

Konvex függvények differenciálhatósági tulajdonságai

Farkas Éva

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Monoton függvények differenciálhatósága	5
3. Egyváltozós konvex függvény folytonossága	6
4. Egyváltozós konvex függvények egyszeres differenciálhatósága	8
5. Egyváltozós konvex függvények kétszeres differenciálhatósága	10
6. Többváltozós konvex függvények folytonossága	12

1. Bevezetés

A 19. század elején kezdtek a matematikusok mélyebben foglalkozni azzal a kérdéssel, hogy vajon bizonyos kategóriába tartozó függvények, mint például a monoton vagy a folytonos függvények mindenütt vagy esetleg véges sok ponttól eltekintve differenciálhatók-e.

A téma egyik első kutatója Ampère volt. 1806-ban megjelent egy értekezése, amiben úgy vélte, hogy „tetszés szerinti” függvény mindenütt differenciálható, kivéve esetleg bizonyos „különleges és elszigetelt” pontokat. Érvelése azonban nem állta meg a helyét a szigorú kritikákkal szemben.

A 19. században született első eredmények negatívak voltak ebben az irányban. Weierstrass véget vetett a folytonos függvények differenciálhatóságának kimutatására irányuló ismételt erőfeszítéseknek. 1861-től kezdve előadásaiiban, majd egy 1872-ben megjelent cikkben példát közölt egy olyan folytonos függvényre, amely sehol sem differenciálható. (1830 körül Bolzano már talált példát ilyen függvényekre, kutatásait azonban nem közölhette, mert ebben az időszakban megfosztották a tanítás és könyvírás jogától.) Később egyre több ilyen függvényt találtak, a munkában az analízis kutatás jóformán minden jelentős személyisége részt vett.

Azonban nemcsak negatív eredmények születtek a témában. Nagyon fontos áttörést jelentett Lebesgue tétele, amely kimondja, hogy egy intervallumon folytonos monoton valós függvény az intervallum majdnem minden pontjában differenciálható. A majdnem minden pontot itt úgy értjük, hogy egy 0 Lebesgue-mértékű halmaztól eltekintve. A dolog szépsége részben abban is rejlik, hogy mind a 0-mértékű halmaz definíciója mind a Lebesgue-tétel bizonyítása elmondható a Lebesgue-mérték és integrál részletes bevezetése nélkül.

Ebben a dolgozatban egy- és többváltozós konvex függvények folytonosságát és egyszeres differenciálhatóságát vizsgáljuk. Először Lebesgue tételének segítségével megmutatjuk, hogy egy intervallumon értelmezett egyváltozós valós konvex függvény az intervallum majdnem minden pontjában egyszer differenciálható. Az egyváltozós esetben ezután megmutatjuk azt az erősebb állítást, hogy egy konvex függvény az intervallum legfeljebb megszámlálható pontjának kivételével mindenhol differenciálható. Ez utóbbi azt is mutatja, hogy a konvexitás erősebb feltétel mint a monotonitás, hiszen tudjuk, hogy a Lebesgue-tételben a kivételes pontok nullamértékűségénél többet állítani nem lehet. Szeretnénk itt azt is megjegyezni, hogy a második derivált alkalmas definíciója mellett azt is be lehet bizonyítani, hogy egy intervallumon értelmezett konvex valós függvény az intervallum majdnem minden pontjában kétszer differenciálható. Ez Alexandrov híres tétele, azonban ennek tárgyalásától ebben a dolgozatban eltekintünk. Végül a dolgozat utolsó

részében a többváltozós konvex függvények folytonossági tulajdonságait vizsgáljuk.

Meg szeretnénk jegyezni, hogy a dolgozatunkban lévő eredmények geometria fontossága abban a tényben rejlik, hogy egy n -dimenziós euklideszi térbeli konvex test határa lokálisan leírható egy konvex függvény gráfjának segítségével. Ezáltal fontos információt nyerünk konvex testek határának differenciálhatósági tulajdonságaira. A témát P. M. Gruber *Convex and Discrete geometry* [1] című nemrég megjelent könyvének idevágó része alapján tárgyaljuk.

2. Monoton függvények differenciálhatósága

Mint már korábban említettük, az első alapvető fontosságú, pozitív eredmény a differenciálhatóság problémája terén Lebesgue tétele a monoton függvényekről:

2.1. Tétel. *Minden folytonos monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható, azaz a kivételes pontok legfeljebb nullamértékű halmazt alkotnak.*

Lebesgue e tételét, amelyben egyébként a folytonosság feltétele elhagyható, 1904-ben közölte. Megjegyezzük, hogy a tételben lévő lényeges feltétel, nevezetesen a monotonitás, lecserélhető pl. arra, hogy a függvény abszolút folytonos. Ezzel kapcsolatos részletes információ található például a [2] könyv 17. és 18. szakaszában.

A Lebesgue-tétel állításában érdekes módon nem játszik szerepet sem a Lebesgue-integrál fogalma, sem az általános mértékfogalom. A nullamértékű halmazok fogalma egyszerűen, néhány szóban megfogalmazható. Így a tétel a Lebesgue-féle integrálelmélettől függetlenül is bizonyítható.

1. Definíció. *Akkor mondunk ponthalmazt Lebesgue szerint nullamértékűnek, ha lefedhető intervallumoknak egy olyan véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszerével, amelynek összhosszúsága tetszés szerinti kicsi előre adott pozitív ε számnál kisebb.*

A befedő intervallumok tetszőleges típusúak lehetnek, azaz nem számít, hogy nyíltak, zártak vagy félig zártak. Ezért mindig szorítkozhatunk nyitott intervallumokkal való befedésekre.

A definícióból azonnal következik, hogy nullamértékű halmaz minden részhalmaza is nullamértékű, és hogy véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok nullamértékű halmaz egyesítése is nullamértékű. Mivel az egyetlen pontból álló halmaz nullamértékű, következik, hogy minden véges vagy megszámlálható sok pontból álló halmaz is nullamértékű.

A következő alternatív definíció az előzővel ekvivalens, és néha könnyebben használható.

2. Definíció. *Valós számok egy halmaza akkor nullamértékű, ha bezárható véges összhosszúságú intervallumrendszerbe úgy, hogy a halmaz minden egyes pontja végtelen sok intervallum belsejébe essék.*

A Lebesgue-tételben szereplő *majdnem mindenütt* kifejezést abban az értelemben használjuk, hogy a szóban forgó állítás mindenütt érvényes, kivéve legfeljebb egy nullamértékű halmaz pontjait.

Bizonyításunkban fel fogjuk használni az alábbi monoton függvényekre vonatkozó egyszerű állítást. Egy intervallumon értelmezett valós monoton függvénynek véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok szakadási helye lehet. Ezt a következőképpen lehet belátni. Rendeljük hozzá minden x_0 szakadási helyhez az y tengelyen a

$$f_-(x_0) \leq y \leq f_+(x_0)$$

intervallumot, ahol $f_-(x_0)$ jelöli az $f(x)$ függvény x_0 -beli baloldali határértékét és $f_+(x_0)$ jelöli a jobboldali határértéket. A függvény monotonitása miatt ezek a határértékek az intervallum minden pontjában léteznek. Az így kijelölt intervallumok nem nyúlhatnak egymásba, hiszen ha létezik az x_0 és az x'_0 szakadási hely, ahol $x_0 < x'_0$, ekkor jelöljük ξ -vel a két szakadási hely között egy tetszőleges pontot, nyilván

$$f_-(x_0) \leq f(\xi) \leq f_+(x'_0).$$

Az így kapott intervallumoknak véges vagy megszámlálhatóan végtelen a száma, illetve a szakadási helyek, amelyekhez ezeket az intervallumokat rendeltük, száma is véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

3. Egyváltozós konvex függvény folytonossága

Mindenekelőtt bevezetjük a valós függvények konvexitásának fogalmát.

3. Definíció. Az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt konvexnek nevezzük I -n, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Most bebizonyítunk egy technikai állítást, amit később felhasználunk.

3.1. Lemma. Legyen az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex. Ekkor

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

minden $x, y, z \in I$, $x < y < z$ esetén.

Bizonyítás. Legyen $x, y, z \in I$, $x < y < z$, és vegyünk egy olyan $0 < \lambda < 1$ konstanst, hogy $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$. Az f függvény konvexitása adja a kívánt egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned}\frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= \frac{f((1 - \lambda)x + \lambda z) - f(x)}{(1 - \lambda)x + \lambda z - x} \leq \\ &\leq \frac{(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(z) - f(x)}{(1 - \lambda)x + \lambda z - x} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\end{aligned}$$

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} = \frac{f(z) - f((1 - \lambda)x + \lambda z)}{z - (1 - \lambda)x - \lambda z} \geq \frac{f(z) - (1 - \lambda)f(x) - \lambda f(z)}{z - (1 - \lambda)x - \lambda z}$$

□

Az alábbiakban kimondunk két definíciót, amire a későbbiekben szükségünk lesz.

4. Definíció. Az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény Lipschitz tulajdonságú vagy Lipschitz-folytonos a $J \subseteq I$ részintervallumon, ha létezik olyan $L > 0$ konstans, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

minden $x, y \in J$ -re.

5. Definíció. Az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos a $J \subseteq I$ részintervallumon, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges páronként nemátfedő δ -nál kisebb összhosszúságú $[a_i, b_i] \subset J$, $i = 1, \dots, n$ intervallumok esetén

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Azt könnyen beláthatjuk, hogy minden Lipschitz tulajdonságú vagy Lipschitz-folytonos függvény abszolút folytonos is, hiszen ha egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz a δ -t úgy választjuk meg, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, akkor automatikusan teljesül az abszolút folytonosság feltétele. Továbbá egy abszolút folytonos függvény nyilván folytonos is.

3.1. Tétel. Legyen az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex, és legyen J olyan kompakt részintervalluma I -nek, amely I belsejében van. Ekkor $f(x)$ Lipschitz tulajdonságú és abszolút folytonos J -n. Továbbá f folytonos az I intervallum belsejében.

Bizonyítás. A tétel előtti megjegyzések alapján a bizonyításhoz nyilván elegendő megmutatni, hogy az f függvény Lipschitz tulajdonságú a J -n. Vegyünk tetszőleges $u, v, w, z \in I$, $u < v$, $w < z$ számokat úgy, hogy u, v a J -től balra helyezkedik el, w, z pedig a J -től jobbra. Legyen $x, y \in J$, $x < y$. Alkalmazva az előző lemmát u, v, x -re és v, x, y -ra, kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Hasonlóképpen, alkalmazva a lemmát x, y, w -re és y, w, z -re kapjuk, hogy

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Ezek az egyenlőtlenségek együtt adják, hogy

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \max \left\{ \left| \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \right|, \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| \right\} = L.$$

□

4. Egyváltozós konvex függvények egyszeres differenciálhatósága

A Lebesgue-tétel kimondja, hogy egy intervallumon értelmezett abszolút folytonos valós függvény az intervallum majdnem minden pontjában differenciálható, lásd [2] 18. szakasz. Ezt kombinálva az előző tétellel kapjuk, hogy az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex valós függvény majdnem mindenhol differenciálható I -ben. Azonban az f függvény konvexitása egy ennél még erősebb dolgot eredményez: f differenciálható I -ben mindenhol legfeljebb megszámlálhatóan sok pont kivételével.

A fenti állítás bizonyításához szükséges a bal- és a jobboldali derivált fogalma, ezért ezeket pontosan definiáljuk.

6. Definíció. Legyen az $f(x)$ valós függvény értelmezve az I intervallumon és legyen $x_0 \in I$. Ekkor az $f(x)$ függvény x_0 -beli bal- illetve jobboldali $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ deriváltjait a következőképpen értelmezzük:

$$f'_-(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0},$$

ahol x_0 nem az I bal oldali végpontja.

$$f'_+(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0+0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0},$$

ahol x_0 nem az I jobb oldali végpontja.

4.1. Tétel. Legyen az $I \subset \mathbb{R}$ nyitott intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor az I minden pontjában léteznek a nem csökkenő (nem szűkségszerűen szigorúan) $f'_-(x)$ és $f'_+(x)$ féloldali deriváltak, és $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ minden $x \in I$. Az $f(x)$ függvény pontosan azokban az $x \in I$ pontokban differenciálható, ahol $f'_-(x)$ folytonos. Ezért $f'(x)$ létezik I -ben mindenhol legfeljebb megszámlálhatóan sok pont kivételével.

Bizonyítás. A bizonyítást a következő egyszerű ténnyel kezdjük.

Tekintsük az I nyílt intervallumon monoton növekvő folytonos $f_n(x)$ valós függvények monoton növekvő sorozatát, amely konvergál a $g(x)$ függvényhez az I intervallumon. Ekkor azt állítjuk, hogy $g(x)$ balról folytonos minden $x \in I$ -re. Az $f_n(x)$ függvények monotonitásából következik, hogy $g(x)$ is monoton növekvő. Legyen az $x_0 \in I$ és legyen $x_i \rightarrow x_0 - 0$ egy olyan sorozat, hogy $x_i \in I$ minden i -re és x_i balról tart x_0 -hoz. Mivel az f_n függvények folytonosak I -n, így minden n -re igaz, hogy $f_n(x_i) \rightarrow f_n(x_0)$, ha $i \rightarrow \infty$. Továbbá $f_n(x_0) \rightarrow g(x_0)$ ha $n \rightarrow \infty$. Az $f_n(x)$ függvények monoton növekvő tulajdonsága miatt és amiatt, hogy monoton növekvő módon konvergálnak $g(x)$ -hez az I intervallum minden pontjában következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy ha $m > N$, akkor $|f_m(x_m) - g(x_0)| < \varepsilon$. Ekkor tetszőleges $m > N$ esetén igaz, hogy

$$|g(x_m) - g(x_0)| \leq |f_m(x_m) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

A tétel igazolásához először megmutatjuk, hogy $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ létezik az I intervallumon és

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$$

minden $x, y \in I$, $x < y$ számra.

Legyen $x, y \in I$, $x < y$. A 3.1 lemmából következik, hogy

$$\frac{f(w) - f(x)}{w - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

minden $w, z \in I$, $w < x < z < y$ számra, és az első két kifejezés nem csökkenő w -ben illetve z -ben. Így ezek határértékei léteznek, ha $w \rightarrow x - 0$ és $z \rightarrow x + 0$, és így azt kapjuk, hogy $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ léteznek és

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Hasonló érveléssel megmutatható, hogy $f'_-(y)$, $f'_+(y)$ létezik I -n, és

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

Másodszor, megmutatjuk, hogy f'_- folytonos balról és f'_+ pedig jobbról.

Ehhez először definiáljuk a $g_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) függvénysorozatot a következőképpen.

$$g_n(x) = \frac{f(x - \frac{1}{n}) - f(x)}{-\frac{1}{n}}$$

minden olyan $x \in I$ -re, amelyre $x - \frac{1}{n} \in I$.

A $g_n(x)$ függvények folytonosak és nemcsökkenőek a 3.1 lemma miatt, és megintcsak a 3.1 lemmából következik, hogy a $g_n(x)$ függvények olyan nemcsökkenő sorozatot alkotnak, amely $f'_-(x)$ -hez konvergál minden $x \in I$ -re. Így a bizonyítás elején mondottakból következik, hogy $f'_-(x)$ balról folytonos. Az f'_+ jobboldali folytonossága hasonlóan mutatható meg.

Harmadszor, megmutatjuk, hogy $f'(x)$ létezik pontosan az olyan $x \in I$ pontokban, ahol f'_- folytonos.

Legyen $x \in I$ és tegyük fel, először, hogy f'_- folytonos x -ben. Ekkor következik, hogy

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y)$$

minden $y \in I$ -re, ahol $x < y$. Tartson az y az x -hez az I -ben jobbról. Az f'_- x -beli (baloldali) folytonosságából következik, hogy $f'_-(x) = f'_+(x)$ amely pedig $f'(x)$ létezését igazolja. Másrészt tegyük fel, hogy f'_- nem folytonos x -ben. Ekkor viszont

$$f'_-(x) < \lim_{y \rightarrow x+0} f'_-(y) \leq \lim_{y \rightarrow x+0} f'_+(y) = f'_+(x)$$

Ennélfogva $f'(x)$ nem létezik. Ezzel az f' -ről megmutattuk, hogy pontosan azokban az $x \in I$ pontokban létezik, ahol f'_- folytonos.

A tétel maga végül abból következik, hogy egy nem csökkenő függvénynek I -n legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadása lehet. $\square$

5. Egyváltozós konvex függvények kétszeres differenciálhatósága

Egy egyváltozós valós függvény majdnem mindenhol való kétszeres differenciálhatóságát egy I intervallumban a következőképpen definiáljuk: az $I \subseteq \mathbb{R}$

intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény majdnem mindenhol kétszer differenciálható I -n, ha létezik olyan $M, N \subset I$ 0-mértékű halmaz, hogy az

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

határérték minden $x \in I \setminus M$ -re létezik, és a

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in I \setminus M}} \frac{f'(y) - f'(x)}{y - x}$$

határérték is létezik minden $x \in I \setminus (M \cup N)$ -re.

Az utóbbi határérték definiálja $f(x)$ függvény második deriváltját $x \in I$ -ben, amelyet $f''(x)$ -szel jelölünk.

Az olvasó kényelme miatt definiáljuk az $o(\cdot)$ és $O(\cdot)$ Bachmann-Landau szimbólumokat:

Legyen $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x \in I$ egy tetszőleges pont. Ekkor azt mondjuk, hogy

$$g(y) = o(h(y)), \quad y \rightarrow x, y \in I,$$

ha $\frac{|g(y)|}{|h(y)|} \rightarrow 0$ tetszőleges $y \rightarrow x, y \in I, y \neq x$ esetén.

Továbbá azt mondjuk, hogy

$$g(y) = O(h(y)), \quad y \rightarrow x, y \in I,$$

ha $|g(y)| \leq K |h(y)|$, minden $y \in I$ -re, amely elegendően közel van x -hez. Itt K egy megfelelő konstans.

A fenti definíció a kétszeres differenciálhatóság szokásos definíciójánál kicsit gyengébb. Azonban jól megtestesíti az általános kétszeres differenciálhatóság alapgondolatát és megvan az az előnye, hogy konvex függvényekre igaz a következő tétel.

5.1. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyitott intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor f kétszeresen differenciálható majdnem mindenhol I -n. Azonkívül, majdnem minden $x \in I$ -re,*

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2 + o(|y - x|^2)$$

ahol $y \rightarrow x, y \in I$.

A tétel bizonyításától itt most eltekintünk.

6. Többváltozós konvex függvények folytonossága

Először megadjuk a konvexitás definícióját $\mathbb{R}^d$ -beli halmazokra.

7. Definíció. A $C \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazt konvernek nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in C$ pontok esetén az őket összekötő $[x, y]$ szakasz is benne van C -ben. Másképpen fogalmazva, C konvex, ha

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$$

minden $x, y \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

A fenti definíció segítségével most már definiálhatjuk, hogy egy többváltozós függvényt mikor nevezünk konvexnek.

8. Definíció. Az $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt konvernek nevezzük, ha a C halmaz konvex és

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

minden $x, y \in C$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Tekintsünk egy $C \subset \mathbb{R}^n$ -en értelmezett $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt. Az f függvényt Lipschitz tulajdonságúnak nevezzük a $D \subset C$ részhalmazon, ha létezik egy olyan $L > 0$ konstans, egy Lipschitz konstans, úgy, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|$$

tetszőleges $x, y \in D$, ahol $\|\cdot\|$ jelöli a szokásos euklideszi normát $\mathbb{R}^n$ -n. Továbbá az f függvényt lokálisan Lipschitznek nevezzük az $x \in C$ pontban, ha x -nek létezik olyan N környezete, hogy f Lipschitz tulajdonságú $C \cap N$ -en. A megfelelő Lipschitz konstans az x -től és az N -től függ.

6.1. Tétel. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^d$ és $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor az f függvény Lipschitz tulajdonságú a C belsejének minden kompakt részhalmazán. Tehát speciálisan az f függvény folytonos a C belsejében.

Bizonyítás. Jelölje $\text{int } C$ a C halmaz belső pontjainak halmazát.

Mivel definíció szerint egy kompakt halmaz tetszőleges nyílt halmazokkal való fedéséből mindig kiválasztható véges fedés, így elegendő a következőket megmutatni:

- (1) Legyen $x \in \text{int } C$. Ekkor f lokálisan Lipschitz x -ben.

Ha az (1) állítás igaz, akkor tetszőleges $D \subset \text{int } C$ kompakt halmaz esetén minden $x \in D$ pontnak van olyan nyílt gömbkörnyezete, amelyben az f Lipschitz és ezen gömbkörnyezetek uniója lefedi D -t. Ekkor D kompakt-sága miatt a fenti gömbkörnyezetekből kiválasztható véges sok, ami még mindig lefedi D -t. Ebből könnyen következik, hogy az f függvény Lipschitz tulajdonságú D -n.

Először, megmutatjuk, hogy

(2) *létezik olyan $\alpha, \varepsilon > 0$, hogy $N(2\varepsilon) \subset \text{int } C$ és α az f felső korlátja $N(2\varepsilon)$ -n.*

A (2) állítás bizonyításához elegendő megmutatni, hogy az f felülről korlátos egy olyan C -beli szimplexén, ami belsejében tartalmazza $N(2\varepsilon)$ -t. Legyen S olyan szimplex a C -ben, amelynek csúcsai $x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$, és amelyre $x \in \text{int } S$. Ha $y \in S$, akkor $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{d+1} x_{d+1}$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} = 1$. Ekkor a Jensen-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{d+1} x_{d+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{d+1} f(x_{d+1}) \\ &\leq |f(x_1)| + \dots + |f(x_{d+1})| = \alpha. \end{aligned}$$

Másodszor, megmutatjuk, hogy

(3) *létezik olyan $\gamma > 0$, hogy γ az $|f|$ egy felső korlátja $N(2\varepsilon)$ -ban.*

Legyen $y \in N(2\varepsilon)$. Ekkor

$$2x - y = x - (y - x) \in N(2\varepsilon) \subset C$$

és így teljesül, hogy

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x - y)\right) \leq \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(2x - y)$$

az f konvexitása miatt. Ez a (2) állítással együtt adja, hogy

$$\alpha \geq f(y) \geq 2f(x) - f(2x - y) \geq 2f(x) - \alpha.$$

Ennélfogva

$$|f(y)| \leq \max\{\alpha, |2f(x) - \alpha|\} = \gamma$$

Harmadszor, megmutatjuk, hogy

(4) *f Lipschitz tulajdonságú az $L = \frac{2\gamma}{\varepsilon}$ Lipschitz konstanssal az $N(\varepsilon)$ -n.*

Legyen $y, z \in N(\varepsilon)$, $y \neq z$ tetszőleges. Válasszunk olyan $w \in N(2\varepsilon)$ -t, amelyre igaz, hogy $z \in [y, w]$ és $\|w - z\| = \varepsilon$. Mivel az f megszorítása az $[y, w]$ szakaszra konvex, az 3.1-es lemmából és a (3) állításból következik:

$$\frac{f(z) - f(y)}{\|z - y\|} \leq \frac{f(w) - f(z)}{\|w - z\|} \leq \frac{2\gamma}{\varepsilon},$$

azaz

$$f(z) - f(y) \leq \frac{2\gamma}{\varepsilon} \|z - y\|.$$

Nyilván ugyanez igaz, ha y -t és z -t felcseréljük. Így tehát

$$|f(z) - f(y)| \leq L \|z - y\|,$$

ahol $L = \frac{2\gamma}{\varepsilon}$. Ezzel befejeztük (4) bizonyítását, és így az (1) állításét is, amiből pedig a tételt már következik. $\square$

Hivatkozások

- [1] Gruber, Peter M., Convex and discrete geometry. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 336. Springer, Berlin, 2007.
- [2] Hewitt, Edwin; Stromberg, Karl, Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [3] Leindler László, Analízis, Polygon, Szeged, 2001.
- [4] Szőkefalvi-Nagy Béla, Valós függvények és függvénysorok, Polygon, Szeged, 2002.

Nyilatkozat

Alulírott Farkas Éva kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Farkas Éva