

Különböző politóposztályok f -vektorainak kombinatorikus tulajdonságai

Major László

Tampere University of Technology, Finland

laszlo.major@tut.fi

November 22, 2012

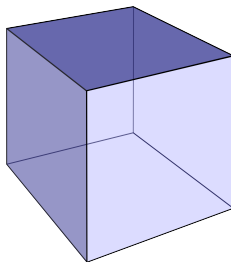
A politóp f -vektora $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_d)$ felsorolja a különböző dimenziójú lapjainak a számát.

A politóp f -vektora $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_d)$ felsorolja a különböző dimenziójú lapjainak a számát.

Például a kocka

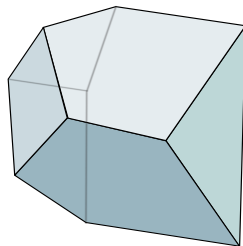
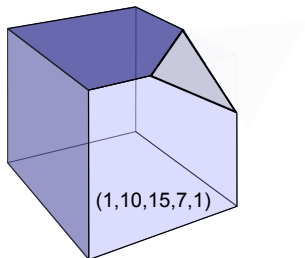
f -vektora

$(1, 8, 12, 6, 1)$



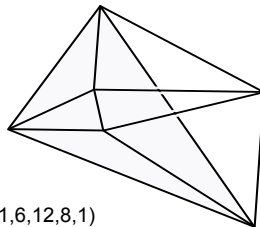
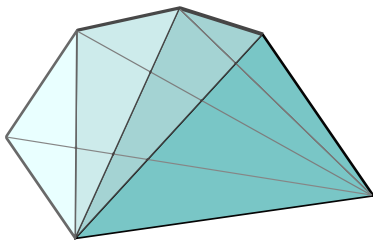
Tartalmazást megőrző bijekció a lapok halmazai közt.

Tartalmazást megőrző bijekció a lapok halmazai közt.



Nem ekvivalens politópoknak lehet azonos az f -vektora:

Nem ekvivalens politópoknak lehet azonos az f -vektora:



(1,6,12,8,1)

3 dimenzióban:

Ernst Steinitz: Über die Eulerschen Polyederrelationen. Archiv für Mathematik und Physik 11 (1906), 86–88.

Az f -vektorok karakterizációja

3 dimenzióban:

Ernst Steinitz: Über die Eulerschen Polyederrelationen. Archiv für Mathematik und Physik 11 (1906), 86–88.

Már 4 dimenzióban sem teljes a karakterizáció:

Branko Grünbaum: Convex polytopes. Vol. 221 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003. (Original ed.: Interscience, 1967.)

Az f -vektorok karakterizációja

3 dimenzióban:

Ernst Steinitz: Über die Eulerschen Polyederrelationen. Archiv für Mathematik und Physik 11 (1906), 86–88.

Már 4 dimenzióban sem teljes a karakterizáció:

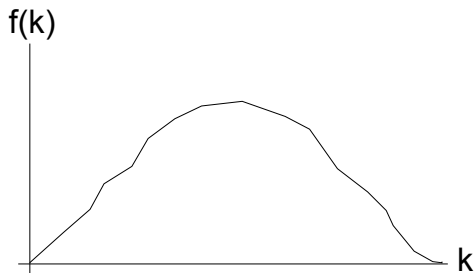
Branko Grünbaum: Convex polytopes. Vol. 221 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003. (Original ed.: Interscience, 1967.)

Magasabb dimezióban szimpliciális politópokra tisztázott a kérdés a nevezetes g -tétel által:

L.J. Billera, C.W. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial convex polytopes, J. Combin. Theory Ser. A 31 (3) (1981) 237–255.

R.P. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. Math. 35 (3) (1980) 236–238.

Az f -vektorok alakja



Mi az a legnagyobb $n(d)$ egész, amire bármely d -politóp esetén

$$f_0 < f_1 < \cdots < f_{n(d)}$$

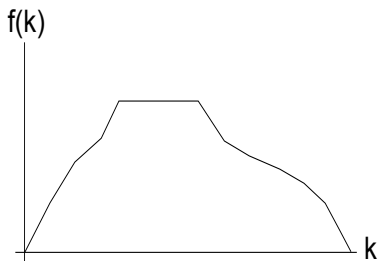
Mi az a legnagyobb $n(d)$ egész, amire bármely d -politóp esetén

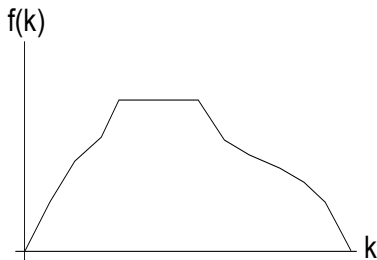
$$f_0 < f_1 < \cdots < f_{n(d)}$$

Björner sejtése: $n(d) = \lfloor \frac{d+2}{4} \rfloor$.

Szimplexiális politópokra érvényes, hogy $n(d) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.

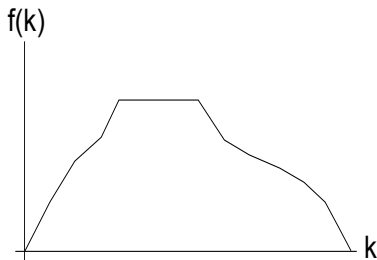
A. Björner, Partial unimodality for f -vectors of simplicial polytopes and spheres, in Jerusalem Combinatorics 93, 1994, 45–54.





Mi a fennsíkok maximális hossza $h(d)$

$$f_k = f_{k+1} = \cdots = f_{k+h(d)-1}$$



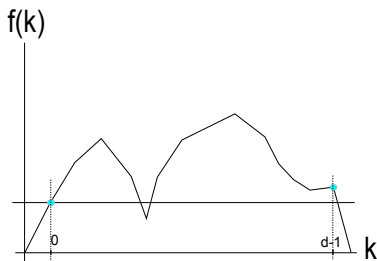
Mi a fennsíkok maximális hossza $h(d)$

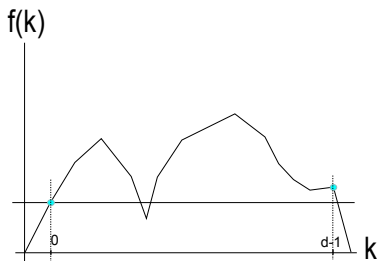
$$f_k = f_{k+1} = \cdots = f_{k+h(d)-1}$$

Eckhoff sejtése: bármilyen hosszú fennsík is lehetséges, ha a dimenzió nagy.

$$f = (6370, 25679, 41924, 41924, 41924, 41924, 25679, 6370)$$

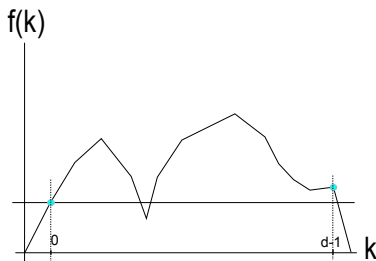
J. Eckhoff: Combinatorial properties of f-vectors of convex polytopes, Normat 54, no. 4 (2006), 146-159.





Létezik-e olyan $b(d)$ valós konstans, hogy bármely k -ra

$$f_k \geq b(d) \min(f_0, f_{d-1})$$



Létezik-e olyan $b(d)$ valós konstans, hogy bármely k -ra

$$f_k \geq b(d) \min(f_0, f_{d-1})$$

Bárány sejtése: $b(d) = 1$ esetén általában érvényes a fenti összefüggés.

(1, 10, 45, 120, 205, 222, 140, 40, 1)

$$f_{-1} \leq f_0 \leq \dots \leq f_k \geq \dots \geq f_{d-1} \geq f_d.$$

(1, 10, 45, 120, 205, 222, 140, 40, 1)

$$f_{-1} \leq f_0 \leq \dots \leq f_k \geq \dots \geq f_{d-1} \geq f_d.$$

Motzkin valamikor az ötvenes években;

(1, 10, 45, 120, 205, 222, 140, 40, 1)

$$f_{-1} \leq f_0 \leq \dots \leq f_k \geq \dots \geq f_{d-1} \geq f_d.$$

Motzkin valamikor az ötvenes években;
Welsh, 1972;

(1, 10, 45, 120, 205, 222, 140, 40, 1)

$$f_{-1} \leq f_0 \leq \dots \leq f_k \geq \dots \geq f_{d-1} \geq f_d.$$

Motzkin valamikor az ötvenes években;

Welsh, 1972;

Björner valamikor sejtette;

(1, 10, 45, 120, 205, 222, 140, 40, 1)

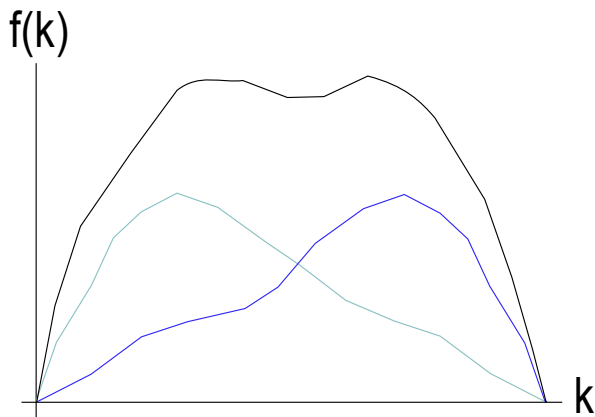
$$f_{-1} \leq f_0 \leq \dots \leq f_k \geq \dots \geq f_{d-1} \geq f_d.$$

Motzkin valamikor az ötvenes években;

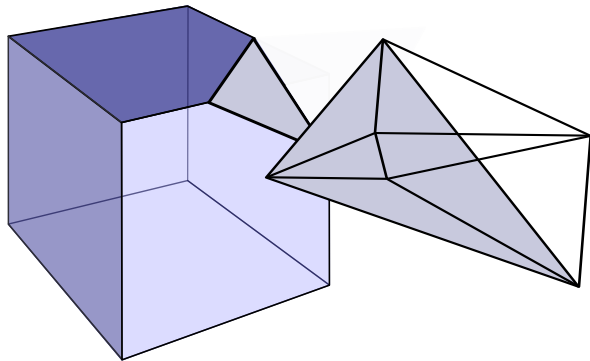
Welsh, 1972;

Björner valamikor sejtette;

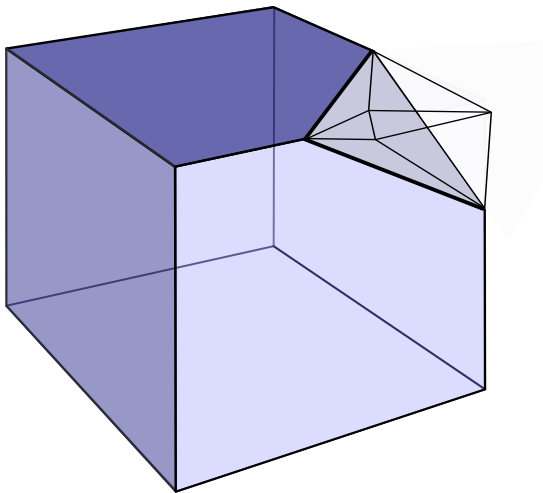
Danzer cáfolta, 1964, Graz;



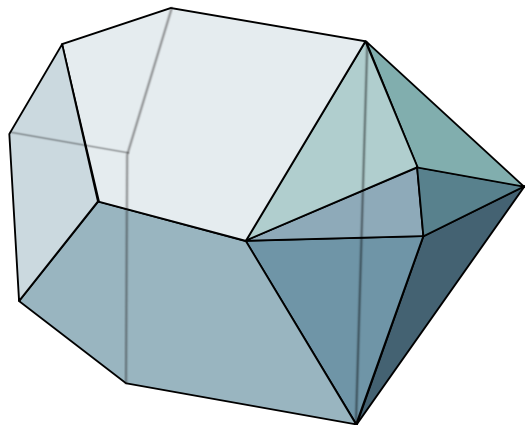
Egyszerű és szimpliciális politópok ragasztása



Egyszerű és szimpliciális politópok ragasztása



Egyszerű és szimpliciális politópok ragasztása



Ludwig Schläfli

tetszőleges politópra

a páros és a páratlan dimenziójú lapok száma megegyezik

11 dimenzióban:

$$(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11})$$

tetszőleges politópra

a páros és a páratlan dimenziójú lapok száma egyenlő

11 dimenzióban:

$$(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11})$$

tetszőleges politópra

a páros és a páratlan dimenziójú lapok száma egyenlő

11 dimenzióban:

$$(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11})$$

A két összeg megegyezik:

$$f_{-1} + f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11} = f_0 + f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10}$$

tetszőleges politópra

a páros és a páratlan dimenziójú lapok száma egyenlő

11 dimenzióban:

$$(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11})$$

A két összeg megegyezik:

$$f_{-1} + f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11} = f_0 + f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10}$$

általánosan:

$$\sum_{i \text{ páratlan}} f_i = \sum_{i \text{ páros}} f_i = \frac{1}{2} \sum_i f_i$$

Legyen $m > 2$. Például $m = 3$ esetén tekintsük a 11 dimenziós f -vektort:

$$(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11})$$

Az Euler-formula aszimptotikus analógja

Legyen $m > 2$. Például $m = 3$ esetén tekintsük a 11 dimenziós f -vektort:

$$\begin{array}{cccc} f_0, & f_3, & f_6, & f_9, \\ (f_{-1}, & f_1, f_2, & f_4, f_5, & f_7, f_8, & f_{10}, f_{11}) \end{array}$$

Az Euler-formula aszimptotikus analógja

Legyen $m > 2$. Például $m = 3$ esetén tekintsük a 11 dimenziós f -vektort:

$$\begin{array}{cccc} f_0, & f_3, & f_6, & f_9, \\ (f_{-1}, & f_1, f_2, & f_4, f_5, & f_7, f_8, & f_{10}, f_{11}) \end{array}$$

Mi állítható a következő összegről:

$$f_0 + f_3 + f_6 + f_9 = ?$$

Az Euler-formula aszimptotikus analógja

Legyen $m > 2$. Például $m = 3$ esetén tekintsük a 11 dimenziós f -vektort:

$$\begin{array}{cccc} f_0, & f_3, & f_6, & f_9, \\ (f_{-1}, & f_1, f_2, & f_4, f_5, & f_7, f_8, & f_{10}, f_{11}) \end{array}$$

Mi állítható a következő összegről:

$$f_0 + f_3 + f_6 + f_9 = ?$$

Gyanítható, hogy

$$f_0 + f_3 + f_6 + f_9 \sim \frac{1}{3} \sum_i f_i.$$

Az Euler-formula aszimptotikus analógja

Legyen $m > 2$. Például $m = 3$ esetén tekintsük a 11 dimenziós f -vektort:

$$\begin{array}{cccc} f_0, & f_3, & f_6, & f_9, \\ (f_{-1}, & f_1, f_2, & f_4, f_5, & f_7, f_8, & f_{10}, f_{11}) \end{array}$$

Mi állítható a következő összegről:

$$f_0 + f_3 + f_6 + f_9 = ?$$

Gyanítható, hogy

$$f_0 + f_3 + f_6 + f_9 \sim \frac{1}{3} \sum_i f_i.$$

Tetszőleges P politóra

$$\sum_{i \equiv r \pmod{2}} f_i(P) - \frac{1}{2} \sum_i f_i(P) = 0, \text{ for } 1 \leq r \leq 2$$

Tetszőleges P politóra

$$\sum_{i \equiv r \pmod{2}} f_i(P) - \frac{1}{2} \sum_i f_i(P) = 0, \text{ for } 1 \leq r \leq 2$$

Aszimptotikus megfelelője a fentiek:

$$\sum_{i \equiv r \pmod{m}} f_i(P) - \frac{1}{m} \sum_i f_i(P) \sim 0, \text{ for } 1 \leq r \leq m$$

Tetszőleges P politóra

$$\sum_{i \equiv r \pmod 2} f_i(P) - \frac{1}{2} \sum_i f_i(P) = 0, \text{ for } 1 \leq r \leq 2$$

Aszimptotikus megfelelője a fentiek:

$$\sum_{i \equiv r \pmod m} f_i(P) - \frac{1}{m} \sum_i f_i(P) \sim 0, \text{ for } 1 \leq r \leq m$$

Azt sejtjük, hogy általában igaz az, hogy akármilyen P politóp esetén

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K : d > K \longrightarrow \left| \sum_{i \equiv r \pmod m} f_i(P) - \frac{1}{m} \sum_i f_i(P) \right| < \varepsilon$$

Moduláris f -vektor

m -moduláris f -vektor : $f^m(P) = (f_{-1}^m, f_0^m, \dots, f_{m-2}^m)$, ahol

$$f_r^m(P) = \sum_{i \equiv r \pmod{m}} f_i(P)$$

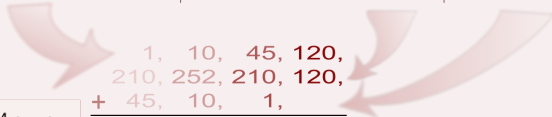
Moduláris f -vektor

m -moduláris f -vektor : $f^m(P) = (f_{-1}^m, f_0^m, \dots, f_{m-2}^m)$, ahol

$$f_r^m(P) = \sum_{i \equiv r \pmod m} f_i(P)$$

Például a 9 dimenziós szimplex 4-moduláris f -vektora:

$$f(S_9) = (1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1)$$


$$f^4(S_9) = \begin{array}{r} 1, 10, 45, 120, \\ 210, 252, 210, 120, \\ + 45, 10, 1, \\ \hline (256, 272, 256, 240) \end{array}$$

Moduláris f -vektor

m -moduláris f -vektor : $f^m(P) = (f_{-1}^m, f_0^m, \dots, f_{m-2}^m)$, ahol

$$f_r^m(P) = \sum_{i \equiv r \pmod m} f_i(P)$$

Például a 9 dimenziós szimplex 4-moduláris f -vektora:

$$\begin{aligned} f(S_9) &= (1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1) \\ f^4(S_9) &= \begin{array}{r} 1, 10, 45, 120, \\ 210, 252, 210, 120, \\ + 45, 10, 1, \\ \hline (256, 272, 256, 240) \end{array} \end{aligned}$$

Az Euler-formula megadható a 2-moduláris f -vektorral

$$f_{-1}^2(P) = f_0^2(P).$$

$$A = I_m + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = I_m + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Perron–Frobenius-tétel,

L. Major: On the distribution of coefficients of powers of positive polynomials, Aust. J. Comb, Volume 49 (2011), Pages 239-243.

$$A = I_m + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Perron–Frobenius-tétel,

L. Major: On the distribution of coefficients of powers of positive polynomials, Aust. J. Comb, Volume 49 (2011), Pages 239-243. Például

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A^{10} = \begin{bmatrix} 256 & 272 & 256 & 240 \\ 240 & 256 & 272 & 256 \\ 256 & 240 & 256 & 272 \\ 272 & 256 & 240 & 256 \end{bmatrix}$$

A g -tétel feltétele: $f = gM_d$

A g -tétel feltétele: $f = gM_d$

Moduláris M -mátrix

Tetszőleges m és d egészekre konstruáljuk az m -modular M_d mátrixot, amelynek sorai az M_d megfelelő sorainak az m -moduláris vektorai.

A g -tétel feltétele: $f = gM_d$

Moduláris M -mátrix

Tetszőleges m és d egészekre konstruáljuk az m -modular M_d mátrixot, amelynek sorai az M_d megfelelő sorainak az m -moduláris vektorai.

M_4 és 3-moduláris M_4

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4^3 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 10 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f -vektor és h -vektor

A $C_d(n)$ ciklikus politóp egy szimpliciális szomszédsági politóp, ezért

$C_d(n)$ f -vektorának első fele

$$f_k(C_d(n)) = \binom{n}{k+1}, \text{ for } -1 \leq k < \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

f -vektor és h -vektor

A $C_d(n)$ ciklikus politóp egy szimpliciális szomszédsági politóp, ezért

$C_d(n)$ f -vektorának első fele

$$f_k(C_d(n)) = \binom{n}{k+1}, \text{ for } -1 \leq k < \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

Definíció szerint egy szimpliciális politóp h -vektora:

$$h_k := \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1}, \text{ for } 0 \leq k \leq d.$$

f -vektor és h -vektor

A $C_d(n)$ ciklikus politóp egy szimpliciális szomszédsági politóp, ezért

$C_d(n)$ f -vektorának első fele

$$f_k(C_d(n)) = \binom{n}{k+1}, \text{ for } -1 \leq k < \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

Definíció szerint egy szimpliciális politóp h -vektora:

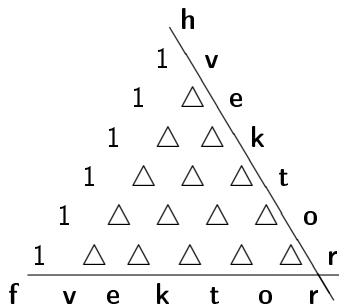
$$h_k := \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{d-k} f_{i-1}, \text{ for } 0 \leq k \leq d.$$

Ezt könnyű átfordítani a következő formára:

Az f -vektor komponensei:

$$f_k = \sum_{i=0}^d \binom{d-i}{d-k-1} h_i, \text{ for } -1 \leq k \leq d-1.$$

Pascal típusú háromszög a fenti összefüggés kifejezésére



R. Stanley: The number of faces of simplicial polytopes and spheres, Discrete Geometry and Convexity, 1985, 212-223.

C. W. Lee: Some recent results on convex polytopes, Contemporary Mathematics 114 (1990), 3-19.

A h -vektor szimmetrikus. Ismerve az f -vektor első felét, a második felét kiszámíthatjuk

ígyen:

f első fele $\rightarrow h$ első fele (Stanley módszere)

h első fele $\rightarrow$ a teljes h -vektor (Dehn-Sommerville-egyenletek)

a teljes h -vektor $\rightarrow$ a teljes f -vektor (Stanley-Lee-módszer)

A h -vektor szimmetrikus. Ismerve az f -vektor első felét, a második felét kiszámíthatjuk

ígyen:

f első fele $\rightarrow h$ első fele (Stanley módszere)

h első fele $\rightarrow$ a teljes h -vektor (Dehn-Sommerville-egyenletek)

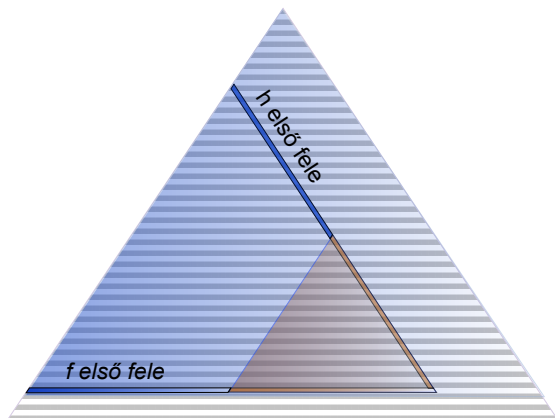
a teljes h -vektor $\rightarrow$ a teljes f -vektor (Stanley-Lee-módszer)

Ezek szerint

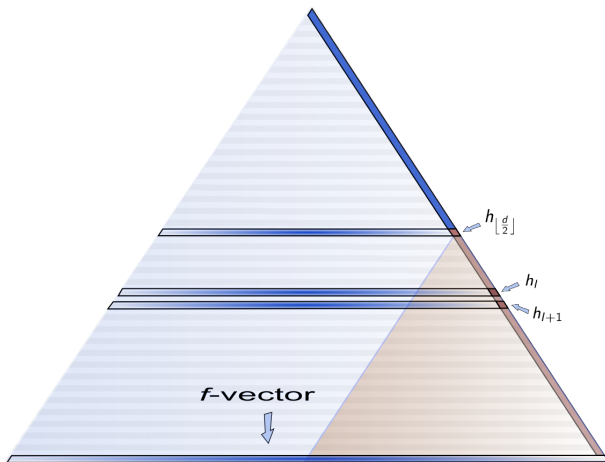
$C_d(n)$ h -vektorának első fele

$$h_k(C_d(n)) = \binom{n-d-1+k}{k}, \text{ for } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

Az f -vektor beágyazása a Pascal háromszögbe



Indukció az átalakított Pascal háromszög sorai szerint



A $C_7(10)$ politóp esete

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 3 \\
 & & & & 1 & 4 & 6 \\
 & & & 1 & 5 & 10 & 10 \\
 & & 1 & 6 & 15 & 20 & 10 \\
 & 1 & 7 & 21 & 35 & 30 & 6 \\
 & 1 & 8 & 28 & 56 & 65 & 36 & 3 \\
 & 1 & 9 & 36 & 84 & 121 & 101 & 39 & 1 \\
 \end{array}$$

$$f(C_7(10)) = (1, 10, 45, 120, 205, 222, 140, 40, 1)$$

páratlan dimenziós példa

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 3 & \\ & & & 1 & 4 & 6 & \\ & & 1 & 5 & 10 & 10 & \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 6 & \\ & 1 & 7 & 21 & 35 & 26 & 3 \\ & 1 & 8 & 28 & 56 & 61 & 29 & 1 \end{array}$$
$$f(C_6(9)) = (1, 9, 36, 84, 117, 90, 30, 1)$$

VÉGE