő unitér-ellipszis ív.

3.1. Tétel. *Legyen $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbe kétszer differenciálható, G hossza ℓ , $\forall p \in G: \kappa(p) \geq 0$ és legyen $\kappa_0 = \kappa(p_0)$ valamilyen $p_0 \in G$ belső pontjában. Létezik $U: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, ahol $ab = 1$ egy unitér-ellipszis, és $a \leq \phi_1 < \phi_2 \leq 2\pi$ valós számok úgy, hogy*

$$1.: \exists \phi_0: \phi_1 \leq \phi_0 \leq \phi_2 : \kappa(U(\phi_0)) = \kappa_0,$$

$$2.: \int_{\phi_1}^{\phi_2} \dot{U}(\tau) d\tau = i,$$

$$3.: d(U(\phi_1), U(\phi_2)) = d(G(0), G(1)).$$

Bizonyítás. A tétel bizonyításához először számítsuk ki, hogy mekkora a görbület $U(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ unitér-ellipszisnek az $(a, 0)$ pontban, illetve az $a - \varepsilon$ abszcisszájú pontjában. Majd ezekben a pontokban nézzük meg milyen értéket vesz fel a görbület, ha $a \rightarrow \infty$.

Ehhez írjuk fel az unitér-ellipszis paraméteres egyenletét és számoljuk ki a paraméteres görbületét (2.2) formula szerint. Ehhez ki kell számolnunk az $\dot{U}(t), \ddot{U}(t)$ első és második deriváltakat:

$$\begin{aligned} U(t) &= (a \cos(t), b \sin(t)) \\ \dot{U}(t) &= (-a \sin(t), b \cos(t)) \\ \ddot{U}(t) &= (-a \cos(t), -b \sin(t)). \end{aligned}$$

Elvégezzük a keresztszorzást, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\dot{U}(t) \times \ddot{U}(t) &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -a \sin(t) & b \cos(t) & 0 \\ -a \cos(t) & -b \sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \underline{k} ab \sin^2(t) + \underline{k} ab \cos^2(t) = \\ &= \underline{k} ab (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = \underline{k}.\end{aligned}$$

Tehát a $|\dot{U}(t) \times \ddot{U}(t)| = 1$. Kell még a

$$|\dot{U}(t)|^3 = \left(\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} \right)^3.$$

A számolásokból következik, hogy a görbület

$$\kappa(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} \right)^3} \quad (3.1)$$

kifejezéssel egyenlő.

Tekintsük az $(a, 0)$ pontot. Ez a pont paraméterezésben $t = 0$ értékhez tartozik. A (3.1) képletébe helyettesítve

$$\kappa(0) = \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 \cdot 0 + \frac{1}{a}^2 \cdot 1} \right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{a}^2} \right)^3} = a^3$$

kapjuk. Jegyezzük meg, hogy $\lim_{a \rightarrow \infty} \kappa(0) = \infty$.

Most vizsgáljuk meg a másik pontot az unitér-ellipszisen. Legyen t_0 a vizsgált ponthoz tartozó paraméter. Ekkor a paraméterezés szerint

$$\begin{aligned}a \cos(t_0) &= a - \varepsilon, \\ \cos(t_0) &= 1 - \varepsilon/a.\end{aligned}$$

Így

$$\cos^2(t_0) = (1 - \varepsilon/a)^2, \quad \sin^2(t_0) = 1 - (1 - \varepsilon/a)^2.$$

Ezeket behelyettesítve (3.1) formulába

$$\kappa(t_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 (1 - (1 - \frac{\varepsilon}{a})^2) + \frac{1}{a^2} (1 - \frac{\varepsilon}{a})^2} \right)^3} = \left(\sqrt{2a\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{2\varepsilon}{a^3} + \frac{\varepsilon^2}{a^4}} \right)^{-3}.$$

Nézzük meg mi történik, ha $a \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \kappa(t_0) = 0.$$

A következő lépésben tekintsük $A(a, 0)$, $B(x_0, y_0)$ pontokat összekötő szakaszt. Tegyük fel, hogy $a > d$ és $|\overline{AB}| = d$, így $x_0, y_0 > 0$.

3.2. Állítás (Segédttétel). $\forall \delta > 0, \exists a_0 = a_0(\delta), a > a_0: \widehat{AB} < d + \delta$

Bizonyítás. A feltételek szerint

$$\begin{aligned}(x_0 - a)^2 + y_0^2 &= d^2 \\ (a - x_0)^2 &= d^2 - y_0^2 \leq d^2 \\ a - x_0 &\leq d & x_0 &\geq a - d.\end{aligned}$$

Legyen $B = U(t_0)$. Ekkor

$$\begin{aligned}x_0 &= a \cos(t_0) \geq a - d \\ 1 - \frac{t_0^2}{2} + \frac{t_0^4}{24} &= \cos(t_0) \geq 1 - \frac{d}{a} \\ t_0^2 \left(1 - \frac{t_0^2}{12}\right) &= \frac{t_0^2}{2} + \frac{t_0^4}{24} \leq \frac{d}{a}.\end{aligned}$$

Nyilvánvalóan $t_0 \rightarrow 0$, ha $a \rightarrow \infty$, így

$$\left(1 - \frac{t_0^2}{12}\right) \geq \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2d}},$$

ha $a > a_1$. Tehát, ha $a > a_1$

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a} &\geq t_0^2 \\ t_0 &\leq \sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{AB} = i &= \int_0^{t_0} |\dot{U}(\tau)| d\tau = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 \sin^2(\tau) + b^2 \cos^2(\tau)} d\tau \leq \\ &\int_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} \sqrt{a^2 \sin^2(\tau) + b^2 \cos^2(\tau)} d\tau\end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ triviálisan igaz, így

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} \sqrt{a^2 \sin^2(\tau) + b^2 \cos^2(\tau)} d\tau \leq \\ &\int_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} \sqrt{a^2 \sin^2(\tau)} d\tau + \int_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} \sqrt{b^2 \cos^2(\tau)} d\tau = \\ &\int_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} a \sin(\tau) d\tau + \int_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} b \cos(\tau) d\tau = \\ &a [-\cos(\tau)]_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} + \frac{1}{a} [\sin(\tau)]_0^{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}} = \\ &a \left(1 - \cos \sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}\right) + \frac{\sin \sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}}{a} = \\ &a \left(1 - \cos \sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}\right) + \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}}}{a^{3/2}} \leq\end{aligned} \tag{3.2}$$

Felhasználva, hogy

$$\cos \sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{2d}{a}} \geq 1 - \frac{(1 + \frac{\delta}{2d}) \frac{2d}{a}}{2} = 1 - \left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{d}{a}$$

és

$$\frac{\sqrt{(1 + \frac{\delta}{2d}) 2d}}{a^{3/2}} \leq \frac{\delta}{2},$$

ha $a > a_2$. Kapjuk

$$(3.2) \leq a \left(1 + \frac{\delta}{2d}\right) \frac{d}{a} + \frac{\delta}{2} = d + \delta,$$

ha $a > \max\{a_1, a_2\}$. □

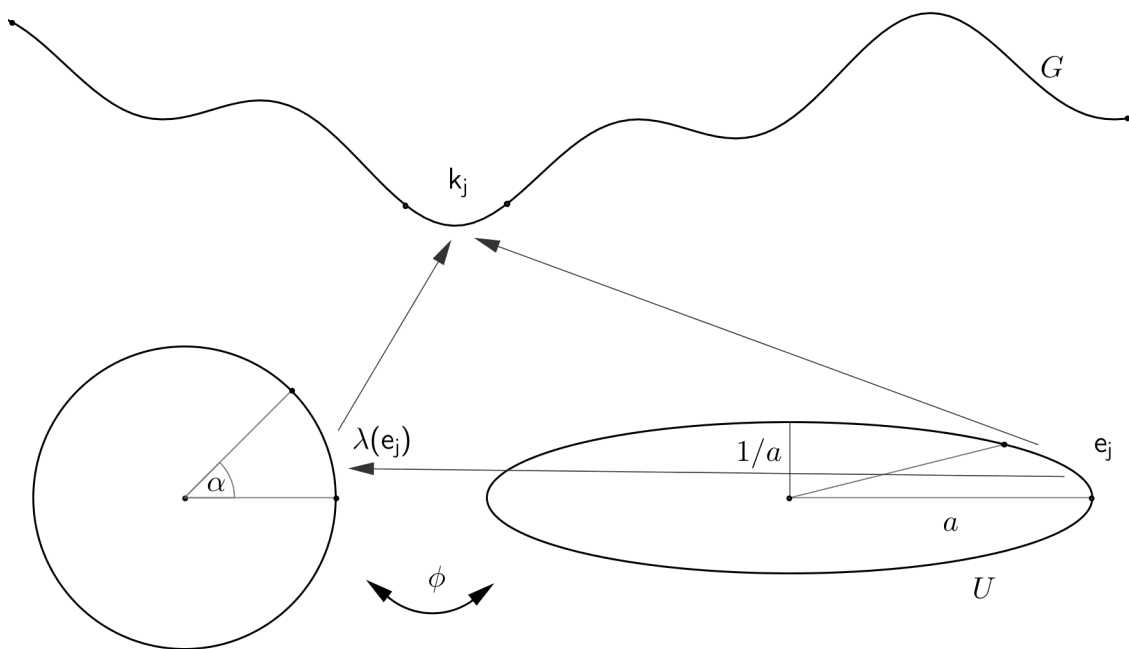
Ezek után a tételt a következőképpen látjuk be. "Toljuk körbe" egy d hosszú beírt szakaszt az ellipszisben. Amikor a d az x -tengellyel párhuzamos, akkor a hozzátartozó ívhossz tart d -hez, ha $a \rightarrow \infty$. Hasonlóan, ha $b = 1/a < d/2$, akkor létezik olyan beírt állapot, amikor a szakasz tartalmazza a középpontot, és így a hozzá tartozó ívhossz legalább $2a$. Folytonossági megfontolások miatt, ha $a > a_3$ (a_3 konstans), akkor a 2. és 3. pont kielégíthető. A 3.2 segédtétel szerint, ha $i = d + 2\delta$, és $a > a_0(\delta)$, akkor a megfelelő beírt szakaszhoz tartozó ív szükségképpen tartalmazza $(a, 0)$ pontot, valamint, ha $1/a < d/100$, akkor az $a - \varepsilon$ abszcisszájú pontot is, ha $\varepsilon = d/10$. De ezekben a pontokban a görbület tart rendre ∞ -hez illetve 0 -hoz, ezért ha a elég nagy, akkor valahol köztük κ_0 -t is felveszi, s így az 1. feltétel is teljesül. Ezzel a tételt beláttuk. □

Rátérhetünk az affin ívhossz definíciójára. Első lépésben legyen U egy unitér-ellipszis egy darabja. Ekkor U ekviaffinitással egy körívbe transzformálható. Az U affin ívhosszán ezen körív szokásos ívhosszát értük.

Analitikusan, ha U az $(a \cos(t), b \sin(t))$ ($ab = 1$) paraméterezésű unitér-ellipszis ϕ_1 és ϕ_2 paraméterértékek közé eső darabja, akkor a megfelelő körív $(\cos(t), \sin(t))$ kör ϕ_1 és ϕ_2 eső ív, aminek ívhossza $\phi_2 - \phi_1$. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy az $(a \cos(t), b \sin(t))$ paraméterezés affin ívhossz szerinti.

Tekintsünk egy tetszőleges G görbét, amelynek a görbülete sehol sem 0 . Legyen $\mathcal{B}_n$ a G egy beosztása, a megfelelő íveket jelölje k_j , $j = 1, \dots, n$. Ezeket helyettesítsük e_j unitér-ellipszisekkel úgy, hogy a megfelelő ívhosszok megegyeznek $\ell(k_j) = \ell(e_j)$, és a görbületek valamely pontban egyenlőek. Ez a 3.1 tétel szerint lehetséges. Legyen e_j affin ívhossza $\lambda(e_j)$ a fentiek szerint, és legyen $\lambda_n = \sum_{j=0}^n \lambda(e_j)$. Ezt szemlélteti a 3.1 ábra.

3.3. Tétel. *A $\lim_{|\mathcal{B}_n| \rightarrow 0} \lambda_n$ létezik és nem függ a $\mathcal{B}_n$ beosztássorozattól csak a G görbétől.*



3.1. ábra. Az affin ívhossz definíciója

Bizonyítás. A 3.1 tétel bizonyításában kiszámoltuk, hogy $(a \cos(t), b \sin(t))$ ($ab = 1$) unitér-ellipszis görbülete:

$$\kappa(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}\right)^3}$$

$$\kappa(t)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= \left(\int_0^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau)} d\tau \right)' \\ &= \sqrt{\dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)} = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\frac{ds(t)}{dt} = \kappa(t)^{-\frac{1}{3}}.$$

Így

$$\lambda(e_j) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} dt = \int_0^{\ell(e_j)} \kappa(s)^{\frac{1}{3}} ds = \int_0^{\ell(k_j)} \kappa(s)^{\frac{1}{3}} ds,$$

ahol e_j $[\phi_1, \phi_2]$ intervallumon paraméterezett. Így

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^n \lambda(e_j) = \sum_{j=0}^n \int_0^{\ell(k_j)} \kappa(s)^{\frac{1}{3}} ds.$$

Mivel a kicseréléskor a görbületek egy pontban megegyeztek, illetve ívhosszok nem változtak, ezért a görbület egyenletes folytonossága miatt

$$\lambda_n \longrightarrow \int_0^{\ell(G)} \kappa(s)^{\frac{1}{3}} ds,$$

ha $|\mathcal{B}_n| \rightarrow 0$. Ez mutatja a tételünk állítását. □

3.4. Tétel. *A $\lambda(G) = \int_0^{\ell(G)} \kappa(s)^{1/3} ds$ mennyiség a G görbe affin ívhosszával egyenlő, a kapott képletet természetes egyenletének.*

A tétel alapján kiszámítjuk a standard parabola egy szakaszának affin ívhosszát.

3.5. Példa. *Tekintsük az $r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t^2)$ által paraméterezett G görbét. Ekkor $\lambda(G) = 7/(3\sqrt[3]{2})$.*

Bizonyítás. G ívhosszát az egyszerűség kedvéért jelölje ℓ . A 3.4 tétel alapján a következő mennyiséget kell kiszámolnunk:

$$\int_0^\ell \kappa(s)^{-\frac{1}{3}} ds.$$

Az első és második deriváltakra kapjuk, hogy $r'(t) = (1, 2t)$ valamint $r''(t) = (0, 2)$. Innen a 2.5 definíció és (2.2) alapján nyerjük, hogy $ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt$ és

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Így

$$\int_0^\ell \kappa^{-\frac{1}{3}}(s) ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + 4t^2}}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \left[\frac{t}{\sqrt[3]{2}} + \frac{4t^3}{3\sqrt[3]{2}} \right]_0^1 = \frac{7}{3\sqrt[3]{2}}.$$

□

A következő tételben összefoglaljuk az analóg módon definiált affin kerület alapvető tulajdonságait ([8]), ezek bizonyítása lényegében triviális, ezért ezektől eltekintünk. Ezekből az affin ívhosszra vonatkozó analóg állítások azonnal következnek (az a), c) pontnak nincs közvetlen átírása).

3.6. Tétel (Az affin kerület tulajdonságai). *Legyen a $\mathcal{K}^2$ az euklideszi síkon vett konvex, kompakt lemezek halmaza, továbbá legyen $\lambda: \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés, ekkor*

a) λ ekviaffin invariáns, vagyis $\forall K \in \mathcal{K}^2$ esetén

$$\lambda(\phi(K)) = \lambda(K),$$

ahol a ϕ egy ekviaffinitás.

b) λ felülről féligfolytonos, azaz

$$\lambda(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n)$$

$\forall K_n$ konvex lemezek sorozata tart K -hoz.

c) λ értékelés, azaz $\lambda: \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ esetén

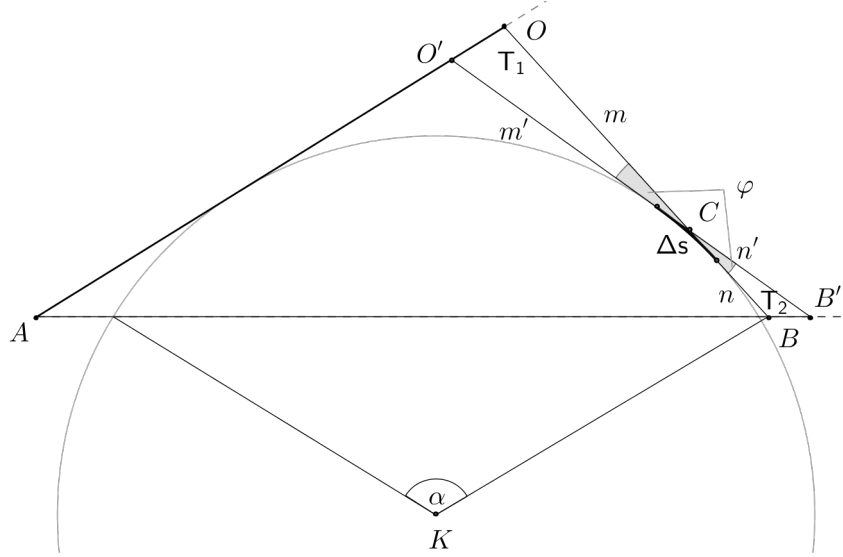
$$\lambda(K \cup L) + \lambda(K \cap L) = \lambda(K) + \lambda(L),$$

ahol a K, L , és $K \cup L \in \mathcal{K}^2$.

A fejezet zárásaképp egy ekvivalens geometriai definíciót adunk. A teljes bizonyítást nem végezzük el, de a tulajdonságot alátámasztandó a vonatkozó számolást megcsináljuk unitér ellipszisekre. Ehhez először egy egységsugarú körív esetén megmutatjuk, hogy ha az ívet egy minimális területű, n darab háromszögből álló háromszöglánccal szeretnénk lefedni, ekkor a láncot alkotó háromszögek szárai a felezéspontjukban érintik a kört, tehát minden háromszög egyenlőszárú. Hogy ezt belássuk tegyük fel, hogy az AOB_Δ háromszög nem egyenlőszárú. Rögzítsük le az AB és AO oldalak által meghatározott egyeneseket, a BO oldalt az érintési pont pedig bontsa m, n szakaszokra, úgy hogy $m > n$. Legyen Δs az a hossz a köríven, amellyel az érintési pontot elmozgatjuk egy picit. Mozgassuk el a BO oldal érintési pontját Δs -sel az egységsugarú köríven úgy, hogy az érintési pont a szakasz középpontja felé mozogjon. A keletkezett $B'O'$ oldalt az új érintési pont m', n' szakaszokra bontja. Ha Δs elég kicsit, akkor $m' > n'$. A keletkezett OCO'_Δ, BCB'_Δ háromszögek területét jelöljük rendre T_1, T_2 -vel és a két háromszögben a C csúcsnál lévő szöget φ -vel. Így $T_1 = \frac{1}{2}m m' \sin \varphi$ és $T_2 = \frac{1}{2}n n' \sin \varphi$, ebből következik, hogy a $T_1 > T_2$, vagyis az így keletkezett új $AO'B'_\Delta$ területe kisebb, mint AOB_Δ területe a Δs mozgatás után. Ezt a gondolatmenetet átvíve az AO oldalra is kapjuk, hogy az AOB_Δ háromszög két oldala felezőpontjaiban érinti a körívet.

Tekintsünk ezt az AOB_Δ háromszöget és jelöljük az α szöget a 3.2 ábrán látható módon. Ekkor

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{T(AOB_\Delta)}{\alpha^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}. \quad (3.3)$$



3.2. ábra. Körív optimális fedése háromszöggel

Ehhez legyen $x = \sin \alpha/2$. Elemi geometriai számítások alapján kapjuk, hogy

$$16 (T(AOB_{\Delta}))^2 = 27 \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} - \sqrt{1 - x^2} \right)^3 \left(\sqrt{1 - x^2} + 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right). \quad (3.4)$$

A kívánt határérték igazolásához fejtsük Taylor-sorba az egyenlet tagjait. Használjuk a binomiális sor sorfejtését

$$(1 + x)^k = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} x^j.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} x &\mapsto \left(-\frac{x^2}{9} \right), & \left(1 - \frac{x^2}{9} \right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-1)^j \left(\frac{x}{3} \right)^{2j} \\ x &\mapsto (-x^2), & (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-1)^j x^{2j}. \end{aligned}$$

Fejtsük ki a szummákat, majd írjuk be az (3.4) egyenletbe

$$\begin{aligned} &27 \left(1 - \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{9}x^4 \dots - 1 + \frac{1}{2}x^2 + 3x^4 \dots \right)^3 \\ &\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - 3x^4 \dots + 3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x^4 \dots \right) = \\ &27 \left(\frac{8}{18}x^2 + \dots \right)^3 \left(4 - \frac{4}{6}x^2 - \dots \right) = \\ &27 \left(\frac{4^3}{9^3}x^6 + \dots \right) \left(4 - \frac{2}{3}x^2 - \dots \right) = \frac{4^4}{27}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Az $x = \sin(\alpha/2)$ helyettesítéssel a

$$16 (T(AOB_\Delta))^2 = \frac{16^2}{27} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^6 + \dots$$

egyenletet kapjuk. Tudjuk, hogy ha $\alpha \rightarrow 0$, akkor $\sin \alpha = \alpha$, azaz határértékben

$$\begin{aligned} 16 (T(AOB_\Delta))^2 &= \frac{16^2}{27} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^6 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^6 \\ \left(\frac{T(AOB_\Delta)}{\alpha^3} \right)^2 &= \frac{16}{27} \frac{1}{2^6} \\ \left(\frac{T(AOB_\Delta)}{\alpha^3} \right)^2 &= \frac{1}{4 \cdot 27} \end{aligned}$$

mindkét oldalból gyököt vonva kapjuk a (3.3) határértéket.

Ez a számolás igazolja a következő tételt körökre, illetve azok ekviaffin képeire, vagyis unitér-ellipszisekre is. A tételt teljes általánosságban nem bizonyítjuk.

3.7. Tétel. *Legyen D_n egy n darab minimális területű háromszögek sorozata, és D_n fedjen le teljesen egy tetszőleges $\mathcal{C}^2$ sima G görbét. Ekkor a G görbe affin ívhosszára*

$$\lambda(G)^3 = 6\sqrt{3} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 T(D_n).$$

4. fejezet

Az affin ívhossz alkalmazásai

Ebben a fejezetben bemutatjuk az affin ívhossz néhány felbukkanását kutatási problémákban, amelyek a téma fontosságát igazolják. Ezeket az eredményeket csak kimondjuk, a bizonyításuk természetesen messze túlmutat ezen dolgozat keretein.

Az első példánk egy elég új alkalmazása az affin kerületnek. A tétel, amelyet kimondunk H. Hadwiger nevezetes tételére hasonlít, amelyet a [2] tanulmányában publikált. Ez kimondja, hogy az euklideszi síkban minden folytonos, mozgásinvariáns értékelés felírható, mint a konvex testekre vonatkozó terület, hosszúság és az Euler–karakterisztika lineáris kombinációja.

4.1. Tétel (M. Ludwig [8]). *Legyen a $\mathcal{K}^2$ az euklideszi síkon vett konvex, kompakt lemezek halmaza, és legyen a $\nu: \mathcal{K}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés felülről (alulról) félig folytonos ekviaffin invariáns értékelés. Ekkor*

$$\nu(K) = c_0\chi(K) + c_1T(K) + c_2\lambda(K),$$

ahol a $K \in \mathcal{K}^2$, a χ függvény az Euler karakterisztikát, a $\lambda(K)$ a K lemez affin ívhosszát jelöli és c_0, c_1 és c_2 konstansok. Ha ν felülről félig folytonos, akkor a $c_2 \geq 0$, ha alulról félig folytonos, akkor a $c_2 \leq 0$.

Megjegyezzük, hogy már ismert a 4.1 tétel kiterjesztése d -dimenzióban is, amelyet M. Ludwig és M. Reitzner mutattak meg.

A következő példánkhoz tekintsünk két konvex, kompakt lemezt, jelölje ezeket K és L , legyen az affin kerületük $\lambda(K)$ és $\lambda(L)$. Rajzoljunk beléjük egyenként N -szöget és M -szöget, mégpedig úgy, $\omega = N + M$ rögzített, és a két sokszög területösszege maximális. A következő tétel szerint ebben az esetben, ha az ω -t elég nagyra választjuk, a területek összeg akkor lesz maximális, ha a sokszögek csúcsszámának aránya megegyezik a megfelelő lemezek affin ívhosszainak arányával.

4.2. Tétel.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{N}{M} = \frac{\lambda(K)}{\lambda(L)}.$$

Vegyük észre, hogy a M -t speciálisan az egységkörlapnak választva újabb ekvivalens definíciót adtunk.

Következő állításunkat Fejes Tóth László [3] könyvében már megfogalmazta, de ennek részletes bizonyítását csak D. McClure és R. Vitale [4] cikkében találhatjuk. Az egyszerűség kedvéért $K, L \in \mathcal{K}^2$ lemezekre vezessük be a $\delta(K, L) = T(K \cup L) - T(K \cap L)$ jelölést. Tekintsünk egy $K \in \mathcal{K}^2$ lemezt, és legyen $\mathcal{P}$ a sík poligonjainak halmaza, és egy $P \in \mathcal{P}$ poligonra $\text{vert}(P)$ jelöli P csúcsainak halmazát. Legyenek $\mathcal{P}_n^i = \{P \in \mathcal{P} | P \subseteq K, |\text{vert}(P)| \leq n\}$ és $\mathcal{P}_n^c = \{P \in \mathcal{P} | P \supseteq K, |\text{vert}(P)| \leq n\}$ a K -ba írt ill. K -t tartalmazó, legfeljebb n csúcsú poligonok halmazai. Legyen továbbá $P_n^i \in \mathcal{P}_n^i$ ($P_n^c \in \mathcal{P}_n^c$) az a poligon, amire a $\delta(K, P_n^i)$ ($\delta(K, P_n^c)$) minimális, vagyis $\delta(K, P_n^i) = \min\{\delta(K, P) | P \in \mathcal{P}_n^i\}$ valamint $\delta(K, P_n^c) = \min\{\delta(K, P) | P \in \mathcal{P}_n^c\}$. A P_n^i -t (P_n^c -t) a K -ba beírt (K köré írt) legjobban közelítő poligonnak nevezzük.

4.3. Tétel (Fejes Tóth L.[3], D. McClure és R. Vitale[4], M. Ludwig[8]).

A fenti jelölésekkel

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 12 \cdot \delta(K, P_n^i) \cdot n^2 &= \lambda(K)^3, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 24 \cdot \delta(K, P_n^c) \cdot n^2 &= \lambda(K)^3. \end{aligned}$$

A tételt teljes általánosságban M. Ludwig látta be felhasználva 4.1 karakterizációs tételét.

Az utolsó példánkban megmutatjuk, hogy bizonyos értelemben a parabola affin ívhossza extrémális. Ehhez először egy újabb ekvivalens átfogalmazásra van szükségünk. Legyen G egy konvex lemez határgörbéje, P egy n oldalú körülírt poligon, aminek minden oldala érinti G -t. A szomszédos érintési pontokat összekötve $\triangle_1, \dots, \triangle_n$ háromszögláncot kapunk, ami lefedi G -t. Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{T(\triangle_1), \dots, T(\triangle_n)\} = 0,$$

akkor

$$\lambda = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (T(\triangle_i))^{\frac{1}{3}}.$$

Ha a háromszögek végig azonos területűek, akkor

$$\lambda^3 = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \tau_n, \tag{4.1}$$

ahol τ_n az n háromszög összterületét jelöli.

Most rátérünk az említett parabolatulajdonság igazolására. Legyen ABO_Δ adott, és határozzuk meg egy $\widehat{AB}$ kúpszelet maximális affin ívhosszát, ha az AO, BO szakaszok a kúpszelet érintői. Jelölje $S(AOB_\Delta)$ a kúpszeletből az AB szakasz által kimetszett területet. Képezzük a q és a $\Phi(q)$ hányadosokat, az utóbbi is függ a C kúpszelettől:

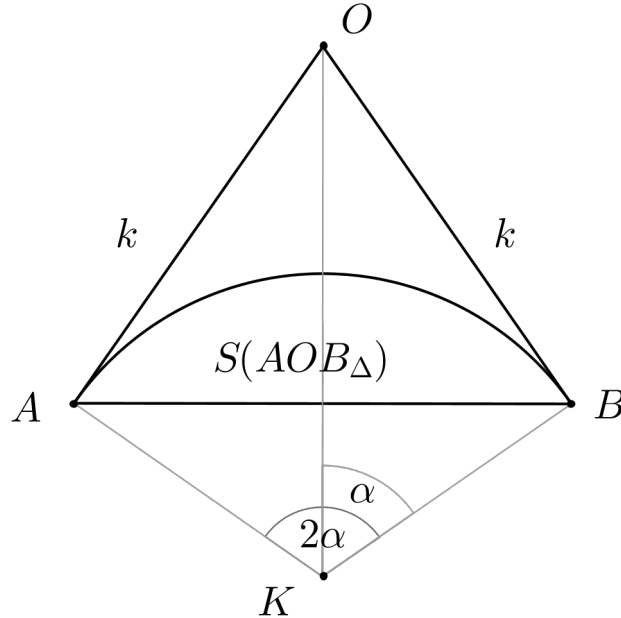
$$q = \frac{S(AOB_\Delta)}{T(AOB_\Delta)},$$

$$\Phi(q) = \frac{\lambda^3(\widehat{AB})}{8T(AOB_\Delta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 T(\tau_n)}{T(AOB_\Delta)} \quad (4.2)$$

képlettel számolható. Ahhoz, hogy a maximumot megtaláljuk, nyilván elég $\Phi(q)$ maximumát megkeresni, majd a következő jól ismert állítás alapján az extrémális görbét „beazonosítani”.

4.4. Lemma. *A C kúpszelet által fent definiált q hányados értékére igaz a következő. Ha $q < 2/3$, akkor C kúpszelet ellipszis, ha $q > 2/3$, akkor C hiperbola és végül ha $q = 2/3$, akkor parabola.*

Nézzük azt az esetet, mikor a $q < 2/3$. Ekkor az ellipszist egy ϕ affinitással r sugarú körbe képezzük.



Számoljuk ki az $S(AOB_\Delta)$ -t és az AOB_Δ területét $T(AOB_\Delta)$. Az O csúcsnál lévő szög $\pi - 2\alpha$, azaz a

$$T(AOB_\Delta) = \frac{k^2 \sin(\pi - 2\alpha)}{2} = \frac{k^2 \sin(2\alpha)}{2} = k^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Az r sugarú kör esetén a $k = r \operatorname{tg} \alpha$ -val, azaz a

$$\begin{aligned} T(AOB_{\triangle}) &= r^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= r^2 \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}, \\ S(AOB_{\triangle}) &= \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

Ezek után már kiszámolható a q értéke, mely

$$\begin{aligned} q &= \frac{\frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)}{r^2 \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}} = \\ &= \frac{(2\alpha - \sin 2\alpha) \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha}. \end{aligned}$$

egyenlettel írható le. Most számoljuk ki a $\Phi(q)$ -t! Ehhez fedjük le az $\widehat{AB}$ körívet n darab azonos területű háromszöggel, jelöljük a háromszöglánc területét τ_n -nel. Könnyű látni, hogy

$$\tau_n = n r^2 \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{n}}{\cos \frac{\alpha}{n}}$$

képlettel meghatározható. Ezek ismeretében számoljuk ki a $\Phi(q)$ hányados értékét.

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 T(\tau_n)}{T(AOB_{\triangle})} = \\ &= \frac{1}{r^2 \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 n r^2 \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{n}}{\cos \frac{\alpha}{n}} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{n}}{\cos \frac{\alpha}{n}} = \end{aligned} \quad (4.3)$$

Felhasználva, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{n}}{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^3} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^3}{n^3}$$

és

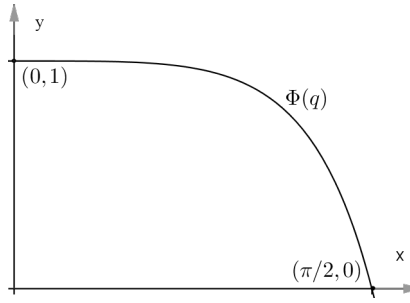
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{n}} = 1.$$

Kapjuk

$$(4.3) = \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \frac{\alpha^3}{n^3} = \alpha^3 \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}$$

egyenlettel felírható.

A q és a $\Phi(q)$ hányadosokat tekinthetjük az α függvényeként, ahol $0 < \alpha < \pi/2$ között értelmezett.



4.1. ábra. Φ függvény maximuma

A 4.1 ábrán látható, hogy a $[0, \pi/2]$ intervallumon konkáv a Φ függvény és $\Phi(0) = 1$ -ben veszi fel a maximumát.

Hasonló számítással, hiberbolikus trigonometrikus függvényeket használva kezelhető a hiperbola esete is. A három esetet végül összevetve, 4.4 lemma alapján kapjuk, hogy a maximális affin ívhosszú C kúpszelet egy parabola.

Irodalomjegyzék

- [1] **W. Blaschke**, *Differentialgeometrie II*, Springer, Berlin, (1923).
- [2] **H. Hadwiger**, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, (1957).
- [3] **Fejes Tóth László**, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, 5. fejezet, Springer, Berlin, (1972).
- [4] **D. McClure and R. Vitale**, *Polygonal approximation of plane convex bodies*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), 326–358.
- [5] **Szőkefalvy–Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter**, *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó Budapest (1979).
- [6] **K. Leichtweiß**, *Zur Affinoberfläche konvexer*, Manuscripta Math. **56** (1986), 429–464.
- [7] **C. Schütt and E. Werner**, *The convex floating body*, Math. Scand. **66** (1990), 275–290.
- [8] **Monika Ludwig**, *A characterization of affine length and asymptotic approximation of convex disc*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **69** (1999), 75–88.
- [9] **Kurusa Árpád**, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon, 1999.
- [10] **Kurusa Árpád**, *Euklidészi geometria*, Polygon, 2008.
- [11] **Wikipedia**, www.wikipedia.hu

Nyilatkozat

Alulírott Ocskó Olivér kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Ocskó Olivér