

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Elméleti Fizikai Tanszék

Szakedolgozat

Anizotrop csillagmegoldások az általános relativitáselméletben

Gyöngyösi Zsolt
Matematika BSc hallgató

Témavezető: Dr. Gergely Árpád László

Témavezető: Dr. Keresztes Zoltán

Belső Konzulens: Dr. Fodor Ferenc

2012

Tartalmi összefoglaló

Jelen dolgozatban L.Herrera és J.Ponce de León által írt *Anisotropic spheres admitting a one-parameter group of conformal motion* című cikket dolgoztam fel [1], ami az Einstein egyenletek megoldásával foglalkozik anizotrop anyageloszlást és gömbszimmetriát feltételezve. A megoldásokat külső Schwarzschild téridőhöz illesztve, három lényegesen különböző megoldást kapunk. Az első megoldás egy táguló csillagot eredményez, ami rendkívül érdekesen viselkedik, ugyanis tágulás során átlépi az eseményhorizontot, és tovább tágul. A második megoldás egy összehúzódó csillagmegoldás, a harmadik pedig egy oszcilláló csillagot eredményez.

Bevezetőben az általános relativitáselmélethez szükséges matematikai alapokat ismertetem, amiben nagy segítségemre voltak a [2]-[4] könyvek.

Köszönetnyilvánítás

Ezen úton szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek Dr. Gergely Árpád Lászlónak és Dr. Keresztes Zoltánnak, akik hasznos tanácsaikkal, útmutatásaikkal segítették a szakdolgozatom elkészülését. Továbbá szeretném megköszönni Dr. Fodor Ferencnek és Dwornik Mareknek a sok segítséget és hasznos tanácsot ami szintén nagyban elősegítette a szakdolgozatom elkészülését.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	5
2. Matematikai háttér	6
2.1. Kovariáns differenciálás	7
2.2. Lie-deriválás	8
2.3. Szimmetriák	9
2.4. A görbület	9
2.5. Az Einstein Egyenletek	10
3. Einstein-egyenletek egzakt megoldása	11
3.1. Anizotrop gömbök	11
3.1.1. Téregyenletek és konvenciók	11
3.1.2. Az illesztés:	12
3.1.3. A tágulás	14
3.1.4. Az összehúzódás	14
3.1.5. Az oszcillálás	14
3.2. Megoldások szerkezete	14
3.2.1. Első konstrukció:	15
3.2.2. Második konstrukció:	16
3.2.3. Harmadik konstrukció:	16
4. Összefoglalás	16
5. Nyilatkozat	18

1. Bevezető

Einstein általános relativitáselmélete egyben a gravitáció elmélete is, amely geometria jellegéből fakadóan a tér és az idő ötvözetéből kialakult téridő szerkezetét is meghatározza. Napjainkban az általános relativitáselmélet a legszélesebb körben elterjedt, mérésekkel az összes többi fizikai elméletnél nagyobb pontossággal megerősített gravitációelmélet, mely alkalmas nemcsak a Földünkön, vagy a naprendszerben tapasztalt gravitációs jelenségek pontos megmagyarázására, de az univerzumunk történetének leírására, vagy mind a térben, mind pedig az időben nagyon távoli extrémén relativisztikus jellemzőkkel bíró rendszerekhez kapcsolódó gravitációs effektusok magyarázatára is. Mára már tudománytörténeti tény, hogy az általános relativitáselméleti kutatásokban a '60-as évek közepén intenzív megújulás kezdődött. Ennek előkészítésében fontos szerepe volt annak, hogy az ötvenes évek végén fedezték fel az első kvazárokat és pulzárokat, valamint annak, hogy 1965-ben találták meg a mikrohullámú háttársugárzást.

2. Matematikai háttér

Gravitációs terek tanulmányozásakor a jelenségeket tetszőleges vonatkoztatási rendszerekben kell vizsgálnunk. Ezért a négydimenziós geometriát tetszőleges koordináták esetén használható alakban kell megfogalmaznunk. Vizsgáljuk az x^0, x^1, x^2, x^3 koordináta-rendszernek egy másik x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 rendszerbe történő transzformációját:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

ahol f^i valamilyen függvény. A transzformáció során a koordináták differenciáljai a

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k$$

képlet szerint transzformálódnak.

Négy A^i mennyiség összességét **kontravariáns négyesvektornak** nevezzük, ha a koordinátatranszformáció során úgy transzformálódnak, mint a koordinátadifferenciálok, azaz:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \quad (2.1)$$

Legyen ϕ skalár. A $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ deriváltak koordinátatranszformáció alkalmával az alábbi képlet szerint transzformálódnak:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \quad (2.2)$$

Ez különbözik a (2.1) képlettől. Négy A_i mennyiség összességét **kovariáns négyesvektornak** nevezzük, ha a koordinátatranszformáció során úgy transzformálódnak, mint egy skalár deriváltjai:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k \quad (2.3)$$

Teljesen analóg módon definiálhatjuk a különböző rendű négyestenzorokat. Így például másodrendű kontravariáns négyestenzornak nevezzük a 16 A^{ik} mennyiség összességét, ha a transzformáció során úgy transzformálódnak, mint a kontravariáns négyesvektorok komponenseinek szorzatai:

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}$$

Egy másodrendű kovariáns A_{ik} tenzor pedig:

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}$$

szabály szerint transzformálódik. Végül a kevert négyestenzor transzformációs szabályát az

$$A^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l{}_m$$

formula határozza meg.

Az **ívelemnégyzet** görbevonaltú koordinátákban a dx^i differenciálok kvadratikus alakja adja meg:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k,$$

ahol g_{ik} a koordináták függvénye, amely az i és k indexekben szimmetrikus:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

A g_{ik} tenzort **metrikus tenzornak** nevezzük.

2.1. Kovariáns differenciálás

Általában mindig, amikor a g_{ik} mennyiségek állandók, akkor az A_i vektor dA_i differenciálja vektorkomponenseinek a koordináták szerint $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ deriváltjai tenzorokat képeznek. Görbevonali koordinátákban ez a tulajdonság nem marad meg; dA_i nem vektor, $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ pedig nem tenzor. Ugyanis egy kovariáns vektor az:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

képlet szerint transzformálódik, ezért

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

Látható, hogy dA_i nem transzformálódik vektorként. Próbáljunk most egy olyan tenzort definiálni, amely görbevonali koordináta-rendszerben ugyanolyan szerepet tölt be, mint a $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ Galilei-féle koordinátákban. Pontosabban $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ -t transzformáljuk Galilei-féle koordinátákból görbevonaliúba. Ahhoz, hogy görbevonali koordinátákban vektor differenciálja ismét vektor legyen, az szükséges, hogy a térnek ugyanabban a pontjában adott vektorokat vonjunk ki egymásból. Más szóval, két infinitezimálisan közeli vektor közül az egyiket át kell vinnünk valamilyen módon abba a pontba, ahol a másik adott, majd ezután a tér egy és ugyanazon pontjához tartozó két vektor különbségét kell valahogyan meghatároznunk. Egy ilyen áthelyezés pedig nem lehet más mint, a vektornak önmagával párhuzamos eltolása. Párhuzamos eltolás során a vektor komponensei Galilei-féle koordinátákban nem változnak, de görbevonaliúban általában megváltoznak. Vizsgáljuk egy kontravariáns vektort: ha x^i koordinátájú pontban az értéke A^i , akkor a szomszédos $x^i + dx^i$ koordinátájú pontban $A^i + dA^i$ lesz. Ha az A^i vektort infinitezimálisan kicsi, az $x^i + dx^i$ -be vivő párhuzamos eltolásnak vetjük alá, értéke δA^i -vel változik meg. Így most már egy pontban lévő vektorok DA^i különbsége:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (2.4)$$

A vektorkomponensek infinitezimális kis párhuzamos eltolásakor fellépő δA^i megváltozásai függenek maguknak a komponenseknek az értékeitől. A függvénykapcsolat nyilvánvalóan lineáris. δA^i tehát a következő alakban adható meg:

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l, \quad (2.5)$$

ahol a Γ_{kl}^i mennyiségek a koordináták valamilyen függvényei, alakjuk természetesen függ a koordináta-rendszer megválasztásától. Könnyen belátható, hogy a Γ_{kl}^i mennyiségek nem alkotnak tenzort. A Γ_{kl}^i mennyiségeket **Christoffel-szimbólumoknak** nevezik. (2.4)-be és (2.5)-t és $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$ -et helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l \quad (2.6)$$

Hasonlóan adódik a kovariáns vektorra:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^i A_k \right) dx^l \quad (2.7)$$

A (2.6)-(2.7)-ben zárójelben álló mennyiségek tenzorok, minthogy ezek a dx^l vektorral szorozva vektort adnak. Nyilvánvaló, hogy éppen ezek azok a tenzorok, amelyek megvalósítják a vektor deriváltja fogalmának görbevonali koordinátákra való keresett általánosítását. Ezeket

a tenzorokat az A^i , illetve az A_i vektorok **kovariáns deriváltjának** nevezzük (Jele: ∇). Így tehát:

$$DA^i = \nabla_l A^i dx^l \quad DA_i = \nabla_l A_i dx^l$$

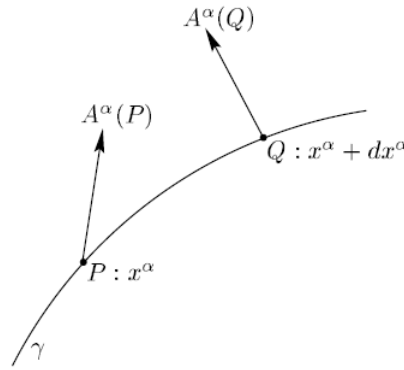
és maguk a kovariáns deriváltak:

$$\nabla_l A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k,$$

$$\nabla_l A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^i A_k$$

2.2. Lie-deriválás

Előző alfejezetben mutattunk rá, hogy hogyan lehet bevezetni görbült téridőbe a deriválás fogalmát, a szabály annyi volt, hogy a P vektort párhuzamosan eltoltuk infinitezimálisan egy Q pontba. Ez azzal járt, hogy a sokaságon be kellett vezetni egy új struktúrát: a **konnexiót**. Ebben a fejezetben bevezetünk egy új deriválási fogalmat **Lie-deriválást** amihez nem kell bevezetni egy új struktúrát. Tekintsünk egy γ görbét, egy érintővektora $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ és γ környezetében vegyünk egy A^α vektormezőt (lásd ábra).



1. ábra.

Legyen a P pont koordinátája x^α a Q pont koordinátája pedig $x^\alpha + dx^\alpha$. Infinitezimális koordinátatranszformáció egy x' -rendszerbe:

$$x'^\alpha = x^\alpha + dx^\alpha = x^\alpha + u^\alpha d\lambda$$

Ugyanezen transzformáció alatt a A^α vektor transzformációja:

$$A'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) = A^\alpha(x) + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) d\lambda$$

vagy pedig

$$A'^\alpha(Q) = A^\alpha(P) + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(P) d\lambda$$

Most számoljuk ki A^α vektor értékét a Q pontban:

$$A^\alpha(Q) = A^\alpha(P) + u^\beta \frac{\partial A^\alpha(P)}{\partial x^\beta}.$$

Általában, $A'^\alpha(Q)$ és $A^\alpha(Q)$ nem egyenlőek. A két vektor különbségének a megváltozásával definiáljuk egy A^α vektormező γ görbe menti Lie-deriváltját.

$$\mathcal{L}_u A^\alpha(P) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{A^\alpha(Q) - A'^\alpha(Q)}{\lambda}.$$

2.3. Szimmetriák

Szemlélet alapján az M sokaságnak azt a tulajdonságát nevezzük szimmetriának, ha M -et önmagára leképezve valamely, a sokaságot jellemző geometriai mennyiség nem változik. Folytonos szimmetria esetében ez a követelmény matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy a leképezést létrehozó egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport ξ generátorvektora mentén a jellemző geometriai mennyiség Lie-deriváltja eltűnik. Minél egyértelműbben jellemzi a választott mennyiség a sokaság szerkezetét, annál erősebb megkötést jelent a megfelelő szimmetria feltételezése. Következőkben bemutatunk néhány szimmetriát:

- **Killing-mozgás**

$$\mathcal{L}_\xi g_{ik} = 0.$$

A folytonos szimmetriáknak ez a legerősebb típusa igen fontos a gravitációelméletben.

- **Affin kollineáció:**

$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{ij}^k = 0.$$

A relativitáselméletben megőrzik a Christoffel-szimbólumokat. Az affin kollineációk megőrzik a geodetikus pályák alakját.

- **Konform mozgás:**

$$\mathcal{L}_\xi g_{ik} = \psi g_{ik}.$$

Ezen leképezés hatására a metrika Lie-deriváltja nem tűnik el, a leképezés hatására azonban a metrikus tenzor mindössze a ψ skalár függvénnyel szorozódik.

2.4. A görbület

Matematikai szempontból a téridő egy négy-dimenziós sokaság. A sokaság belső geometriájára jellemző görbületet a *görbületi tenzor* írja le. A téridő csakis belülről vizsgálható, ezért az általános relativitáselméletben olyan görbületi fogalmat vezettek be amely a téridőn belül elvégzett mérésekre van alapozódik, amit a vektorok párhuzamos eltolásával sikerült bevezetni a sokaságok elméletébe. Az X és Y vektormezők kommutációs tulajdonságát úgy vizsgáljuk meg, hogy a p pontnak valamely környezetében fekvő pontba leképezzük a tetszőleges Z vektort X vektor mentén történő áthelyezéssel, majd az Y vektor mentén történő párhuzamos áthelyezéssel. Ha a két művelet sorrendjét felcseréljük, akkor ennek a sokaság görbültségét jellemző eredmény lesz. Így ha a sokaság nem görbült, akkor a párhuzamos eltolás **független** az úttól.

Ha a sokaság nem görbült, akkor létezik egy olyan X^r vektormező, amely a sokaságon mindenütt önmagával párhuzamos, azaz kovariáns konstans:

$$\nabla_s X^r = 0$$

Most felhasználva a kovariáns derivált tulajdonságát, kapjuk, hogy

$$\partial_s X^r = -\Gamma_{ps}^r X^p$$

Mivel a vegyes parciális deriváltak megegyeznek, vagyis függetlenek a sorrendtől, így:

$$\partial_q \partial_s X^r = \partial_s \partial_q X^r$$

így integrálhatósági feltételt kapunk X^r vektormezőt meghatározó egyenlethez:

$$\partial_q (\Gamma_{ps}^r X^p) - \partial_s (\Gamma_{pq}^r X^p) = 0$$

amit kifejtve:

$$R_{pqs}{}^r X^p \equiv [\partial_q \Gamma_{ps}{}^r - \partial_s \Gamma_{pq}{}^r + \Gamma_{iq}{}^r \Gamma_{ps}{}^i - \Gamma_{is}{}^r \Gamma_{pq}{}^i] X^p = 0.$$

Az $R_{pqs}{}^r$ mennyiség tenzor, és **Riemann**-tenzornak, vagy **görbületi** tenzornak nevezzük. A Riemann-tenzor komponenseit leolvashatjuk az előző egyenletből:

$$R_{pqs}{}^r = \partial_q \Gamma_{ps}{}^r - \partial_s \Gamma_{pq}{}^r + \Gamma_{iq}{}^r \Gamma_{ps}{}^i - \Gamma_{is}{}^r \Gamma_{pq}{}^i.$$

A Riemann-tenzor tehát a sokaság görbületi viszonyait méri lokálisan.

A Riemann-tenzor illetve a belőle képzett $R_{rspq} = g_{r\mu} R_{spq}{}^\mu$ tenzor az indexek felcserélése szempontjából az alábbi szimmetriákkal rendelkezik:

1. $R_{rspq} = R_{pqrs}$
2. $R_{rspq} = -R_{srpq} = -R_{rsqp} = R_{srqp}$
3. $R_{rspq} + R_{rpqs} + R_{rqsp} = 0$

A **Ricci**-tenzor a Riemann-tenzorból kontrakcióval állítható elő: $R_{rs} = R_{rls}{}^l$, és további kontrakcióval a **görbület-skalár** állítható elő: $R = R^q{}_q$.

2.5. Az Einstein Egyenletek

Az általános relativitáselmélet felfogása szerint a gravitáció geometriai természetű. A geometria alapvető g metrikus tenzorját az anyageloszlás határozza meg. A megfelelő egyenleteket az alábbi megfontolásokkal nyerjük:

1. A newtoni határátmenetben teljesüljön a ϕ gravitációs potenciál egyenlete:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

Ezért megköveteljük:

2. Az egyenlet másodrendű a g tenzorban, és
3. Az egyenlet lineáris a T energiaimpulzus-tenzorban.

Így az egyenlet egyik oldalán a T tenzor szerepel:

$$G = kT$$

Itt G Einstein-tenzor a téridő görbültségét jellemzi és a k később meghatározandó arányossági tényező. További elvárásaink:

4. Legyen $G = 0$, a téridő sík.
5. G csak a Riemann-tenzorból és a g metrikus tenzorból épül fel
6.
 - G legyen lineáris R_{abcd} -ben.
 - Mint az energiaimpulzus-tenzor, G is kétindexes és szimmetrikus.
 - Az anyagmegmaradást kifejező $\text{div}T = 0$ feltételből következik az Einstein-tenzor divergenciamentessége : $\text{div}G = 0$

Ilyen tenzor csak egy van :

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab}$$

ahol Λ a kozmológiai állandó.

3. Einstein-egyenletek egzakt megoldása

3.1. Anizotrop gömbök

Ebben a fejezetben vizsgáljuk az Einstein egyenletek megoldását, arra az esetre amikor a téridőnk gömbszimmetrikus és az is igaz, hogy a metrikus tenzor Lie-deriváltja nem tűnik el, hanem csak egy skalárfüggvénnyel szorozódik.

3.1.1. Téregyenletek és konvenciók

Tekintsük az ívelemnégyzetet a következő formában:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - e^{\mu(r,t)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

alakban. Anizotrop anyageloszlás esetén az energiaimpulzus tenzor:

$$T_\nu^\mu = (\rho + p_\perp) U^\mu U_\nu - p_\perp \delta_\nu^\mu + (p_r - p_\perp) X^\mu X_\nu$$

formában írható fel, ahol U^μ a négyes-sebesség, ρ az energiasűrűség, p_r az X_μ -re sugárirányú nyomás, $p_\perp$ pedig X_μ -re merőleges nyomás. Továbbá az is igaz, hogy

$$U^0 = e^{-\frac{\nu}{2}}, \quad X^1 = e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

A nemeltűnő komponensei az energiaimpulzus-tenzornak :

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = -p_r, \quad T_2^2 = T_3^3 = -p_\perp$$

Most helyettesítsünk be az Einstein-egyenletbe:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

kapjuk, hogy :

$$8\pi\rho = e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} \dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) + e^{-\mu} \quad (3.1)$$

$$-8\pi p_r = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu} \quad (3.2)$$

$$-8\pi p_\perp = \frac{1}{4} e^{-\lambda} \left(2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu' \lambda' - \nu' \lambda' + \mu' \nu' \right) + \frac{1}{4} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} \dot{\nu} + \dot{\mu} \dot{\nu} - \dot{\lambda} \dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - 2\dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - 2\dot{\mu}^2 \right) \quad (3.3)$$

ahol a pont jelöli az idő, a vesszős kifejezés pedig az r szerinti deriválást.

Most használjuk fel a metrikának azt a szimmetria tulajdonságát, hogy:

$$L_\xi g_{\mu\nu} = \psi(t, r) g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \quad (3.4)$$

ahol ξ^a -ről megköveteljük azt, hogy:

$$\xi^a U_a = 0. \quad (3.5)$$

Ha a gömbszimmetriát és a (3.5)-et felhasználva, kapjuk, hogy:

$$\xi^0 = \xi^2 = \xi^3 = 0$$

Ilyen feltételek mellett megoldva (3.4)-et, és a kapott megoldásokat beírva (3.1)-(3.3)-be:

$$8\pi\rho = -[3h_1'^2(r) - 3\dot{h}_2^2(t)e^{f(t)}] + 2e^{-\frac{\lambda}{2}}[h_1''(r) + h_2(\dot{t})f(\dot{t})e^{f(t)}] + e^{-\lambda}e^{f(t)}\left[\frac{f(\dot{t})^2}{4} + 1\right] \quad (3.6)$$

$$-8\pi p_\perp = [3h_1'^2(r) - 3\dot{h}_2^2(t)e^{f(t)}] - 2e^{-\frac{\lambda}{2}}[h_1''(r) - h_2(\ddot{t})e^{f(t)}] + \frac{1}{2}f(\ddot{t})e^{-\lambda}e^{f(t)} \quad (3.7)$$

$$-8\pi p_r = [3h_1'^2(r) - 3\dot{h}_2^2(t)e^{f(t)}] + e^{-\frac{\lambda}{2}}e^{f(t)}[2h_2(\ddot{t}) - h_2(\dot{t})f(\dot{t})] + e^{-\lambda}e^{f(t)}[f(\ddot{t}) - \frac{f^2(\dot{t})}{4} - 1] \quad (3.8)$$

Az ívelemnégyszet pedig a következő alakot ölti :

$$ds^2 = \frac{e^{-f(t)}}{[h_1(r) + h_2(t)]^2} [dt^2 - e^{f(t)}dr^2 - (d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2)].$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$R(r, t) = \frac{e^{-f(t)/2}}{[h_1(r) + h_2(t)]}.$$

3.1.2. Az illesztés:

Továbbiakban minket az érdekel, hogy milyennek válasszuk meg h_1, h_2 , és $f(t)$ -t, hogy illeszkedjen a Schwarzschild metrikára. Azt mondjuk, hogy egy téridő két külön álló része összeilleszthető egy hiperfelületen(S) keresztül, ha az első és második alapmennyiségek folytonosan átvihetők egymásba S -en át.

Egy véges a sugarú statikus gömbszimmetrikus csillag téridejét az $r > a$ külső tartományában a Schwarzschild-téridő jellemzi. A csillag külsejében tekintsük a következő alakban felírt metrikát:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)dT^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.9)$$

ahol M a teljes tömeg. Itt megköveteljük, hogy R legyen korlátos amit $R_b(T)$ -vel fogunk jelölni továbbiakban. Így az indukált metrika a korlátos felületen(kívülről)

$$(dS^2)_b^+ = \left[\left(1 - \frac{2M}{R_b}\right) - \left(1 - \frac{2M}{R_b}\right)^{-1}\left(\frac{dR_b}{dT}\right)^2\right]dT^2 - R_b^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.10)$$

és a megfelelő ívelem a határon(belülről)

$$(dS^2)_b^- = \frac{e^{-f(t)}}{[h_1(r_0) + h_2(t)]^2} [dt^2 - (d\theta^2 + \sin^2\theta\phi^2)]. \quad (3.11)$$

itt felhasználjuk, hogy a határon a koordináták (t, r, θ, ϕ) alakúak, és, hogy $r = r_0$ =konstans. Mivel az illesztéshez szükséges az, hogy a határon az első alapmennyiségek folytonosak legyenek, vagyis

$$(dS^2)_b^+ = (dS^2)_b^-$$

kell, hogy fennálljon. Megoldva kapjuk, hogy

$$R_b(T) = \frac{e^{-f(t)/2}}{[h_1(r_0) + h_2(t)]} \quad (3.12)$$

és

$$\left[\left(1 - \frac{2M}{R_b} \right) - \left(1 - \frac{2M}{R_b} \right)^{-1} \left(\frac{dR_b}{dT} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dT = R_b dt \quad (3.13)$$

Most használjuk fel azt a tulajdonságot is, hogy a második alapmennyiségeknek is folytonosnak kell lennie a felületen. Hosszadalmas számolás után azt kapjuk, hogy

$$m(r_0, t) = M \text{ és } -(T_1^1)_b = 0 \quad (3.14)$$

ahol $m(r, t)$ a tömegeloszlás függvény, ami a következőképpen van definiálva

$$2m(r, t) = e^{\frac{\mu}{2}} \left[1 + e^{-\nu} (\partial_t(e^{\frac{\mu}{2}}))^2 - e^{-\lambda} (\partial_r(e^{\frac{\mu}{2}}))^2 \right]$$

Számoljuk ki $-(T_1^1)_b$ és M értékét:

$$\begin{aligned} 0 = -(T_1^1)_b = [3h_1'^2(r) - 3\dot{h}_2^2(t)e^{f(t)}] + [h_1(r_0) + h_2(t)]e^{f(t)}[2h_2''(t) - h_2'(t)f'(t)] + \\ + [h_1(r_0) + h_2(t)]^2 e^{f(t)} [f''(t) - \frac{f'^2(t)}{4} - 1] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$2M = \frac{e^{-f(t)/2}}{[h_1(r_0) + h_2(t)]} \left(1 + \frac{1}{4} \left[f'(t) + \frac{2\dot{h}_2(t)}{[h_1(r_0) + h_2(t)]} \right]^2 - e^{-f(t)} \frac{h_1'(r_0)}{[h_1(r_0) + h_2(t)]^2} \right) \quad (3.16)$$

Tehát a (3.12) a (3.15) és a (3.16)-as egyenletek eleget tesznek az illesztési feltételeknek. Most írjuk fel R_b -t az utolsó két egyenlet segítségével:

$$2\ddot{R}_b R_b - \dot{R}_b^2 = 3h_1'^2(r_0)R_b^4 - R_b^2 \quad (3.17)$$

$$\dot{R}_b^2 = 2MR_b - R_b^2 + h_1'(r_0)R_b^4 \quad (3.18)$$

azonban a második egyenlet az első egyenletnek első integrálja. Próbáljuk meghatározni R_b -t, de mielőtt neki állnánk integrálni, az általános megoldás viselkedése miatt bevezetünk egy segédfüggvényt ami egyszerűsíti a megoldás menetét:

$$V(R_b) = \frac{1}{R_b^2} - \frac{2M}{R_b^3}$$

így a felület egyenlete:

$$\dot{R}_b^2 = R_b^4 [h_1'^2(r_0) - V(R_b)], \quad (3.19)$$

itt nyilván a megengedhető tartomány

$$h_1'^2(r_0) - V(R_b) \geq 0.$$

A (3.19)-es differenciálegyenlet megoldásához egy elliptikus függvényt kellene integrálni ami kézzel kivitelezhetetlen. Viszont ha az egyenletben rögzítünk egy változót akkor lehetséges egyszerűsítések miatt sokkal egyszerűbbé válhat az egyenlet. Válasszuk először $h_1'^2(r_0)$ függvény értékének a $V(R_b)$ függvény maximumának a helyét ami $\frac{1}{27M^2}$ helyen van, ugyanis ez a legkisebb érték amit $h_1'^2(r_0)$ felvehet.

3.1.3. A tágulás

A gyökvonás után megoldva (3.19)-et, a pozitív gyökhöz tartozó megoldás:

$$R_b^{(1)} = \frac{6M}{3 \coth^2 \frac{(t-t_0)}{2} - 1} \quad (3.20)$$

A függvényről leolvashatjuk, hogy a határ felület tágulni fog, ami aszimptotikusan tart egy $R_b = 3M$ sugarú gömbhöz, ha $t \rightarrow \infty$. Ha $t = t_0$ -t választunk akkor az is látható, hogy a gömbünk egy pontra fog koncentrálni. Az is nyilvánvaló, hogy ez a határfelület áthalad a horizonton ($R = 2M$) is valamilyen időpillanatban. Ez $t_h = 2 \coth^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$ időpontban történik.

3.1.4. Az összehúzódás

Most a (3.19)-es egyenlet másik megoldását vizsgáljuk.

$$R_b^{(2)} = \frac{6M}{3 \tanh^2 \frac{(t-t_0)}{2} - 1} \quad (3.21)$$

A fenti egyenlet egy összehúzódást eredményez, ami szintén egy $3M$ sugarú gömbhöz tart ha $t \rightarrow \infty$. Viszont a negatív értékeket ki kell hagynunk, amit úgy tudunk megtenni, hogy kezdetben $t_0 = -2 \tanh^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$ értéket választjuk, ha $t \in (0, \infty)$. Tehát $R_b^{(2)}(0) = \infty$

3.1.5. Az oszcillálás

A harmadik megoldáshoz $h_1'^2(r_0)$ -nak másik értéket választunk, mégpedig $h_1'^2(r_0) = 0$. Így

$$R_b^{(3)} = 2M \cos^2 \left(\frac{t-t_0}{2} \right) \quad (3.22)$$

Ez a megoldás egy oszcilláló gömböt eredményez aminek a sugara $[0, 2M]$ intervallumon változik.

3.2. Megoldások szerkezete

Előző fejezetben három különböző kifejezést kaptunk R_b függvényre, most pedig alkalmas függvény megválasztásával próbáljuk analitikusan megoldható szerkezetűvé tenni R_b -t. Legyen

$$h_2(t) = 0$$

Így a (3.12), (3.18) és a (3.19) a következő alakban írható:

$$e^{\frac{f(t)}{2}} h_1(r_0) = \frac{1}{R_b} \quad (3.23)$$

$$e^{f(t)} \left[\ddot{f}(t) - \frac{\dot{f}^2(t)}{4} - 1 \right] = -\frac{3h_1'^2(r_0)}{h_1^2(r_0)} \quad (3.24)$$

$$\dot{f}^2(t) = 8Mh_1(r_0)e^{\frac{f(t)}{2}} + \left[\frac{4h_1'^2(r_0)}{h_1^2(r_0)} \right] e^{-f(t)} - 4. \quad (3.25)$$

A fenti egyenleteket írjuk be (3.6), (3.7) és (3.8)-be:

$$8\pi P_r = 3h_1'^2(r) - 3\omega^2 h_1^2(r), \quad (3.26)$$

$$8\pi P_{\perp} = 3h_1'^2(r) - 2h_1(r)h_1''(r) + \frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{f}(t)}{R^2}\right], \quad (3.27)$$

$$8\pi\rho = -3h_1'^2(r) + 2h_1(r)h_1''(r) + \omega^2 h_1''(r) + \frac{2M}{R_b R^2}, \quad (3.28)$$

ahol

$$\frac{h_1'^2(r_0)}{h_1^2(r_0)} = \omega^2.$$

A fenti egyenletek még mindig túl bonyolultak de további egyszerűsítések után elég egyszerű alakban írhatóak. Olyan egyszerűsítéseket szeretnénk végre hajtani, hogy "fizikai" szempontból értelmesek legyenek:

$$h_1 > 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r} > 0, \quad \rho > 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} < 0.$$

3.2.1. Első konstrukció:

Először válasszuk úgy meg $h_1(r)$ -et, hogy az energiasűrűség pozitív legyen, ehhez az szükséges, hogy

$$-3h_1'^2(r) + 2h_1(r)h_1''(r) = 0$$

teljesüljön. Megoldva a differenciálegyenletet, kapjuk:

$$h_1(r) = \frac{1}{(Cr + B)^2}$$

ahol C és B integrációs konstansok.

Tegyük fel a következő feltételt:

$$R(0, t) = 0$$

így azt kapjuk, hogy

$$B = 0,$$

$$R(r, t) = e^{-\frac{f(t)}{2}} C^2 r^2$$

és

$$\omega^2 = \frac{4}{r_0^2}$$

és a (3.26)-(3.28) egyenletek:

$$8\pi P_r = \frac{12}{C^4 r^4 r_0^2} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right], \quad (3.29)$$

$$8\pi P_{\perp} = \frac{\ddot{f}(t)}{2R^2} = \frac{2}{C^4 r^4 r_0^2} \left[\frac{M}{2C^2} e^{\frac{3f(t)}{2}} - 2 \right], \quad (3.30)$$

$$8\pi\rho = \frac{4}{C^4 r^4 r_0^2} \left[1 + \frac{M}{2C^2} e^{\frac{3f(t)}{2}} \right], \quad (3.31)$$

$$ds^2 = e^{-f(t)} C^4 r^4 [dt^2 - e^{f(t)} dr^2 - d\Omega^2]. \quad (3.32)$$

3.2.2. Második konstrukció:

Legyen $h_1(r) = De^{-2\left(\frac{r}{r_0}\right)}$ ahol D konstans és $\omega^2 = \frac{4}{r_0^2}$. Ekkor

$$R(r, t) = D^{-1}e^{-\frac{f(t)}{2}}e^{2\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

és így az anyagi változók és az ívelem a következőképpen alakul:

$$8\pi P_r = 0 \quad (3.33)$$

$$8\pi P_\perp = \frac{1}{R^2} \left[\frac{4D^2}{r_0^2} + \frac{1}{2}\ddot{f}(t) \right] \quad (3.34)$$

$$8\pi\rho = \frac{M}{R^2 R_b} \quad (3.35)$$

$$ds^2 = e^{-f(t)} D^{-2} e^{4\left(\frac{r_0}{r}\right)} [dt^2 - e^{f(t)} dr^2 - d\Omega^2]. \quad (3.36)$$

3.2.3. Harmadik konstrukció:

Legyen

$$h_1(r) = \cosh(\alpha(r_0 - r)) \quad (\alpha > 0).$$

Ezzel a függvénnnyel könnyedén feltudjuk írni a fizikai változók és az ívelem viselkedését:

$$8\pi P_r = 3\alpha^2 \sinh[\alpha(r_0 - r)] \quad (3.37)$$

$$8\pi p_\perp = \alpha^2 (\cosh^2[\alpha(r_0 - r)] - 3) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{f}(t)}{R^2} \quad (3.38)$$

$$8\pi\rho = \alpha^2 (3 - \cosh^2[\alpha(r_0 - r)]) + \frac{2M}{R_b R^2} \quad (3.39)$$

$$ds^2 = \frac{e^{f(t)}}{\cosh^2[\alpha(r_0 - r)]} [dt^2 - e^{f(t)} dr^2 - (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

4. Összefoglalás

Ebben a dolgozatban tehát Einstein egyenletekkel foglalkoztunk, és annak analitikus megoldásaival különböző konstrukciók mellett így három lényegében különböző

- Táguló
- Összehúzó
- Oszcilláló

csillagmegoldást tárgyaltunk. A legérdekesebb megoldás nyilvánvalóan a Táguló megoldás, hiszen egy olyan csillagmegoldás jött ki, ami $t = 0$ -ban $R = 0$ és egy bizonyos időpillanatban eléri a horizontot, és tovább tágul! Ennek a magyarázata csak az lehet, hogy valamilyen fizikai paraméter sérül az illesztés következtében, vagy pedig az energia feltételek nem teljesülnek!

Hivatkozások

- [1] L.Herrera and J.Ponce de León: *Anisotropic spheres admitting a one-parameter group of conformal motions*
- [2] L.D. Landau and E.M. Lifshitz :*The Classical Theory of Fields*
- [3] R.M.Wald :*General relativity*
- [4] E.Poisson: *A relativist's toolkit*
- [5] Perjés Zoltán: *Általános relativitáselmélet*

5. Nyilatkozat

Alulírott Gyöngyösi Zsolt, fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy a szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

.....

a hallgató aláírása

Szeged, 2012, május 10.