Affin terek akromatikus és pszeudoakromatikus indexeiről

2014. május 22.

Kiss György

ELTE és MTA-ELTE GAC, Budapest, Magyarország

A $G = (V(G), E(G))$ egyszerű gráf *dekompozíciója* egy olyan $[G, \mathcal{D}]$ pár, ahol $\mathcal{D}$ a G feszítet részgráfjainak olyan halmaza, melyek G éleinek egy partícióját alkotják. A $[G, \mathcal{D}]$ dekompozíció k színnel való *szinezése* egy olyan függvény, mely a színek k elemű halmazából G minden éléhez egy színt rendel úgy, hogy minden $H \in \mathcal{D}$ részgráf esetén H minden élének ugyanaz a színe. Azt mondjuk, hogy a $[G, \mathcal{D}]$ k színnel való szinezése *jó*, ha bármely $H_1, H_2 \in \mathcal{D}$, $H_1 \neq H_2$ és $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$, esetén $E(H_1)$ és $E(H_2)$ éleinek színei különbözőek. A dekompozíció *kromatikus száma,* $\chi'([G, \mathcal{D})]$ az a legkisebb k, melyre létezik $[G, \mathcal{D}]$-nek jó színezése k színnel. A $[G, \mathcal{D}]$ dekompozíció k színnel való szinezése *teljes*, ha bármely lehetséges színpár előfordul G legalább egyik csúcsánál. A dekompozíció *pszeudokromatikus száma,* $\psi'([G, \mathcal{D})]$ az a legnagyobb k, melyre létezik $[G, \mathcal{D}]$-nek teljes színezése k színnel. A dekompozíció *akromatikus száma,* $\alpha'([G, \mathcal{D}])$ pedig az a legnagyobb k, melyre létezik $[G, \mathcal{D}]$-nek jó és teljes színezése k színnel. Ha $\mathcal{D} = E(G)$, akkor $\chi'([G, E])$, $\alpha'([G, E])$ és $\psi'([G, E])$ rendre a gráf *kromatikus*, *akromatikus* és *pszeudoakromatikus száma.* A definíciókból azonnal adódik, hogy $\chi'([G, \mathcal{D}]) \leq \alpha'([G, \mathcal{D}]) \leq \psi'([G, \mathcal{D}])$.

Blokkrendszerek természetes módon definiálják a megfeleló teljes gráf dekompozícióját: Azonosítsuk a $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ (v, κ) blokkrendszer pontjait a K_v teljes gráf csúcsaival. Ekkor D minden blokkjának pontjai K_v-nek egy olyan részgráfját határozzák meg, amely K_κ-vel izomorf, és e részgráfok K_v egy dekompozícióját adják.

Ebben az előadásban K_{q^n} azon dekompozícióit vizsgáljuk, melyeket a $\mathrm{AG}(n, q)$ véges affin tér $\mathcal{L}$ egyeneshalmaza határoz meg. Megmutatjuk, hogy $\psi'([K_{q^2}, \mathcal{L}]) = \lfloor \frac{(q+1)^2}{2} \rfloor$, továbbá becsléseket adunk $[K_{q^n}, \mathcal{L}]$ akromatikus és pszeudoakromatikus számaira $n > 2$ esetén.

Társszerzők: G. Araujo-Pardo, C. Rubio-Montiel és A. Vázquez-Ávila.

On achromatic and pseudoachromatic indices of affine spaces

22 May 2014

Kiss György

ELTE és MTA-ELTE GAC, Budapest, Hungary

A *decomposition* of a simple graph $G = (V(G), E(G))$ is a pair $[G, \mathcal{D}]$ where $\mathcal{D}$ is a set of induced subgraphs of G, such that every edge of G belongs to exactly one subgraph in $\mathcal{D}$. A *coloring* of a decomposition $[G, \mathcal{D}]$ with k colors is a surjective function that assigns to edges of G a color from a k-set of colors, such that all edges of $H \in \mathcal{D}$ have the same color. A coloring of $[G, \mathcal{D}]$ with k colors is *proper*, if for all $H_1, H_2 \in \mathcal{D}$ with $H_1 \neq H_2$ and $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$, then $E(H_1)$ and $E(H_2)$ have different colors. The *chromatic index* $\chi'([G, \mathcal{D})]$ of a decomposition is the smallest number k for which there exists a proper coloring of $[G, \mathcal{D}]$ with k colors. A coloring of $[G, \mathcal{D}]$ with k colors is *complete* if each pair of colors appears on at least a vertex of G. The *pseudoachromatic index* $\psi'([G, \mathcal{D}])$ of a decomposition is the largest number k for which there exist a complete coloring with k colors. The *achromatic index* $\alpha'([G, \mathcal{D}])$ of a decomposition is the largest number k for which there exist a proper and complete coloring with k colors. If $\mathcal{D} = E(G)$ then $\chi'([G, E])$, $\alpha'([G, E])$ and $\psi'([G, E])$ are the usual *chromatic*, *achromatic* and *pseudoachromatic indices* of G, respectively. Clearly we have that $\chi'([G, \mathcal{D}]) \leq \alpha'([G, \mathcal{D}]) \leq \psi'([G, \mathcal{D}])$.

Designs define decompositions of the corresponding complete graphs in the natural way. Identify the points of a (v, κ)-design $D = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ with the set of vertices of the complete graph K_v. Then the set of points of each block of D induces in K_v a subgraph isomorphic to K_κ and these subgraphs give a decomposition of K_v.

In this talk we consider the decomposition of K_{q^n} coming from the line-set $\mathcal{L}$ of the finite affine space $\mathrm{AG}(n, q)$. We prove that $\psi'([K_{q^2}, \mathcal{L}]) = \lfloor \frac{(q+1)^2}{2} \rfloor$ and we give give estimates on achromatic and pseudoachromatic indices of $[K_{q^n}, \mathcal{L}]$ for $n > 2$.

Joint work with G. Araujo-Pardo, C. Rubio-Montiel és A. Vázquez-Ávila.