

Szegedi Tudományegyetem  
Természettudományi és Informatikai Kar  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

**Multikromatikus számokra vonatkozó  
topologikus alsókoriát tételek**

Ph.D. értekezés tézisei

**Osztényi József**

Témavezető:  
**Dr. Kincses János**  
Bolyai Intézet

Szeged  
2010.

## Bevezetés

Kutatásaim a kombinatorikus topológia témakörén belül a gráfok multikromatikus számaira vonatkozó topologikus alsókorlát tételek vizsgálata köré összpontosulnak. Ezen terület kezdőpontja Lovász Lászlónak a Kneser sejtésre adott 1978-as bizonyítása [22], mely cikkben egy tetszőleges  $G$  gráf kromatikus számára a  $G$  gráf szomszédsági komplexusának topologikus összefüggőségi számával ad alsó korlátot. A Lovász által kidolgozott topologikus módszerrel további alsókorlát tételek születtek: J.W. Walker elegáns funktoriális bizonyítást tartalmazó [35] cikkében a Lovász komplexus  $\mathbb{Z}_2$ -indexével korlátozza alulról a kromatikus számot. J. Matoušek és G.M. Ziegler a Lovász komplexussal homotóp ekvivalens Box komplexus  $\mathbb{Z}_2$ -indexét használták [24]-ben. Napjainkban az ugyancsak Lovász László által definiált gráfhomomorfizmus komplexussal dolgoznak E. Babson és D.N. Kozlov [2], [3].

A gráfok  $s$ -szeres színezését ugyancsak az 1970-es években vezették be számos gyakorlati probléma által vezérelve [18], [27]. Ezzel kapcsolatos első eredményeket Saul Stahl 1978-as [32] cikke tartalmazza. Stahl a Kneser sejtés által motiválva, valamint a Kneser gráfoknak a  $s$ -szeres színezésekben betöltött központi szerepete kapcsán megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, a Kneser gráfok multikromatikus számaira vonatkozó sejtését. Ezt ma Stahl sejtésnek nevezzük. A Kneser gráfok multikromatikus számainak viselkedésének számos tulajdonságát fogalmazta meg, több esetben kiszámolta ezeket [32] és [33] cikkeiben.

Eddigi kutatásaim során a Stahl sejtés által motiválva a fent említett, gráfok kromatikus számára vonatkozó topologikus alsókorlát tételek multikromatikus számokra való átvitelét vizsgáltuk. Valamint ezen tételeket alkalmazva alsó korlátot adtunk a Kneser gráfok kromatikus számaira.

A tételek számozása a disszertációban és a tézisfüzetben a könnyebb hivatkozhatóság végett megegyezik.

## 1. Kombinatorikus topológiai módszerek

A disszertációban alkalmazott módszerek a kombinatorikus topológia témaköréhez tartoznak. A dolgozatban számos komplexus homotópia típusát, illetve topologikus invariánsát határoztuk meg. Adott  $\mathcal{K}$  szimpliális komplexusok homotópia

típusának meghatározására a szimpliciális átfejthetőségére vonatkozó parciális párosítási technikát [20], illetve a R. Forman [14] által kidolgozott diszkrét Morse elméletet használtuk. Ugyancsak többször alkalmaztuk adott  $\mathcal{K}$  szimpliciális komplexusok topologikus összefüggőségi számának kiszámolására az Ideg tétel [6].

## 2. Topologikus alsókorlát tételek a kromatikus számra

Lovász László a Kneser sejtés [19] bizonyításához egy általános, topologikus gráf-színezhetőségi tételt igazolt [22]-ben. A Lovász tételt számos gráfszínezhetőségre vonatkozó topologikus akadály tétel követte, melyek mindegyikében az alábbi eljárást alkalmazták.

$$\begin{array}{ccc} G \text{ gráf} & \longrightarrow & \mathcal{K}(G) \text{ gráfkomplexus} \\ & & \downarrow \\ \text{alsó korlát } \chi(G)\text{-re} & \longleftarrow & \mathcal{K}(G) \text{ topologikus tulajdonsága} \end{array}$$

Lovász egy tetszőleges  $G$  gráfhoz definiálta az  $\mathcal{NK}(G)$  szomszédsági komplexust. Az  $\mathcal{NK}(G)$  csúcshalmaza legyen  $G$  csúcshalmaza, és a csúcsok egy  $A$  részhalmaza szimplex, ha van közös szomszédjuk  $G$ -ben. Ezen komplexust vizsgálva az alábbi topologikus gráfszínezhetőségi tételt bizonyította Lovász [22]-ben.

**15. Tétel.** (Lovász [22]) *Ha a  $G$  gráf szomszédsági komplexusa  $(t - 1)$ -összefüggő, akkor a  $G$  gráf nem színezhető  $t + 1$  színnel.*

Az, úgyszintén Lovász által [22]-ben definiált,  $cn_G : 2^{V(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$  szomszédsági leképezés a csúcsok egy  $A$  halmazhoz a közös szomszédjaik halmazát rendeli, azaz a

$$cn_G(A) := \{v \in V(G) : (v, a) \in E(G) \text{ minden } a \in A\text{-ra}\}.$$

halmazt. Walker az  $\mathcal{NK}(G)$  szomszédsági komplexus baricentrikus felosztásának  $cn_G \circ cn_G$  leképezés fixpontjai által indukált részkomplexusaként definiálta a  $G$  gráf  $\mathcal{LK}(G)$  Lovász komplexusát. Az  $\mathcal{LK}(G)$  és  $\mathcal{NK}(G)$  komplexusok homotóp ekvivalensek, ám míg  $\mathcal{NK}(G)$  általában nem  $\mathbb{Z}_2$ -komplexus, addig  $\mathcal{LK}(G)$  egy szimpliciális  $\mathbb{Z}_2$ -komplexus. Ugyanis  $\mathcal{LK}(G)$ -n  $cn_G$  indukál egy szimpliciális  $\mathbb{Z}_2$ -hatást (idempotens, fixpontmentes szimpliciális leképezés). Walker a következő alsó korlátot adta a  $G$  kromatikus számára az  $\mathcal{LK}(G)$  komplexus topologikus  $\mathbb{Z}_2$ -invariánsával, az  $ind(\mathcal{LK}(G))$   $\mathbb{Z}_2$ -indexével.

**21. Tétel.** (Walker [35]) *Tetszőleges  $G$  gráfra*

$$\chi(G) \geq ind(\mathcal{LK}(G)) + 2.$$

A  $\mathcal{H}om(H, G)$  gráfhomomorfizmus komplexus konstrukciója ugyancsak Lovász Lászlóhoz fűződik. Tetszőleges  $G$  és  $H$  gráfokra vegyük az összes olyan  $\eta : V(H) \rightarrow 2^{V(G)} \setminus \{\emptyset\}$  leképezés posetjét, melyre  $\eta(u)$  minden csúcsa  $\eta(v)$  minden csúcsával össze van kötve, minden  $uv \in E(H)$  élre. A  $\mathcal{H}om(H, G)$  gráfhomomorfizmus komplexust ezen poset rendezési komplexusaként definiáljuk. A  $\mathcal{H}om(K_n, G)$  gráfhomomorfizmus komplexus ugyancsak szimpliciális  $\mathbb{Z}_2$ -komplexussá tehető.

Babson és Kozlov [2]-ben a  $G$  gráf kromatikus számára vonatkozó topologikus alsókorlát tételt fogalmazott meg a  $\mathcal{H}om(K_n, G)$  komplexus topologikus invariánsával, a  $\varpi(\mathcal{H}om(K_n, G))$  Stiefel-Whitney osztállyal. Ennek a  $\mathbb{Z}_2$ -indexxel megfogalmazott változata:

**23. Tétel.** (Babson és Kozlov [2]) *Tetszőleges  $n \geq 2$  egész és  $G$  gráf esetén*

$$\chi(G) \geq \text{ind}(\mathcal{H}om(K_n, G)) + n.$$

### 3. Gráfok $s$ -szeres színezése

Tetszőleges  $s$  pozitív egész esetén, egy  $G$  gráf  $s$ -szeres színezése során a gráf minden csúcsához  $s$  darab színt rendelünk úgy, hogy szomszédos csúcsokhoz diszjunkt szín  $s$ -es tartozik. Világos, hogy a  $G$  gráf  $s$ -szeres színezése a hagyományos színezés általánosítása, amikor minden csúcshoz egy színt rendelünk. Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf  $s$ -szeres színezése során összesen  $t$  színt használtunk fel. Ekkor a  $G$  gráf  $s$ -szeres színezésére a Stahl [32] cikkében található, különböző nézőpontokból tekinthetünk. Először a gráfhomomorfizmus fogalmát használva:

*Egy  $G$  gráf  $s$ -szeres színezése  $t$  színnel egy  $\gamma : G \rightarrow KG_{t,s}$  gráfhomomorfizmus.*

Az  $s$ -szeres színezés egy, a hagyományos színezésen keresztül való értelmezését is adhatjuk a  $G[K_s]$  gráf segítségével, a  $G$  gráf  $K_s$  teljes gráffal vett lexikografikus szorzatát használva.

*Egy  $G$  gráf  $s$ -szeres színezése  $t$  színnel pontosan a  $G[K_s]$  gráf hagyományos színezése  $t$  színnel.*

Legyen  $\chi_s(G)$  az a legkisebb  $t$  szám, melyre létezik  $G$ -nek  $s$ -szeres színezése  $t$  színnel. A  $\chi_s(G)$  számot a  $G$  gráf  $s$ -edik multikromatikus számának nevezzük,  $s = 1, 2, \dots$ . Megjegyezzük, hogy ez a definíció a gráf hagyományos kromatikus

számának egy általánosítása, ugyanis a  $G$  gráf hagyományos kromatikus száma éppen a  $\chi_1(G)$ . A  $G[K_s]$  lexikografikus szorzat kromatikus száma megegyezik a  $G$  gráf  $s$ -dik multikromatikus számával.

A  $KG_{t,s}$  Kneser gráfok előbb látott központi szerepe kapcsán Stahl vizsgálta a multikromatikus számaikat, melyeket több esetben kiszámolt. Ezek alapján megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, amely megadná az összes multikromatikus számot.

**30. Sejtés.** (Stahl [32]) *Tetszőleges  $n$  és  $m \geq 2n$  esetén legyen  $s = qn - r$ , ahol  $0 < q$  és  $0 \leq r < n$  egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) = qm - 2r.$$

Az  $s = 1$  eset éppen a Kneser sejtés, amit Lovász igazolt [22]-ben. Stahl következő 1998-as [33] cikkében az Erdős-Chao Ko-Rado és a Hilton-Milner tételeket használva alsókorlátot adott  $KG_{m,n}$ -beli  $s$ -szeresen fedő független csúcshalmazok számára, s ezzel a  $KG_{m,2}$  és  $KG_{m,3}$  Kneser gráfokra igazolta a sejtés. Továbbá az alábbi alsó korlátot adta.

**31. Tétel.** (Stahl [33]) *Tetszőleges  $n$  és  $m \geq 2n$  esetén legyen  $s = qn - r$ , ahol  $0 < q$  és  $0 \leq r < n$  egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq qm - 2r - (n^2 - 3n + 4).$$

A sejtést igazolná a  $\chi_{qn}(KG_{m,n})$  és  $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$  multikromatikus számok közti  $m - 2n + 2$ -es ugrás bizonyítása, ugyanis Stahl megmutatta, hogy  $\chi_{s+1} \geq \chi_s + 2$  minden  $s$  pozitív egészre. Az előbbi tételben szereplő alsó korlát  $s = qn + 1$  esetén,

$$\chi_{qn+1}(KG_{m,n}) \geq \chi_{qn}(KG_{m,n}) + m - 2n - (n^2 - 3n + 4),$$

éppen azt mutatja, hogy a  $\chi_{qn}(KG_{m,n})$  és  $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$  multikromatikus számok között rögzített  $n$  esetén akármilyen nagy ugrás lehet.

## 4. Topologikus alsókoriát tételek a multikromatikus számokra

A Stahl sejtés által motiválva a korábban ismert topologikus alsókoriát tételek multikromatikus számokra vonatkozó általánosításai lehetőségeit vizsgáltam.

### A Walker-féle tétel általánosítása

A hagyományos kromatikus számra vonatkozó Walker-féle topologikus alsókoriát tételnek a multikromatikus számra vonatkozó általánosítását egyszerűen levezethetjük az  $\mathcal{L}(KG_{t,s})$  Lovász komplexus ismert homotópia típusából. A  $G$  gráf  $t$  színnel való  $s$ -szeres színezése, egy  $\gamma : G \rightarrow KG_{t,s}$  gráfhomomorfizmus indukál egy  $c : |\mathcal{L}(G)| \rightarrow |\mathcal{L}(KG_{t,s})|$   $\mathbb{Z}_2$ -leképezést, így

$$\text{ind}(\mathcal{L}(G)) \leq \text{ind}(\mathcal{L}(KG_{t,s})).$$

A  $KG_{t,s}$  Kneser gráf Lovász komplexusáról ismert, hogy homotóp ekvivalens egy  $(t - 2s)$ -dimenziós gömbcsokorral, így  $\text{ind}(\mathcal{L}(KG_{t,s})) = t - 2s$ . Tehát azt kaptuk, hogy

$$\text{ind}(\mathcal{L}(G)) \leq \text{ind}(\mathcal{L}(KG_{t,s})) = t - 2s.$$

Ezzel a Walker-féle topologikus alsókoriát tétel általánosítását kaptuk a  $\chi_s(G)$  multikromatikus számokra:

**33. Tétel.** (Osztényi) *Tetszőleges  $G$  gráf esetén és  $s \geq 1$ -re*

$$\chi_s(G) \geq \text{ind}(\mathcal{L}(G)) + 2s.$$

### A Babson-Kozlov-féle tétel általánosítása

A Babson-Kozlov-féle topologikus alsókoriát tétel általánosításához ismét tegyük fel, hogy létezik  $t$  színnel való  $s$ -szeres színezése a  $G$  gráfnak, azaz  $G \rightarrow KG_{t,s}$  gráfhomomorfizmus, ekkor létezik  $\mathcal{H}om(K_n, G) \rightarrow \mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$   $\mathbb{Z}_2$ -leképezés. A  $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$  komplexus homotópia típusát [29]-ben meghatároztam meg.

**34. Tétel.** (Osztényi [29]) *A  $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$  komplexus homotóp ekvivalens  $(t - ns)$ -dimenziós gömbcsokorral.*

Így

$$\text{ind}(\mathcal{H}om(K_l, G)) \leq \text{ind}(\mathcal{H}om(K_l, KG_{t,s})) = t - sl.$$

Ezzel a következő topologikus alsókorlát tételt kaptuk a multikromatikus számokra.

**36. Tétel.** (Osztényi [29]) *Tetszőleges  $G$  gráfra,  $s$  és  $l \geq 2$  pozitív egész számokra*

$$\chi_s(G) \geq \text{ind}(\mathcal{H}om(K_l, G)) + sl.$$

### A Lovász-féle alsókorlát tétel a lexikografikus szorzatra

A  $G$  gráf  $s$ -szeres színezése ekvivalens a  $G[K_s]$  lexikografikus szorzat egyszeres színezésével, így a Lovász-féle alsókorlát tételt alkalmazva a következő

$$\chi_s(G) \geq \text{conn}(\mathcal{NK}(G[K_s])) + 3$$

alsó korlátot kapjuk  $G$  multikromatikus számaira.

A  $G[K_s]$  lexikografikus szorzat szomszédsági komplexusának topologikus összefüggősége és a  $G$  gráf úgynevezett kiegészített szomszédsági komplexusának topologikus összefüggősége közötti kapcsolatot [12]-ben mutattuk meg. Az  $\mathcal{NK}(G[K_s])$  szomszédsági komplexus egy jó felbontására alkalmazva az Ideg tételt az alábbi összefüggést kaptuk.

**41. Tétel.**(Osztényi [12]) *Tetszőleges  $s > l \geq 2$  egészek és  $G$  gráf esetén az  $\mathcal{NK}(G[K_s])$  komplexus akkor és csakis akkor  $l$ -összefüggő, ha az  $\mathcal{EN}(G)$  komplexus  $l$ -összefüggő.*

Ez azt is jelenti, hogy  $\text{conn}(\mathcal{EN}(G))$  végeessége esetén  $\text{conn}(\mathcal{NK}(G[K_s])) = \text{conn}(\mathcal{EN}(G))$  minden  $s \geq \text{conn}(\mathcal{EN}(G)) + 2$ -re. Így a Lovász-féle alsó korlát ebben az esetben

$$\chi_s(G) \geq \text{conn}(\mathcal{EN}(G)) + 3,$$

minden  $s \geq \text{conn}(\mathcal{EN}(G)) + 2$ -re. A Stahl megmutatta, hogy  $\chi_s(G)$  szigorúan monoton nő  $s$ -ben, így  $\text{conn}(\mathcal{EN}(G))$  végeessége esetén Lovász-féle alsó korlát és a multikromatikus szám közti különbség akármilyen nagy lehet.

### Babson-Kozlov-féle alsó korlát tétel a lexikografikus szorzatra

A Babson-Kozlov-féle alsókorlát tételt alkalmazva a  $G[K_s]$  lexikografikus szorzatra a

$$\chi_s(G) \geq \text{ind}(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2$$

alsó korlátot adja. A  $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$  gráf homomorfizmus komplexus  $\mathbb{Z}_2$ -indexe és a  $G$  gráfban található legnagyobb teljes részgráf mérete közti kapcsolatot [12]-ben mutattuk meg.

**42. Tétel.** (Csorba [12]) *Tetszőleges  $G$  gráf és  $s \geq |V(G)|$  egész esetén*

$$\text{ind}(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 = s \cdot \omega(G).$$

Ez a következő triviális alsó korlátot adja a multikromatikus számokra.

**43. Tétel.** (Csorba [12]) *Tetszőleges  $G$  gráf és  $s \geq |V(G)|$  egész esetén*

$$\chi_s(G) \geq s \cdot \omega(G).$$

## 5. A Stahl sejtés vizsgálata

### Topologikus alsó korlátok

A Walker-féle, illetve Babson-Kozlov-féle tételek általánosításai csak bizonyos, már eddig is ismert, esetekben oldják meg a sejtést, a többi esetben nem adnak éles alsó korlátot a  $KG_{m,n}$  Kneser gráf multikromatikus számaira. Az  $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$  komplexus összefüggőségéről megmutattuk [12]-ben, hogy véges. Ebből az derült ki, hogy a Lovász-féle alsó korlátot alkalmazva  $KG_{m,n}[K_s]$  gráfra az nem oldja meg a Stahl sejtést. Az 43. tételt alkalmazva a  $KG_{m,n}$  Kneser gráfra csak a Babson-Kozlov-féle tétel általánosításával (36. tétel) adott alsó korláttal megegyező vagy annál gyengébb alsó korlátot kapunk.

### Poset alsó korlát

A  $KG_{m,n}$  Kneser gráf  $s$ -szeres színezése  $t$  színnel megegyezik egy  $KG_{m,n} \rightarrow KG_{t,s}$  gráfhomomorfizmussal. A Stahl sejtés éppen azt mondja meg, hogy mely indexekre léteznek ilyen gráfhomomorfizmusok. Egy  $\gamma : KG_{m,n} \rightarrow KG_{t,s}$  gráfhomomorfizmus létezése esetén valamennyi  $\mathcal{K}(\cdot)$   $\mathbb{Z}_2$ -gráfkomplexusra létezik egy  $c : |\mathcal{K}(KG_{m,n})| \rightarrow |\mathcal{K}(KG_{t,s})|$   $\mathbb{Z}_2$ -leképezés. Egy ilyen  $c$  leképezés létezésének akadálya a Borsuk-Ulam tétel szerint, ha  $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$ -ben nagyobb dimenziós  $\mathbb{Z}_2$ -gömbfelület van, mint  $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ -ben. Az általunk vizsgált topologikus alsó korlátok életlensége abból adódik, hogy a vizsgált esetek nagy részében ez éppen fordítva van. Azaz ha



$m - 2n < t - 2s$ , akkor  $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ -ben nagyobb dimenziós  $\mathbb{Z}_2$ -gömbfelületek vannak, mint  $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$ -ben. Tehát  $|\mathcal{L}\mathcal{K}(KG_{m,n})| \rightarrow |\mathcal{L}\mathcal{K}(KG_{t,s})|$   $\mathbb{Z}_2$ -leképezés létezik, ha  $m - 2n \leq t - 2s$ .

A  $KG_{m,n}$  Kneser gráf  $s$ -edik multikromatikus számára vonatkozó újabb alsó korlátot kapunk, ha a  $KG_{m,n} \rightarrow KG_{t,s}$  gráfhomomorfizmusok által indukált, a Lovász posetek közti,  $LP(KG_{m,n}) \rightarrow LP(KG_{t,s})$  ortoleképezések létezését vizsgáljuk. Az  $(LP(KG_{m,n}), cn_{KG_{m,n}})$  ortoposetet J. Walker definiálta az általa konstruált, gráfok és  $\mathbb{Z}_2$ -terek kategóriái közti funktor közteslépéseként [35]-ben. Az  $LP(KG_{m,n}) \rightarrow LP(KG_{t,s})$  ortoleképezések érzékenyek a gömbfelületek "szimpliciális méretére" is a dimenzió mellett. Az  $LP(KG_{m,n})$  ortoposetbeli szimpliciális egy dimenziós ortokörök méretét vizsgálva a következő alsó korlátot kaptuk [28]-ban.

**50. Tétel.** (Osztényi [28]) *Tetszőleges  $0 < m, n, q$  és  $0 \leq r < n$  egészek esetén legyen  $l$  egész olyan, hogy  $1 \leq l \leq m - 2n$ ,  $0 \leq r < ln/(m - 2n)$ . Ekkor*

$$\chi_{qn-r}(KG_{m,n}) > qm - 2r - l.$$

Ez megadja a  $\chi_s(KG_{m,n})$  multikromatikus számokat a  $qn - \lfloor \frac{n}{m-2n} \rfloor \leq s \leq qn$  esetekben, tetszőleges  $m, n$  és  $q$  pozitív egészekre. Ami  $m < 3n$  esetén újabb, eddig nem bizonyított, részesetekben igazolja a sejtést.

Amint azt a fenti tétel is mutatja az  $LP(KG_{m,n})$  ortoposetbeli a gömbfelületek "szimpliciális méretét" vizsgálva újabb  $\chi_s(KG_{m,n})$  multikromatikus számokat határozhatunk meg. Ám az egy dimenziós esethez képest a magasabb dimenziós esetekben további nehézségek adódnak, melyek leküzdése a további kutatások tárgya lehet.

## Hivatkozások

[2] E. Babson and D.N. Kozlov, Complex of graph homomorphisms, *Israel J. Math.*, **152**, (2006), 285-312.

[3] E. Babson and D.N. Kozlov, Proof of the Lovász conjecture, *Ann. of Math. (2)*, **165**, (2007), 965-1007.

[6] A. Björner, Topological methods, in Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995.

- [12] P. Csorba and J. Osztényi, On the topological lower bound for the multichromatic number, *Discrete Math.*, **310**, (2010), 1334-1339.
- [14] R. Forman, Morse theory for cell complexes, *Advances in Mathematics*, **134**, (1998), 90-145.
- [18] E.N. Gilbert, Unpublished technical memorandum, Bell Telephone Labs, Murray Hill, N.J., 1972.
- [19] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **58**, (1955).
- [20] D. N. Kozlov, Combinatorial algebraic topology, Algorithms and Computation in Mathematics, 21. Springer, Berlin 2008.
- [22] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A*, **25**, (1978), 319-324.
- [24] J. Matoušek and G. M. Ziegler, Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy, *Jahresbericht der DMV*, **106**, (2004), 71-90.
- [27] R.J. Opsut and F.S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in *Theory of Applications of Graphs*. (G. Chartrand, et al. eds.), Wiley, New York 1981, 479-492.
- [28] J. Osztényi, A lower bound on the multichromatic number of the Kneser graphs, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **74**, (2008), 289-296.
- [29] J. Osztényi, The homotopy type of complexes of homomorphisms from a complete graph to a Kneser graph, *Acta Sci. Math. (Szeged)* (2010), elfogadva.
- [32] S. Stahl, n-tuple colorings and associated graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **20**, (1976), 185-203.
- [33] S. Stahl, The multichromatic numbers of some Kneser graphs, *Discrete Math.*, **185**, (1998), 287-291.
- [35] J.W. Walker, From graphs to ortholattices and equivariant maps. *J. Combin. Theory Ser. B*, **35**, (1983), 171-192.