A térfogatszorzat

2014. szeptember 18.

Makai Endre

Rényi, Budapest, Magyarország

Kivonat

Legyen $\mathbb{R}^d$ a d-dimenziós Euklideszi tér, és $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, azaz egy konvex kompakt halmaz melynek belseje

nem üres. Ha K 0-szimmetrikus, a *K test térfogatszorzatát*

a következőképpen definiáljuk: $V(K)V(K^*)$, ahol V a térfogat,

és $K^* := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in K \ \langle x, y\rangle \le 1\}$ a K test polárisa. Ha K nem 0-szimmetrikus, akkor tekinthetünk tetszőleges $z \in \operatorname{int} K$ pontot, és vizsgálhatjuk a $V(K-z)V\left((K-z)^*\right)$ mennyiséget. Ez végtelenhez tart, ha z $\operatorname{bd} K$-hoz tart, viszont van egy egyértelmű $s(K)$ minimumhelye, amelynek neve a K test *Santaló pontja.* Ezért a $V\left(K - s(K)\right) V\left((K - s(K))^*\right)$ mennyiséget, a *K test térfogatszorzatát* vizsgálják. Ha K 0-szimmetrikus, ez a definició visszaadja az előző definiciót. A kérdés a következő: adott $V(K)$-ra, milyen alsó és felső korlátokat lehet adni a $V\left((K-s(K))^*\right)$ mennyiségre. Homogenitási meggondolás alapján feltehető $V(K) = 1$, vagy, amint szokásos, inkább a K test térfogatszorzatát vizsgálják. (Ezek a kérdések ekvivalensek.) Ez a Blaschke-Santaló probléma. A maximum pontosan az ellipszoidok esetén vevődik fel, de nagyságrendileg pontos stabilitási eredmények még nem ismeretesek. (Azaz ha a térfogatszorzat legalább ε-ra megközelíti a maximumot, akkor K valami $f(\varepsilon)$-"közel" van egy ellipszoidhoz, ahol legalábbis az $f(\varepsilon)$ függvény nagyságrendje pontos.) A sejtés az hogy a térfogatszorzat minimuma a szimplexek (az 0-szimmetrikus esetben pl. a parallelotópok) esetén vevődik fel. Ez sok speciális esetben ismert, és vannak a sejtett minimumhoz „elég közeli" alsó becslések a térfogatszorzatra.

Az előadásban a problémáról egy rövid áttekintést adok, és az idő függvényében bizonyításvázlatokat egyes saját eredményeinkre, melyek ifj. Böröczky K., M. Meyer és S. Reisnerrel közösek.

The volume product

18 September 2014

Endre Makai

Rényi, Budapest, Hungary

Abstract

Let $\mathbb{R}^d$ be the d-dimensional Euclidean space, and $K \subset \mathbb{R}^d$ a convex body, i.e., a convex compact set with non-empty interior. If K is 0-symmetric, we define the *volume product of* K as $V(K)V(K^*)$, where V means volume, and $K^* := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in K \ \langle x, y\rangle \le 1\}$ is the polar body of K. For K not 0-symmetric, we may consider any $z \in \operatorname{int} K$, and can investigate $V(K-z)V\left((K-z)^*\right)$. This quantity tends to infinity for z approaching $\operatorname{bd} K$, but has a unique minimum, realized for the so called Santaló point $s(K)$ of K. Thus one investigates $V\left(K - s(K)\right) V\left((K - s(K))^*\right)$, the *volume product of* K. For K 0-symmetric this reduces to the first definition. The question is, for given $V(K)$, what lower and upper bounds can be given for $V\left((K - s(K))^*\right)$. By homogeneity considerations, we may assume $V(K) = 1$, or, as usual, we rather investigate the volume product of K. (These are equivalent questions.) This is the Blaschke-Santaló problem. The unique maximizers of the volume product are the ellipsoids, but stability results with exact order of magnitude are still missing. (I.e., if the volume product is ε-close to the maximum, then K is some $f(\varepsilon)$-"close" to some ellipsoid, where at least the order of magnitude of $f(\varepsilon)$ is sharp.) The conjecture is that simplices (in the 0-symmetric case e.g. parallelotopes) are minimizers. There are a lot of special cases where this is verified, and there are lower estimates for the volume product that are "rather close" to this conjecture.

In the talk I give some overview of this problem, and if time permits, also some sketches of proofs of some of our results related to the volume product, which are joint with K. Böröczky, Jr., M. Meyer and S. Reisner.