

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi és Informatikai Kar
Geometria Tanszék
Matematika BSc, tanári szakirány

SZAKDOLGOZAT
Aranymetszés a geometriában

Készítette: Juhász Szabolcs
Témavezető: Dr. Gévay Gábor

Szeged, 2011

Tartalomjegyzék

Előszó.....	3
Az aranymetszés fogalma	4
A gyökök néhány elemi azonossága	5
Az aranymetszés mértani megszerkesztése	6
Aranymetszés a Fibonacci-sorozat vonatkozásában.....	7
Az arany spirális.....	11
Alakzatok, amelyek vonatkozásában megjelenik az aranymetszés	13
Szabályos ötszög és az aranymetszés.....	13
Ötszögek az ötszögben	16
Az egységsugarú körbe írt ötszög és az aranymetszés	17
Ikozaéder és az aranymetszés.....	19
Dodekaéder és az aranymetszés	20
A dodekaéder köré írható gömb sugara	20
Irodalomjegyzék	22
Nyilatkozat.....	23

Előszó

Ezt a szakdolgozatot Matematika BSc-s hallgatóként írtam. Az egyetemen tanári szakírányra szakosodtam, mert már régen eldöntöttem, hogy tanítani, nevelni szeretnék.

Jelen dolgozat témája az aranymetszés, amely téma az általános iskolától kezdve a középiskolán keresztül az egyetemig megállja a helyét, annak függvényében milyen mélységekig merülünk el a témában.

Az arányok geometriájának világában az aranymetszés a vizuális érzet, és az esztétika körében a szépet, a kellemest reprezentálja. Az arány fogalma nem csak a matematikában jelenik meg, az „arányos” szó jelentése az aránytalannal szemben pozitív, elfogadható értéket képvisel. A szépség elengedhetetlen kritériuma. Felmerül a kérdés mitől arányos valami, mitől nem? A kérdés a matematika világába viszi a gondolkodót, hogy válaszként pontos kritériumot találjon.

Az aranyarányban és a kapcsolódó fogalmak mindegyikében benne van az „arany” szó, amely jelzi, hogy az ebbe a kategóriába tartozó arányosságok „aranyértékűek”, amelyek a természetben és a művészetekben is megjelennek, természetes egyensúlyt teremtve a szimmetria és az asszimetria között.

A témával már sokan, sokféle nézőpontból, szemszögből foglalkoztak. A festők, szobrászok, építészek, zenészek, írók és költők már régi időktől kezdve használják műveikben tudatosan az aranymetszést. A művészekén kívül az építészekről kezdve biológusok, tipográfusok és történészek át teológusok is foglalkoznak a témával. A „hétköznapi ember” a természetet és az élővilágot jobban szemügyre véve számos helyen találkozhat példákkal.

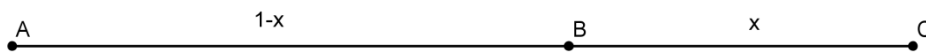
A dolgozatom célja bemutatni az aranymetszésnek a matematikai hátterét, és a dolgozattal segítséget nyújtani az aranymetszést oktató tanároknak. A megjelenő témák feldolgozása során szerettem volna a dolgozatot úgy megírni, hogy a későbbiekben fel lehessen használni, mint órai anyagrész, vagy mint szakkörön is előadható érdekes matematikai témát.

A szakdolgozat készítése közben, mint esztétikai, mint számelméleti és mint geometriai szemszögből vizsgáltam az aranymetszést, a Fibonacci-sorozatot, és a szabályos ötszög felépítését. A három témát úgy próbáltam megírni, hogy az olvasóval megszerettessem az aranymetszésnek, mint matematikai aránynak, a matematikai tulajdonságait.

Az aranymetszés fogalma

Definíció. Aranymetszésnek nevezzük egy mennyiség (pl. egy szakasz hosszának) két olyan részre bontását, melyek közül a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik az egészhez.

Legyen egy egységnyi hosszúságú AC szakasz, és legyen egy az aranymetszés szerinti B osztópont, legyen x a rövidebb szakasz, ahogyan az ábrán is látható:



Írjuk fel az arányokat: $\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$, reciprokaik is megegyeznek, vagyis $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{1-x}$.

x -szel bővítve: $\frac{1-x}{x} = \frac{1-x+x}{1-x}$, majd leosztva a következőt kapjuk: $\frac{1-x}{x} = 1 + \frac{x}{1-x}$.

Vezessük be a következő jelölést: $A = \frac{1-x}{x}$. Ekkor felírhatjuk: $A = 1 + \frac{1}{A}$. Ekvivalens átalakításokkal megkapjuk az aranymetszés egyenletét: $A^2 - A - 1 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldása után, a kapott gyökök: $A_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $A_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Az kapott $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ érték az aranymetszés arányszáma. Ez az érték egy végtelen tizedestört, amelyet általában a görög τ (görögül a „vágni” szó első betűje) vagy φ jelöli. A φ jelölés a görög szobrász Pheidiasz nevének kezdőbetűjére utal, aki műveiben gyakran alkalmazta az aranymetszés arányát. A szakirodalomban τ elterjedtebb, a dolgozatban is ezt a jelölést fogom használni.

A gyökök néhány elemi azonossága

Ez a rövid fejezet szerepelhetne függeléként is, mert az előzőekben kapott két gyök elemi tulajdonságait mutatja be, mégis fontosnak tartom itt az elején ismertetni ezeket az összefüggéseket.

Az aranymetszés egyenletéből kapott gyökökre egész kis algebrát lehet építeni. A következő eredmények látványosak, egyszerű számításokkal megkaphatóak, a bevezetett jelölések a dolgozat további részeiben is használatban lesznek.

$$\begin{aligned}x &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 & y &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \\x^2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618 & y^2 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382 \\\frac{1}{x} &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618 & \frac{1}{y} &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,618\end{aligned}$$

A kapott eredményekből szinte ránézésre igazolhatók a következő formulák:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 & x - y &= \sqrt{5} & xy &= -1 \\x^2 + y^2 &= 3 & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= -1 & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} &= 3\end{aligned}$$

Vegyük τ első néhány hatványát:

$$\tau^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \tau^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \tau^3 = \frac{4+\sqrt{5}}{2}, \quad \tau^4 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}, \quad \tau^5 = \frac{11+\sqrt{5}}{2}, \quad \tau^6 = \frac{18+\sqrt{5}}{2}, \quad \dots$$

Ekkor több érdekes dologra felfigyelhetünk:

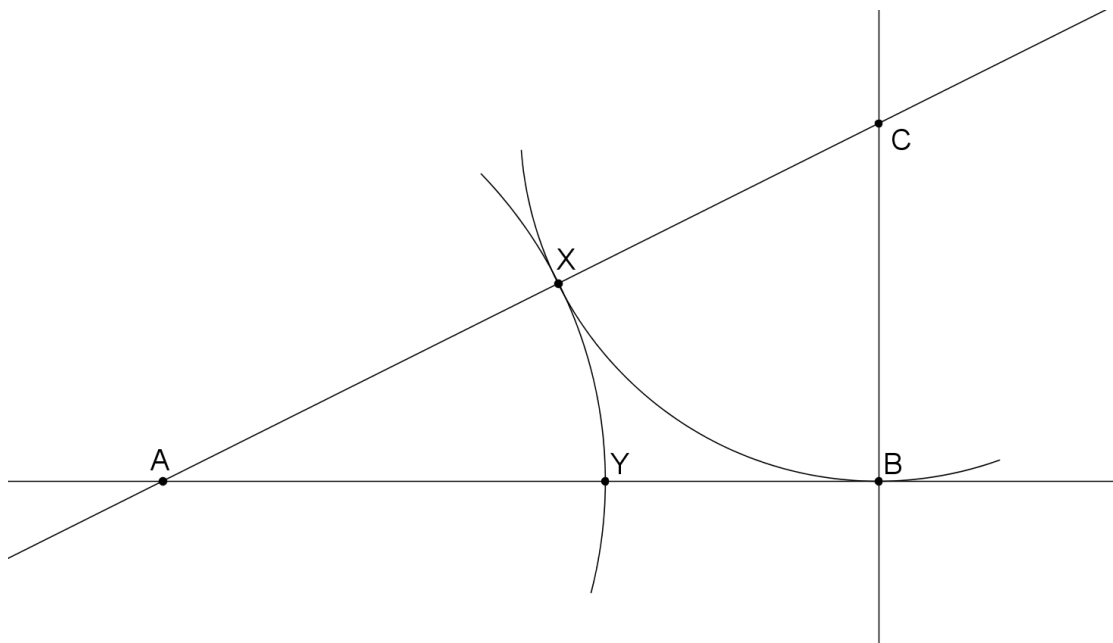
1. A törtben $\sqrt{5}$ előtt a Fibonacci-sorozat (későbbiekben lesz róla szó) elemei jelennek meg.
2. $\tau^2 = \tau + 1$, $\tau^3 = \tau^2 + \tau$, $\tau^4 = \tau^3 + \tau^2$, ...
3. τ összes hatványa kifejezhető a Fibonacci-sorozat elemei és τ segítségével. Ha a Fibonacci-sorozat elemeit f_i -vel jelöljük, akkor a hatványok a következőképpen számolhatók:

$$\tau^i = f_i \tau + f_{i-1}, \forall i \geq 2\text{-re.}$$

Az aranymetszés mértani megszerkesztése

Ebben a fejezetben az aranymetszés megszerkesztéséről lesz szó, arról, hogyan lehet egy szakaszt körző és vonalzó segítségével az aranymetszés arányának megfelelően két részre osztani. Több módszer ismeretes, az alábbiakban az ún. Püthagorasz-módszer kerül bemutatásra.

A szerkesztés a következő lépésekből áll. Vonalzóval szerkesszünk meg egy egyenest, amelyen jelöljük ki az AB szakaszt. Következő lépésként húzzunk merőleget AB -re B -n keresztül, majd mérjük rá az AB szakasz felét, ez lesz a C pont. Egyenessel kössük össze C -t A -val, kapjuk a CA szakaszt.



Körzővel a C -pontból vegyük fel a CB távolságot. C -ből rajzoljunk ívet a CA szakaszra, majd jelöljük a kapott metszéspontot X -el. Most szúrjuk a körzőt az A pontba és AX távolságot vigyük fel az AB szakaszra, legyen ez a pont Y . Az Y pont az AB szakaszt az aranymetszés arányában metszi, vagyis

$$\frac{AY}{YB} = \frac{AB}{AY}.$$

Aranymetszés a Fibonacci-sorozat vonatkozásában

Definíció. A Fibonacci-sorozat olyan számsorozat, amelynek első két tagja: $f_1 = f_2 = 1$, a többi tag pedig az $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ rekurzív képlet segítségével definiált számsorozat megfelelő eleme. Tehát az 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... sorozat.

A következőkben bevezetünk egy fogalmat, és bizonyítás nélkül megemlítünk egy tételt, amelyeket a későbbiek során használni fogjuk.

Tétel. Két sokszög területe akkor és csak akkor egyezik meg, ha véges sok egyenessel egymásba átdarabolhatók.

Definíció. Azt mondjuk, hogy K_1 sokszög a K_2 sokszög átdaraboltja, ha véges sok egyenessel a K_1 olyan konvex sokszögekre osztható, amelyeknek uniója a K_2 sokszög.

Tétel. Legyen f_n ($n \in \mathbb{N}$) a Fibonacci-sorozat n -edik eleme. Minden $n \geq 2$ -re

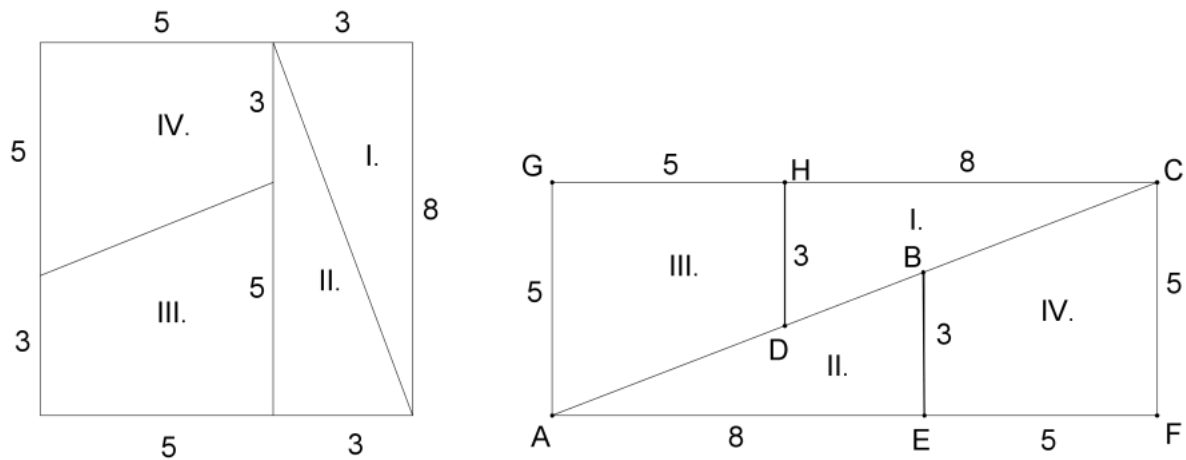
$$f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^{n+1}.$$

A tételt úgy is megfogalmazhatnánk, hogy a Fibonacci-sorozat bármelyik elemének a négyzete, valamint az elemet megelőző és rákövetkező elemnek a szorzatának a különbségének az abszolút értéke mindig 1, vagyis:

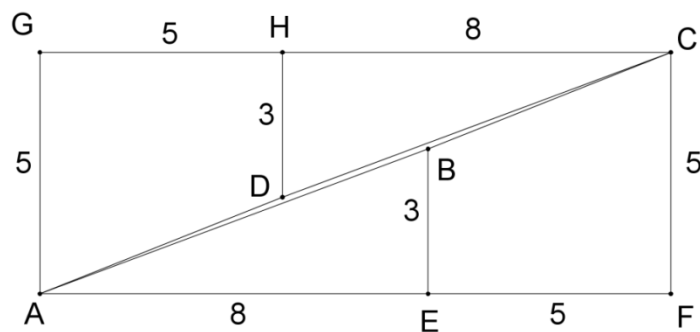
$$f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = 1.$$

Ha geometriai szempontból nézzük, fogalmazhatunk úgy is, hogy egy f_n oldalú négyzet és f_{n-1} , f_{n+1} oldalú téglalap területének a különbsége mindig 1. A következő furfangos feladattal szemléltetjük, hogyan lehet a területek kiszámítása után „eltüntetni” az 1-et.

Feladat. Egy 8 cm oldalú négyzetet daraboljunk fel a bal oldali ábrán látható módon, majd a négyzet I. II. III. IV. részeiből állítsuk össze a jobb oldali ábrán látható téglalapot.



A négyzet területe: $8^2 = 64 \text{ cm}^2$, a téglalap területe: $5 + 8 \cdot 5 = 65 \text{ cm}^2$. Honnan adódik a különbség? A trükk az $f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = 1$ egyenletben van, mert tudjuk, hogy átdarabolással a területek megegyeznének. Ha pontosan jártunk volna el, a következő ábrát kaptuk volna.



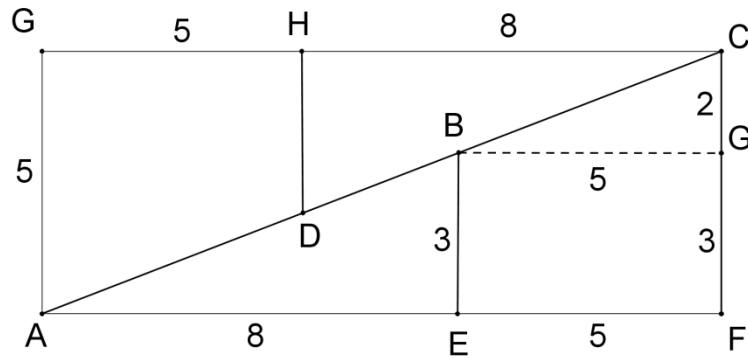
A középen lévő $ABCD$ paralelogramma az egységnyi területű többlet. Ha ebben az eljárásban nagyobb Fibonacci-számokat használunk, akkor az AC átlóhoz jobban hozzásimuló paralelogrammát fogunk kapni.

Ha az A , B és C pontok egy egyenesen, az átlón lennének, akkor az ABE és a BCG háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CG}{BG}$$

arányt adhatnánk meg.

A valóságban azonban $\frac{BE}{AE} = \frac{3}{8}$ és $\frac{CG}{BG} = \frac{2}{5}$ teljesül.



Az arányok különbségéből nyilvánvaló, hogy az A , B és C pontok nem egy egyenesen vannak, és az AB szakasz meredeksége nagyobb, mint BC szakaszé, ezért B pont az AC szakasz felett van.

A Fibonacci-sorozat elemei természetes számok, amelyeket összeadással kapunk meg. Hogy jelenik meg τ , egy irracionális szám? Az előző kis bevezető után vizsgáljuk meg a Fibonacci-sorozat szomszédos elemei hányadosának a határértékét.

Tétel. A Fibonacci-sorozat egymást követő tagjainak hányadosából képzett sorozat határértéke az aranymetszés aránya, τ .

Bizonyítás. Legyen a Fibonacci-sorozat szomszédos elemei hányadosának határértéke H .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = H$$

Felírhatjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n + \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n-1}$$

Behelyettesítve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = H$$

$$1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = H$$

$$1 + \frac{1}{H} = H$$

$$H^2 - H - 1 = 0$$

ami pedig az aranymetszés egyenlete, amelynek egyik gyöke τ . ■

Vizsgáljuk meg azt az irányt, amikor τ -hoz rendeljük a Fibonacci-sorozat elemeit.

Tétel. Bármely n természetes szám esetén a Fibonacci-sorozat n -edik eleme:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n \right).$$

Bizonyítás. Meg kell konstruálni egy eljárást, amelyet felhasználva megkapjuk a Fibonacci-sorozat n -edik elemét. Tegyük fel, hogy van olyan q^n $q \neq 0$ mértani sorozat, amelyre teljesül a rekurziós formula: $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$. Ebből következik $q^2 - q - 1 = 0$.

Fordítva, ha q a $q^2 - q - 1 = 0$ egyenlet megoldása, akkor a q^n sorozat kielégíti a rekurziós formulát. Az egyenlet gyökei $q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ és $q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, ezért az $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n$ és az

$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$ mértani sorozat is kielégíti a rekurziós formulát, de még nem teljesül rájuk az,

hogy $a_1 = a_2 = 1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely $c, d \in \mathbb{R}$ esetén az $a_n = c \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n$

és az $a_n = d \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$, sőt az $a_n = c \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n + d \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$ mértani sorozatok kielégítik a rekurziós formulát, azonban olyan c és d értékeket kell keresnünk, amelyekkel az

$$a_n = c \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n + d \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$$

sorozatra teljesüljön, hogy $a_1 = a_2 = 1$. Ez akkor teljesül, ha

$$c \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + d \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \text{ és } c \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^2 + d \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^2 = 1,$$

ez pedig, ha $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Azt kaptuk, hogy az $a_n = c \frac{1 + \sqrt{5}}{2}^n + d \frac{1 - \sqrt{5}}{2}^n$ sorozat

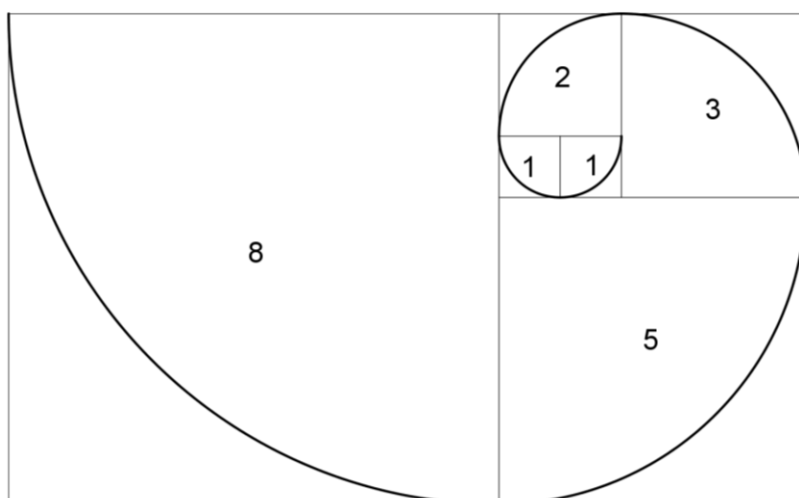
az, amire teljesül, hogy $a_1 = a_2 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

■

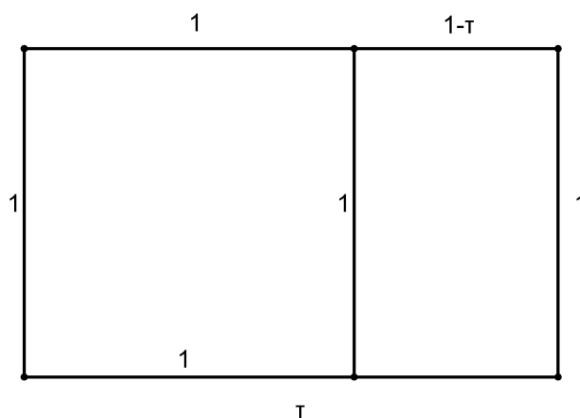
Az arany spirális

Ebben az alfejezetben még egy szemléletes dolgot mutatunk be az aranymetszés és az Fibonacci-sorozat vonatkozásában.

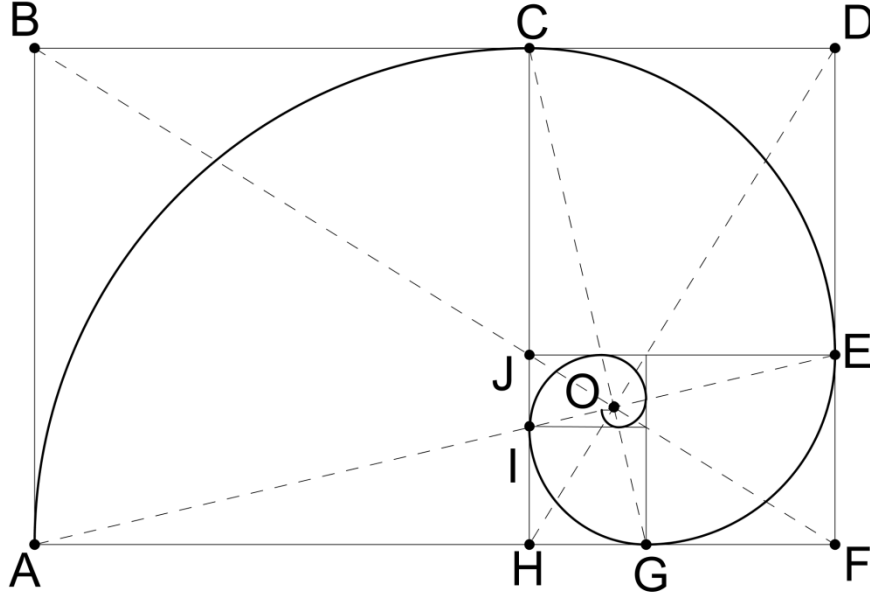
Ha Fibonacci-számokat úgy kezeljük, mint négyzetek oldalainak hosszát, és azokat az ábrán megfelelő módon egymáshoz illesztjük az arany spirálist kapjuk.



Vizsgáljuk meg, mi van a konstrukció mögött. Ne adott oldalhosszúságú négyzetekben gondolkozzunk, hanem olyan téglalapokkal dolgozzunk, amelynek a hosszabbik oldaluk úgy aránylik a rövidebbikhez, mint $\tau : 1$. Az ilyen téglalapot, amely a következő ábrán is szerepel, nevezhetjük „arany téglalapnak” is.



Ha vesszük a $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ relációt, és ha veszünk egy $ABDF$ arany téglalapot, akkor észrevehetjük, hogy a téglalapot fel lehet osztani egy $ABCH$ négyzetre és egy kisebb $CDFH$ arany téglalagra. Vegyük észre, hogy a kapott téglalapot újra és újra felbonthatjuk az előbbi módon, és ezt az eljárást a végtelenségig folytathatjuk.



Vegyük két párhuzamos helyzetű és hasonló téglalapot. Legyenek ezek például az $ABDF$ és a $HJEF$. A hasonlóság miatt a J pont rajta van az $ABDF$ téglalap BF átlóján. Az AE, BF, CG és DH egyenesek az összes téglalap összes csúcsát tartalmazzák. Az $ABDF$ téglalpból a $CDFH$ téglalapot, a BF és DH egyenesek O pont körüli nyújtva forgatással kapjuk. Megfigyelhetjük, hogy ez a hasonlósági transzformáció az $A, C, E, G, I, \dots$ pontokat a következőbe, és a $B, D, F, H, J, \dots$ pontok mindegyikét szintén a következőbe transzformálja. A leképezés az O középpontú negatív irányú negyedfordulatnak és az $O(\tau^{-1})$ nyújtásnak a szorzata. Ebből következik, hogy DH merőleges BF -re. A transzformációnak az inverze minden téglalapot nagyobb téglalapba transzformál, az O pont körüli pozitív negyedfordulatnak és az $O(\tau)$ nyújtásnak a szorzata. Az előzőekből következik, hogy

$$\frac{OB}{OD} = \tau = \frac{BC}{CD}.$$

Alakzatok, amelyek vonatkozásában megjelenik az arany metszés

Szabályos ötszög és az arany metszés

Definíció. A szabályos ötszög olyan ötszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge ugyanolyan nagyságú.

Az ötszöggel kapcsolatban több nevezetes háromszöget figyelhetünk meg, amelyek egyenlőszárú háromszögek.

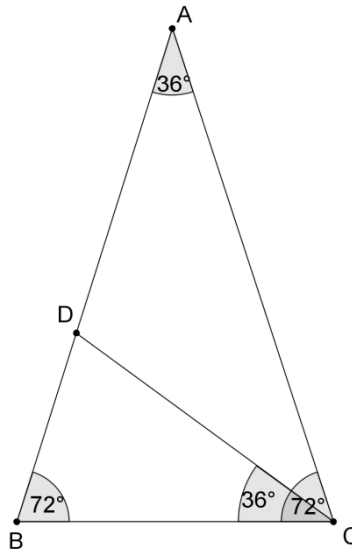
A legszembetűnőbbek azok a háromszögek, amelyekből „összerakható” az ötszög. Ezek az ötszögek a következőképpen néznek ki. Az alapjaik az ötszög oldalai, száraik pedig az ötszög köré írható kör sugarai. Az ötszög oldalaihoz tartozó központi szögek nagysága $360^\circ : 5 = 72^\circ$, míg az alapon lévő szögek nagysága 54° . Az arany metszés szempontjából másik két fajta háromszögeknek van fontosabb jelentése.

Az egyik típusban olyan háromszögek vannak, hogy alapjuk az ötszög egyik oldala, száraik pedig az ötszög két átlója. Ezeknek a háromszögeknek az alapon fekvő szögeik 72° , a harmadik szögük pedig 36° .

A másik fajta háromszögek tompaszögűek, az előző háromszögekből úgy kaphatók meg, hogy az alapon lévő szögeket megfelezzük. A keletkező háromszögeknek az alapja tehát szintén az ötszög oldala lesz, rajta a szögek 36° -osak, a harmadik szögük pedig 108° lesz.

Vizsgáljuk az arany metszést az ötszög vonatkozásában. Vegyünk egy az előbb említett háromszöget az ötszögből, amelynek az alapja az ötszög oldala, oldalának végpontjait kössük össze a szemközti csúccsal, vagyis egy második típusú háromszöggel dolgozzunk.

Legyen ennek a háromszögnek a két szára AB és AC . Ekkor $\angle ABC = \angle BCA = 72^\circ$ és $\angle CAB = 36^\circ$.



A B csúcs körül BC távolsággal húzzunk körívet, és a körív az ABC háromszögben messe az AB oldalt a D pontban. Ekkor a BCD háromszög ugyancsak egyenlő szárú lesz, a BD alapon fekvő szögei ugyancsak 72° , míg a C csúcsnál lévő szöge 36° . Ez azt jelenti, hogy a BCD háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, meg még azt is, hogy a CD szakasz a BCA háromszögben szögfelező. Ezek szerint $\angle DCA = 36^\circ$, vagyis az ADC háromszög is egyenlő szárú. Kaptuk: $BC = DC = AD$.

A szögfelezőtétel szerint, vagyis a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, kapjuk:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA} ,$$

de $DA = CB$ és $CA = BA$, amit behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{BD}{CB} = \frac{CB}{BA} ,$$

ahonnan $CB^2 = BD \cdot BA$, ami pedig azt jelenti, hogy a D pont az AB oldalt az aranymetszés szerint osztja két részre.

A kapott eredményeket tétel formájában is megfogalmazhatjuk.

Tétel. A szabályos ötszögben az átló és az oldal hosszára az aranymetszés áll fenn, azaz

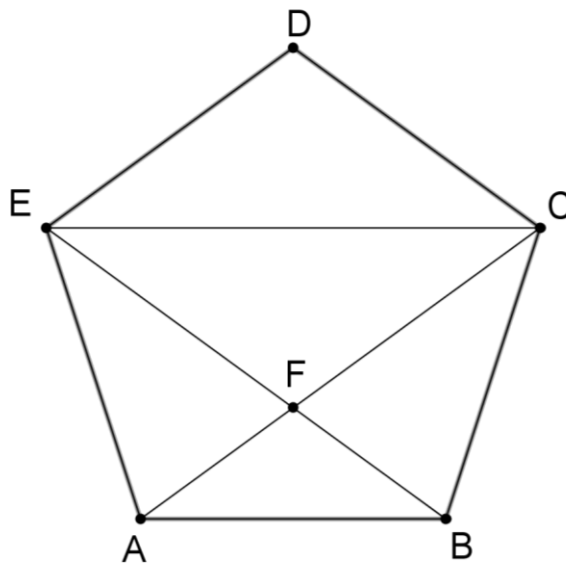
$$\text{átló} : \text{oldal} = \tau : 1.$$

Ebből az eredményből következik az is, hogy egy körbe írt szabályos tíszög oldalának és a sugárnak az aránya szintén az aranymetszés.

Az átlók metszési aránya az ötszögben

Tétel. Az átlók az aranymetszés arányában metszik egymást.

Legyen az egységnyi oldalhosszúságú $ABCDE$ ötszög oldalának hossza q , az átló hossza pedig p .



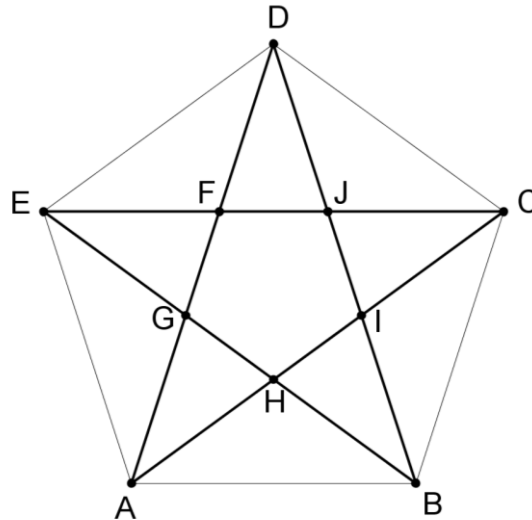
Vegyük az EB és AC átlók metszéspontját, legyen ez a pont F . Vegyük észre, hogy az ECF és a BAF párhuzamos oldalú hasonló háromszögek, valamint azt, hogy a DC és az EF a $DEFC$ rombusz szemkötti oldalai.

A hasonlóságból a következő arányokat írhatjuk fel

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EC}{AB} = \tau = \frac{EB}{DC} = \frac{EB}{EF}.$$

Ötszögek az ötszögben

Rajzoljuk fel $ABCDE$ ötszög minden átlóját. Mindegyik átló másik két átlót fog metszeni. Legyenek a metszéspontok F, G, H, I és J .



Vizsgáljuk például az EC átlót. Ez az átló F -ben és J -ben metszi az AD és BD átlókat. Mivel a J pont az EC átlót az aranymetszés arányában osztja az EJD háromszög szintén aranymetszési tulajdonságú egyenlőszárú háromszög. Ebből az is következik, hogy F az az EJ -t szintén az aranymetszésnek megfelelően metszi. Mivel az EJ szakasz hossza ugyanaz, mit FC szakasz hossza, következik, hogy FJ szakasz az EC átló közepén van. Mivel EJ és FC szakaszok hosszai megegyeznek az oldalak hosszával, ezért $FJ : ED = \tau : 1$.

Az átlókon a metszéspontok által meghatározott szakaszok szimmetria okok miatt egyenlők:

$$FJ = JI = IH = HG = GF.$$

Az eredeti és az új ötszögről az is elmondható, hogy a szögeik is megegyeznek, ezért megfogalmazható a következő tétel:

Tétel. Ötszögben az átlók által meghatározott ötszög oldalai úgy aránylanak az eredeti ötszög oldalaihoz, mint $1 : (\tau - 1)$.

Ha az előbbi konstrukciónál maradunk, vagyis ha az ötszög átlóit behúzzuk, azonban az eredeti ötszög oldalait eltávolítjuk, akkor egy szabályos ötágú csillagot kapunk, amelyben

$$AH = HB = BI = \dots = GA$$

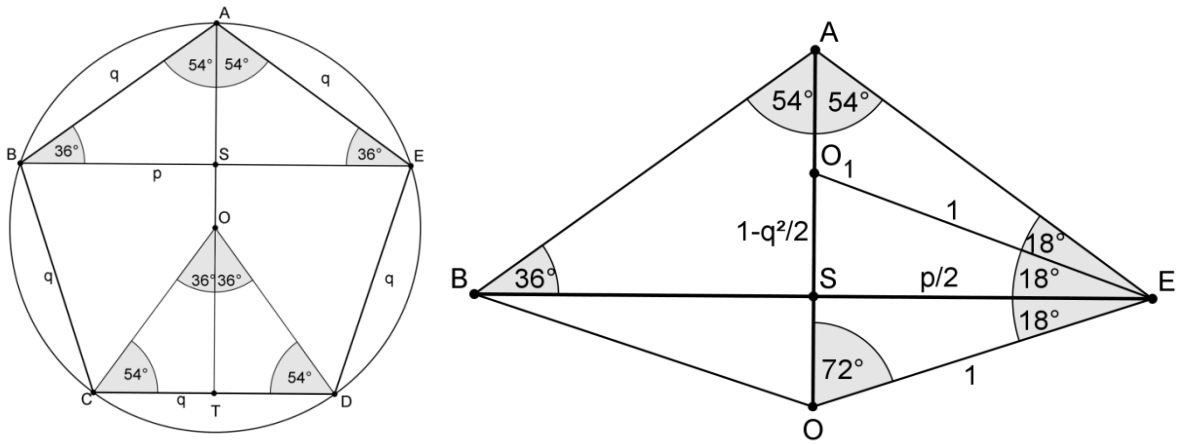
lesznek az oldalak. A csúcsokban lévő szögek 36° -sak lesznek. Az ötszög tulajdonságaiból és az előző számításokból következik a következő tétel.

Tétel. Az ötszögbe írt csillagötszög oldalai úgy aránylanak az eredeti ötszög oldalaihoz, mint $\tau : 1$.

Megjegyzés. Az ötszögbe szerkesztett ötszög és csillagötszög eljárásokat végtelen sokáig folytathatjuk.

Az egységsugarú körbe írt ötszög és az aranymetszés

Legyen egy egységsugarú kör, amelybe az ötszöget rajzoljuk. Legyen az ötszög oldala: $AB = q$ és az átlója: $BE = p$. Első lépésként határozzuk meg a hosszukat. Egy oldal az ötszög köré írt kör középpontjából 72° alatt látszik. Az ábrán látható módon O középpontból C és D csúcsba behúzzuk a sugarakat.



Vegyük észre, hogy $CTO_\Delta \sim ASB_\Delta$. Ekkor: $\frac{|AS|}{\frac{q}{2}} = \frac{q}{1}$ és ekkor $AS = \frac{q^2}{2}$. Mivel

$$|AO| = 1, \text{ a kör sugara, így } OS = AO - AS = 1 - \frac{q^2}{2}.$$

Tükrözzük az O pontot S -re, így kapjuk O_1 -et. Az O_1E szakasz az SEA háromszög szögfelezője, ezért az AS oldalt a szomszédos SE és AE oldalak arányában osztja. Ezért O_1S

$$\text{szakasz értéke: } O_1S = \frac{q^2}{2} \cdot \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2} + q} = \frac{pq^2}{2(2q+p)}. \text{ De: } |OS| = 1 - \frac{q^2}{2}, \text{ ezért: } 1 - \frac{q^2}{2} = \frac{pq^2}{2(2q+p)}.$$

Rendezés után kapjuk az első egyenletünket:

$$p = \frac{q(q^2 - 2)}{1 - q^2}$$

Második egyenletet úgy kapjuk, hogy az SEO_1 háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt: $1 - \frac{q^2}{2}^2 + \frac{p}{2}^2 = 1$. A változókat szétválasztva kapjuk:

$$p^2 = 4q^2 - q^4$$

Ha behelyettesítünk p^2 -be kapjuk, hogy $\frac{q(q^2-2)}{1-q^2}^2 = 4q^2 - q^4$. Rendezés után egy bikvadratikus egyenletet kapunk: $q^4 - 5q^2 + 5 = 0$.

Az egyenlet megoldása után kapjuk, hogy $q^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel q az egységsugarú körbe írt ötszög oldalhosszúságát adja, a feladat szempontjából a negatív előjelnek van értelme (a pozitív előjellel nagyobb számot kapnánk, mint 1).

A szabályos ötszög oldala tehát: $q^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ és $q = 1,176 \dots$

Az átló a $p^2 = 4q^2 - q^4$ egyenletet felhasználva: $p^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ és $p = 1,902 \dots$

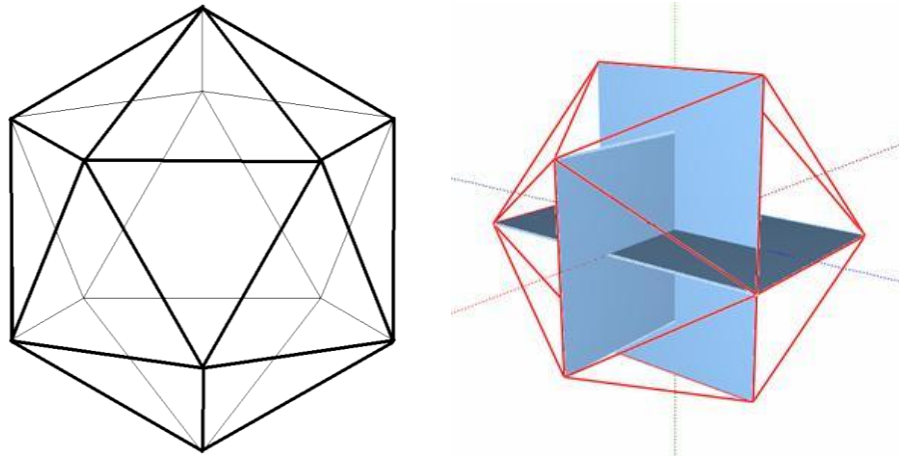
Emlékezzünk vissza korábbi ismeretekre, amelyeket az dolgozat elején ismertettünk: $x^2 = x + 1$ és $y^2 = y + 1$. Ezek felhasználásából kapjuk, hogy $p^2 = x + 2 = x^2 + 1$ és $q^2 = y + 2 = y^2 + 1$.

Az oldal: $q = \sqrt{y^2 + 1}$, az átló: $p = \sqrt{x^2 + 1}$.

Az összefüggés: $\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{x^2+1}{\frac{1}{x^2}+1} = x$, ami azt jelenti, hogy a szabályos ötszög átlója és oldala között az aranymetszés aránya áll fenn.

Ikozaéder és az aranymetszés

Definíció. Ikozaéderen olyan konvex poliédert értünk, amelyet 20 lap határol. Szabályos ikozaédert 20 szabályos háromszöglap alkot, a csúcsokban 5-5 találkozik.

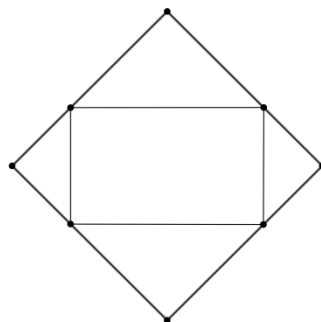


Az ikozaéderben egy csúcsra illeszkedő háromszögek olyan gúlát alkotnak, amelynek alapja szabályos ötszög. Az ikozaéder bármely két szemközi éle olyan téglalap oldalai, amelyeknek hosszabbik oldalai, a szabályos ötszögek átlói. A szabályos ötszög átlójának hossza, az oldala hosszának a τ -szorosa. Az arany téglalap oldalai hosszának aránya éppen $\tau:1$. Az ikozaéder 12 csúcsát három páronként egymásra merőleges arany téglalap csúcsai alkotják.

Az origó középpontú ikozaéder Descartes-féle koordinátái megadhatók tehát az alábbi formában:

$$(0; \pm 1; \pm \tau), (\pm 1; \pm \tau; 0), (\pm \tau; 0; \pm 1).$$

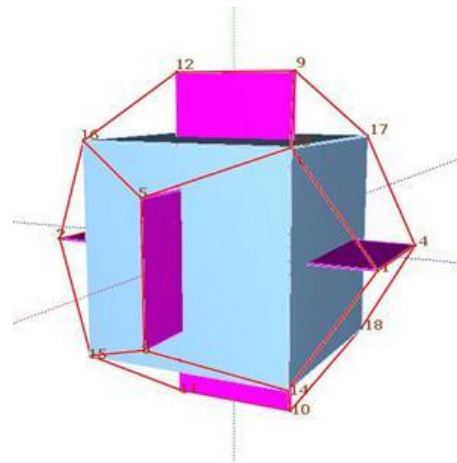
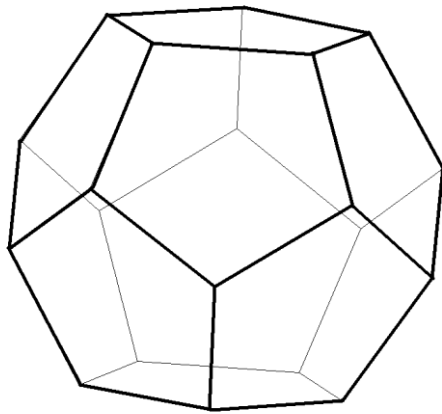
Ha egy négyzetbe beírunk egy arany téglalapot, mint ahogyan a következő ábrán látszik, a téglalap a négyzet oldalait $\tau : 1$ arányban osztják.



Ha a négyzetet azonosítjuk az oktaéder három „egyenlítői” négyzetének egyikével, akkor azt kapjuk, hogy az oktaéderbe írt ikozaéder csúcsai az oktaéder éleit $\tau : 1$ arányban osztják.

Dodekaéder és az aranymetszés

Definíció. Dodekaéderen olyan konvex poliédert értünk, amelynek 12 lapja van. Általában a szabályos dodekaédert értjük alatta, azt a szabályos testet, amelyet 12 szabályos ötszög alkot, melyek közül minden csúcsban 3-3 találkozik. Duális poliédere az ikozaéder.



A dodekaéder téglalapok némiképp eltérnek az ikozaéderhez szükséges arany téglalapoktól. Oldalhosszúságukhoz ezúttal nem csupán τ értékre lesz szükségünk, hanem az arany téglalaphoz a négyzet levágásával keletkezett $\tau - 1$ értékre is.

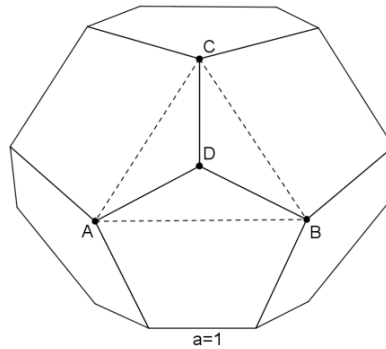
Az origó középpontú dodekaéder Descartes-féle koordinátái megadhatók az alábbi formában:

$$(\pm 1; \pm 1; \pm 1), \quad (0; \pm \frac{1}{\tau}; \pm \tau), \quad (\pm \frac{1}{\tau}; \pm \tau; 0), \quad \tau; 0; \pm \frac{1}{\tau}.$$

A dodekaéder köré írható gömb sugara

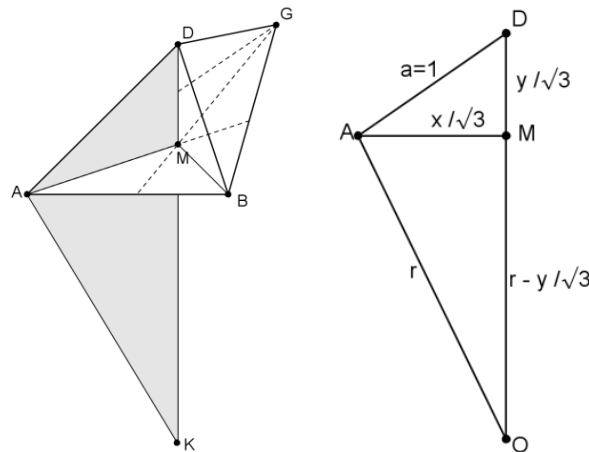
Feladat. Számítsuk ki az egységnyi oldalélű dodekaéder köré írható gömb sugarát. A gömb illeszkedni fog a dodekaéder 20 csúcsára.

Vegyünk egy D csúcsot a dodekaéderen és vegyük a hozzá legközelebb álló 3 csúcsot, A -t, B -t, és C -t.



Ez a három csúcs a D csúccsal együtt egy szabályos háromszög alapú gúlát alkot. Ekkor az ABC háromszög oldala éppen az egységnyi oldalhosszú szabályos ötszög átlója, hosszúsága $\frac{p}{q} = x$.

A gúla magasságvonalának talppontja az ABC háromszög középpontja. Ahhoz, hogy meghatározzuk a csúcsok távolságát a középponttól, a gúlával kell számolnunk.



Az x oldalhosszúságú egyenlő szárú háromszög súlyvonalának a hossza: $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Az M pont a harmadolópontban van: $AM = \frac{x}{3}$. Tekintsük az AMD háromszöget és az AOD háromszöget.

Pitagorasz-tételt alkalmazva az AMD háromszögre:

$$DM = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} = \sqrt{\frac{3 - x^2}{3}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x^2}{3}} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

Az AOM háromszögre alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$r = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Irodalomjegyzék

- [1] Gerőcs László: A Fibonacci-sorozat általánosítása, Scolar kiadó, Budapest, 1998
- [2] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987
- [3] Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991
- [4] Kovács Ádám, Dr.Vámos Attila: Aranyháromszög, Műszaki Kiadó, Budapest, 2007
- [5] Kurusa Árpád: Euklideszi geometria, Polygon Jegyzettár, 2008
- [6] Vármonostory Endre: Bevezetés a matematikába, Polygon Jegyzettár, 2007
- [7] <http://buzasferenc.hu/aranymetszes.doc>

Nyilatkozat

Alulírott Matematika BSc tanári szakirányos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

aláírás

dátum