Konvex testek közelítése politópokkal

Doktori értekezés tézisei

Vígh Viktor

Témavezető: dr. Fodor Ferenc

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

SZTE TTIK, Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2010

Szeged

1. Bevezetés

A disszertációban vizsgált kutatási problémák mindegyike a konvex testek politópokkal történő közelítéséről szól. Az eredményeink két nagy területre esnek, a legjobban közelítő politópok elméletébe, illetve a véletlen politópok elméletébe.

Az értekezés a szerző következő négy publikációján alapszik:

- I. Bárány, F. Fodor, V. Vígh: Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies,*Adv. Appl. Probab.* (2009), 1–17, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető arXiv:0906.0309v1.
- K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, V. Vígh: Mean width of random polytopes in a reasonable smooth convex body, *J. Multivariate Anal.*, **100** (2009), 2287–2295.
- K. J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh: Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges, *Beiträge Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 1, 177–193.
- V. Vígh: Typical faces of best approximating polytopes with a restricted number of edges, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75** (2009), no. 1-2, 313–327.

A tézisfüzetben található jelölések és számozások megegyeznek a disszertációban használtakkal.

2. Legjobban közelítő politópok

Legyen K egy konvex test az $\mathbb{E}^d$ térben, továbbá rögzítsünk egy $0 \leq k \leq d-1$ pozitív egész számot. Az egyik leggyakrabban tárgyalt kérdés, hogy milyen jól lehet K-t közelíeni olyan politópokkal, amelyeknek k-dimenziós lapjainak számát előírjuk. Ezt a problémakört az utóbbi 30 évben alaposan körüljárták, és a legfontosabb kérdéseket meg is válaszolták abban az esetben, ha $k = 0$ vagy $k = d - 1$, azaz a csúcsok vagy lapok száma korlátozott. A kapott eredmények nagyrészt aszimptotikus természetűek, legtöbbjük R. Schneider, P. M. Gruber, M. Ludwig és ifj. Böröczky Károly nevéhez fűződik. Azonban csak néhány eredmény ismert azokban az esetekben, ha valamilyen köztes dimenziós lapok számát szorítjuk meg, vagyis $1 \leq k \leq d - 2$. 2000-ben ifj. Böröczky Károly [17] részben megoldotta ezeket a problémákat, nagyságrendileg helyes alsó és felső becslést igazolva. Aszimptotikus formulák azonban egészen a legutóbbi évekig egyáltalán nem voltak ismertek. A 2.2.1. tételben az egyik első felmerülő kérdést válaszoljuk meg, aszimptotikus formulát bizonyítunk abban az esetben, ha $d = 3$ és $k = 1$. A távolságot Hausdorff-metrikával fogjuk mérni. Az analóg állítást térfogatapproximáció esetén ifj. Böröczky Károly, S. S. Gomez és P. Tick oldotta meg [22].

A probléma pontos megfogalmazása a következő. Legyen K egy 3-dimenziós konvex test, aminek a határa C^2 sima, és legyen $\mathcal{P}_n^c$ azon 3-dimenziós politópok halmaza, amelyeknek legfeljebb n éle van és tartalmazzák K-t. Hasonlóan legyen $\mathcal{P}_n^i$ azon 3-dimenziós politópok halmaza, amelyeknek legfeljebb n élük van és benne vannak K-ban.

$$\mathcal{P}_n^c := \{P \mid P \supset K \text{ olyan politóp, amelynek legfeljebb } n \text{ éle van}\},$$

$$\mathcal{P}_n^i := \{P \mid P \subset K \text{ olyan politóp, amelynek legfeljebb } n \text{ éle van}\}.$$

Ekkor létezik egy (nem feltétlenül egyértelmű) $P_n^c \in \mathcal{P}_n^c$ politóp, és egy $P_n^i \in \mathcal{P}_n^i$ politóp úgy, hogy

$$\delta_H(P_n^c, K) = \inf_{P \in \mathcal{P}_n^c} \delta_H(P, K) \quad \text{és} \quad \delta_H(P_n^i, K) = \inf_{P \in \mathcal{P}_n^i} \delta_H(P, K),$$

vagyis a K-tól vett $\delta_H(P_n^c, K)$ és $\delta_H(P_n^i, K)$ Hausdorff távolságuk minimális. A 2. fejezet első fő eredménye a 2.2.1. tétel.

2.2.1. Tétel (13. old., [21] Böröczky, Fodor, Vígh)

$$\delta_H(K, P_n^c), \delta_H(K, P_n^i) \sim \frac{1}{2} \int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{amint } n \to \infty. \tag{1}$$

A formulában $\kappa(x)$ az $x \in \partial K$ pontban vett Gauss-görbületet jelöli, és ∂K-n a 2-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk.

P. M. Gruber [36], [37] munkái, valamint ifj. Böröczky Károly, Tick Péter és Wintsche Gergely [24] dolgozata nyomán természetesen merül fel a kérdés, hogy mondhatunk-e többet a legjobban közelítő politópok geometriájáról? A kérdésre pozitív választ adhatunk abban az értelemben, hogy aszimptotikusan meghatározhatjuk a legjobban közelítő politópok lapjainak alakját és méretét is. Ezt fogalmaztuk meg a 2. fejezet második fő eredményében, 2.2.2. tételben.

2.2.2. Tétel (14. old., [72] Vígh)
A 2.2.1. tételben tárgyalt P_n^i és P_n^c politópsorozatok tipikus lapjai a $\kappa^{1/2}(x)$ sűrűségfüggvény szerinti négyzetek, amint $n \to \infty$.

A tétel lényegi jelentése a következő. Legyen F a P_n politóp egy lapja és $x_F \in \partial K$ olyan pont K határán, ahol a K-hoz húzott külső normális merőleges F lap síkjára. P_n majdnem minden F lapja egy olyan négyszög, ami nagyon közel van egy az $x_F \in \partial K$ pontban tekintett második alapforma szerinti négyzethez, aminek a területe

$$\frac{\int_{\partial K} \kappa^{1/2}(x)dx}{f(n)\kappa^{1/2}(x_F)}.$$

Itt $f(n)$ a P_n politóp lapjainak számát jelenti.

A 2.2.1. tétel bizonyítása két részből áll, azonos nagyságú felső és alsó becslést adtunk a $\delta_H(K, P_n^c)$ távolságra. Mindkét részben az egyik fő gondolat az, hogy osszuk fel K határát elég kis foltokra, és minden ilyen foltot közelítsünk a felület egy oszkuláló paraboloidjával. A felső korlát esetében ehhez megkonstruáltunk olyan K-t jól közelítő politópokat, amelyeknek előre megadott számú éle van. Az alsó becsléshez különböző algebrai és geometriai egyenlőtlenségeket használtunk. A 2.2.2. tételhez a (1) alsó becsléséhez használt egyenlőtlenségek stabilitására volt szükség.

A bizonyítások hátterében a következő geometriai lemma áll, amely rokonságot mutat Fejes Tóth László Momentum tételével [28].

2.5.5 Lemma (19. old., [21] Böröczky, Fodor, Vígh és [72] Vígh)
Legyen $q(x)$ egy pozitív definit kvadratikus alak $\mathbb{R}^2$-n és $\alpha \leq 0$ valós szám. Legyen továbbá $G = [p_1, p_2, \ldots, p_k]$ egy k-szög $\{p_i\}$ csúcsokkal. Ekkor

$$\max_{x \in G}(q(x) - \alpha) \geqq \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}. \tag{2}$$

Továbbá, ha $k \neq 4$, akkor

$$\max_{x \in G}(q(x) - \alpha) > 1,04 \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}. \tag{3}$$

Valamint, ha $\varepsilon < 0,01$ és

$$\max_{x \in G}(q(x) - \alpha) \leq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{2}{k} \cdot A(G)\sqrt{\det q}, \tag{4}$$

akkor G $O(\sqrt[4]{\varepsilon})$-közel van egy q-négyzethez.

3. Véletlen politópok

A 3. fejezetben a politópapproximációk másik aspektusáról írunk, vagyis véletlen politópokkal történő közelítést vizsgálunk. A leggyakrabban használt modell, amellyel véletlen politópot definiálhatunk a következő: legyen K olyan konvex test az E^d térben, amelynek térfogata egységnyi, így az egyenletes eloszláshoz tartozó valószínűségi mérték K-n megegyezik a Lebesgue-mértékkel. Válasszuk az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ véletlen pontokat K-ból egymástól függetlenül, az egyenletes eloszlás szerint. A pontok $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_n)$ konvex burkát a K-ba írt uniform véletlen politópnak hívjuk és K_n-nel jelöljük. A sztochasztikus geometria egyik központi problémája a K_n test viselkedésének megértése. A legfontosabb kérdés a K_n-t leíró geometriai funkcionálok meghatározása.

A kezdetektől fogva világos, hogy K_n uniform véletlen politóp viselkedése erősen függ a K anyatest határának szerkezetétől, az eddigi eredmények és a használt technikák is mutatják, hogy a két eset, amikor K határa sima, illetve amikor K politóp lényegesen eltér. Abban az esetben ha a K test ∂K határa C^3_+ sima, és így $\kappa(x) > 0$ minden $x \in \partial K$ esetén, R. Schneider és J.A. Wieacker [66]-ban bizonyította, hogy

$$W(K) - \mathbb{E}W(K_n) \sim \frac{2\Gamma(\frac{2}{d+1})}{d(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}}\kappa_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}}\, \mathrm{d}x \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{d+1}}}, \tag{5}$$

ahol $W(\,\cdot\,)$ az átlagszélességet jelöli, κ_d a d-dimenziós egységgömb térfogata, $\mathbb{E}(\,\cdot\,)$ pedig a várható értéket jelenti. 2004-ben a simasági feltételt M. Reitzner [53] C^2_+-ra gyengítette.
Az első célunk az (5) formulához szükséges simasági feltétel további általánosítása. Azt mondjuk, hogy a K konvex testnek van gördülő gömbje, ha létezik egy $\varrho > 0$ pozitív valós szám úgy, hogy minden $x \in \partial K$ pontot tartalmaz egy olyan ϱ sugarú gömb, amit tartalmaz K. D. Hug [41] megmutatta, hogy a gördülő gömb létezése ekvivalens azzal, hogy az $x \in \partial K$ pontban húzott külső normális vektor az x Lipschitz-folytonos függvénye. A 3. fejezet első fő eredményében tovább bővíttettük (5) formula érvényességi körét.

3.1.2. Tétel (45. old., [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)
Az (5) aszimptotikus formula minden olyan K konvex testre érvényes, amelynek létezik gördülő gömbje.

Továbbá a 45. oldalon található 3.1.3. példa szerint létezik egy olyan K konvex test, amelynek határa egy pont kivételével C^∞_+ sima, és abban az egy pontban is C^1, de a (5) formula nem teljesül K testre. Ez a példa mutatja, hogy 3.1.2. tétel állítása lényegében optimális.

3.1.3. Példa (45. old., [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh) *Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ d-dimenziós konvex test amire a következők teljesülnek: $o \in \partial K$,*

∂K C^∞_+ sima minden $\partial K\backslash o$ pontban, valamint az $f(x) = \|x\|^{\frac{3d+1}{3d}}$ függvény $\mathbb{R}^{d-1} \cap B^d$ halmazon vett grafikonja része ∂K-nak. Ekkor $\mathbb{E}(W(K) - W(K_n)) \geq \gamma\, n^{\frac{-4d}{3d^2+1}}$ ahol $\gamma > 0$ csak d-től függ, és $\frac{4d}{3d^2+1} < \frac{2}{d+1}$.

A nagy számok erős törvényének igazolásához, valamint centrális határeloszlás tételekhez szükségünk van a szórásra adott aszimptotikus alsó és felső becslésekre, lásd például [12] és [13]. A 3. fejezet második fő eredményében nagyságrendileg helyes alsó és felső becslést adtunk a K_n uniform véletlen politóp minden kevert térfogatának szórására abban az esetben, ha a K anyatest határa C^2_+ sima.

3.1.5. Tétel (48. old., [10] Bárány, Fodor, Vígh)
Legyen K olyan konvex test az $\mathbb{E}^d$ térben, amelynek határa C^2_+ sima. Ekkor minden $s = 1, \ldots, d$ esetén léteznek γ_1 és γ_2 d-től, s-től és K-tól függő konstansok úgy, hogy

$$\gamma_1 n^{-\frac{d+3}{d+1}} \leq \operatorname{Var} V_s(K_n) \leq \gamma_2 n^{-\frac{d+3}{d+1}} \tag{6}$$

amint $n \to \infty$. $V_s(\,\cdot\,)$ az s-edik kevert térfogatot jelüli.

Továbbá, 3.1.2. tételhez hasonlóan, 3.1.6. tételben megmutattuk, hogy az átlagszélesség esetén a szorásra adott becslések a K-ra tett gyengébb simasági feltétel mellett is érvényesek.

3.1.6. Tétel (48. old., [20] Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh)
Ha K egységnyi térfogatú, d-dimenziós konvex test, amelynek létezik gördülő gömbje, akkor

$$\gamma_1\, n^{-\frac{d+3}{d+1}} < \operatorname{Var} W(K_n) < \gamma_2\, n^{-\frac{d+3}{d+1}},$$

ahol a γ_1, γ_2 konstansok d-től és K-tól függenek.

Megjegyezzük, hogy 3.1.5. tétel bizonyítását teljes részletességgel csak abban az esetben végeztük el, amikor K az egységgömb, az általános esethez szükséges módosításokat csak vázoltuk. Ennek oka, hogy a bizonyítás a gömb esetén és az általános esetben lényegileg megegyezik, csak apróbb technikai módosítások szükségesek.

A 3.1.5. tételben és a 3.1.6. tételben az alsó korlátok igazolása nagyon hasonlóan történik, ezért csak a 3.1.5. tétel esetén igazoltuk az állítást. Az alsó becslések bizonyításának alapötlete az, hogy kicsi, "független" sapkákat definiálunk, és megmutatjuk, hogy a szórás minden ilyen sapkában "nagy". Az állítás ezek után a szórás tulajdonságaiból adódik.

A felső becslések bizonyítása a 3.1.5. tételben és a 3.1.6. tételben viszont teljesen eltérő. Egyrészről a 3.1.6. tétel bizonyításában integrálgeometriai eszközöket használtunk. Másrészt a 3.1.5. tételben a kulcslépés Bárány és Larman [11] gazdaságos sapkafedési tételének alkalmazása.

A K d-dimenziós konvex test sapkájának nevezzük a $C = K \cap H_+$ halmazt, ahol H_+ a H hipersíkhoz tartozó zárt féltér. Minden $x \in K$ ponthoz hozzárendelhetjük az őt tartalmazó sapkák közül a minimális térfogatú térfogatát:

$$v(x) = \min\{\lambda_d(C) \,|\, x \in C \text{ és } C \text{ sapkája } K\text{-nak}\}.$$

A K test t paraméterhez tartozó $K(t)$ *vizes részén* a következőt értjük:

$$K(t) = \{x \in K \,|\, v(x) \leq t\,\}.$$

Gazdaságos sapkafedési tétel ([11] Bárány, Larman)
Legyen $K \in \mathcal{K}^d$ egységnyi térfogatú konvex test és $0 < \varepsilon < (2d)^{-2d}$ pozitív valós szám. Ekkor léteznek K-nak $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sapkái, és $C_1', C_2', \ldots, C_m'$ konvex halmazok úgy, hogy a következők mindegyike teljesül:

i) *minden $i = 1, \ldots, m$ esetén $C_i' \subset C_i$,*

ii) $\cup_1^m C_i' \subset K(\varepsilon) \subset \cup_1^m C_i$,

iii) *minden $i = 1, \ldots, m$ esetén $\lambda_d(C_i) \ll \varepsilon$ és $\lambda_d(C_i') \gg \varepsilon$,* *iv) minden ε térfogatú C sapkát tartalmaz egy alkalmas C_i sapka.*

A (6) formula felső becsléséből, felhasználva a [3] és [53] cikkek fő eredményeit, levezethető a nagy számok erős törvénnumbere. Ezt 3.1.7. tételben fogalmaztuk meg.

3.1.7. Tétel (49. old, [10] Bárány, Fodor, Vígh)
Ha K egy konvex test, amelynek határa C^2_+ sima, K_n pedig a K-ba írt uniform véletlen politóp, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(V_s(K)-V_s(K_n))\cdot n^{\frac{2}{d+1}} = c_{d,j}\cdot\kappa_d^{\frac{2}{d+1}}\int_S(\tau_{d-1}(x))^{\frac{1}{d+1}}\tau_{d-j}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 *valószínűséggel teljesül.*

Hivatkozások

[3] I. Bárány: Random polytopes in smooth convex bodies, *Mathematika*, **39** (1992), no. 1, 81–92.

[10] I. Bárány, F. Fodor, V. Vígh: Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies, *Adv. Appl. Probab*, (2009), 1–17, közlésre benyújtva, elektronikusan elérhető arXiv:0906.0309v1.

[11] I. Bárány, D. G. Larman: Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes, *Mathematika*, **35** (1988), 274–291.

[12] I. Bárány, M. Reitzner: On the variance of random polytopes, *Adv. Math.*, (2010), 1–17, közlésre elfogadva.

[13] I. Bárány, M. Reitzner: Poisson polytopes, *Ann. Probab.*, (2010), 1–27, közlésre elfogadva.

[17] K. J. Böröczky: Polytopal approximation bounding the number of k-faces, *J. Approximation Th.*, **102** (2000), 263–285.

[20] K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, V. Vígh: Mean width of random polytopes in a reasonable smooth convex body, *J. Multivariate Anal.*, **100** (2009), 2287–2295.

[21] K. J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh: Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges, *Beiträge Algebra Geom.*, **49** (2008), no. 1, 177–193.

[22] K. J. Böröczky, S. S. Gomez, P. Tick: Volume approximation of smooth convex bodies by three-polytopes of restircted number of edges, *Monatsh. Math.*, **153** (2008), 23–48.

[24] K. J. Böröczky, P. Tick, G. Wintsche: Typical faces of best approximating three-polytopes, *Beit. Alg. Geom.*, **48** (2007), 521–545.

[28] L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, Berlin, 2nd ed., 1972.

[36] P. M. Gruber: Asymtoptic estimates for best ans stepwise approximating convex bodies IV, *Forum Math.*, **10** (1998), 665–686.

[37] P. M. Gruber: Optimal configurations of finite sets in Riemannian 2-manifolds, *Geom. Dedicata*, **84** (2001), 271–320.

[41] D. Hug: Measures, curvatures and currents in convex geometry, Habilitationsschrift, Univ. Freiburg, 2000.

[53] M. Reitzner: Stochastic approximation of smooth convex bodies, *Mathematika*, **51** (2004), 11–29.

[66] R. Schneider, J.A. Wieacker: Random polytopes in a convex body, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **52** (1980), 69–73.

[72] V. Vígh: Typical faces of best approximating polytopes with a restricted number of edges, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **75** (2009), no. 1-2, 313–327.