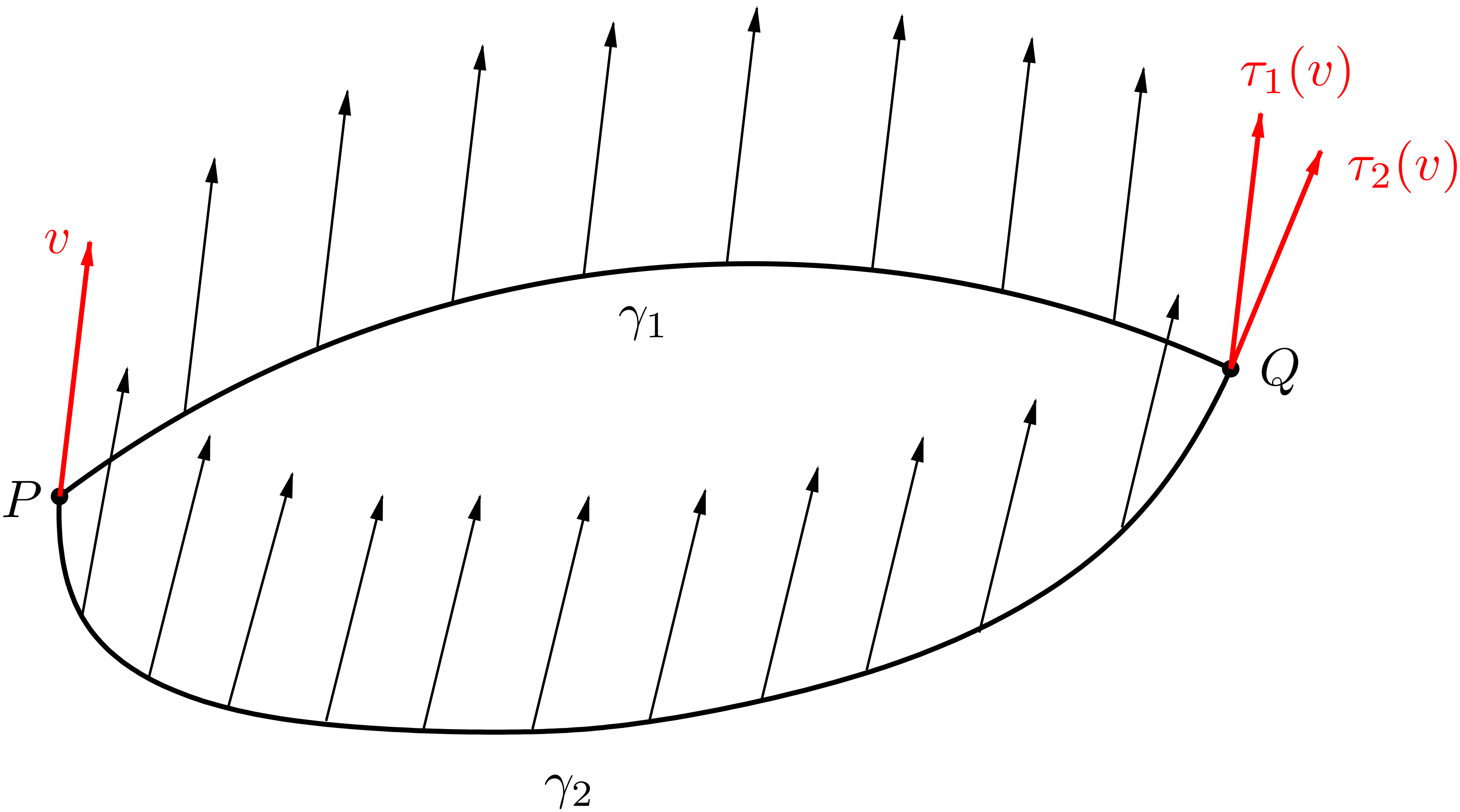
Finsler terek holonómiájáról

Nagy Péter és Muzsnay Zoltán

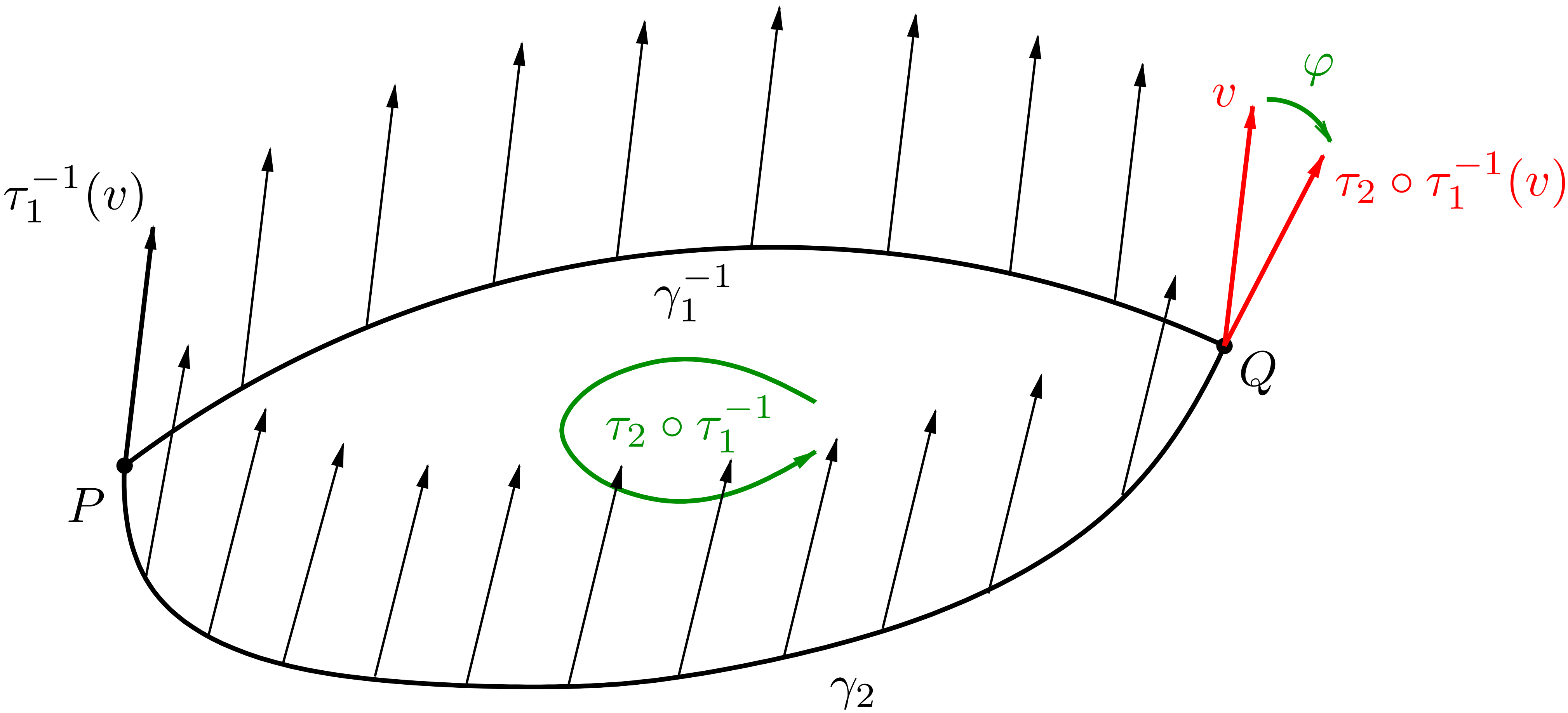
Kerékjártó Geometriai Szeminárium,

2014 április 10.

A görbe menti párhuzamos eltolás



Holonómia

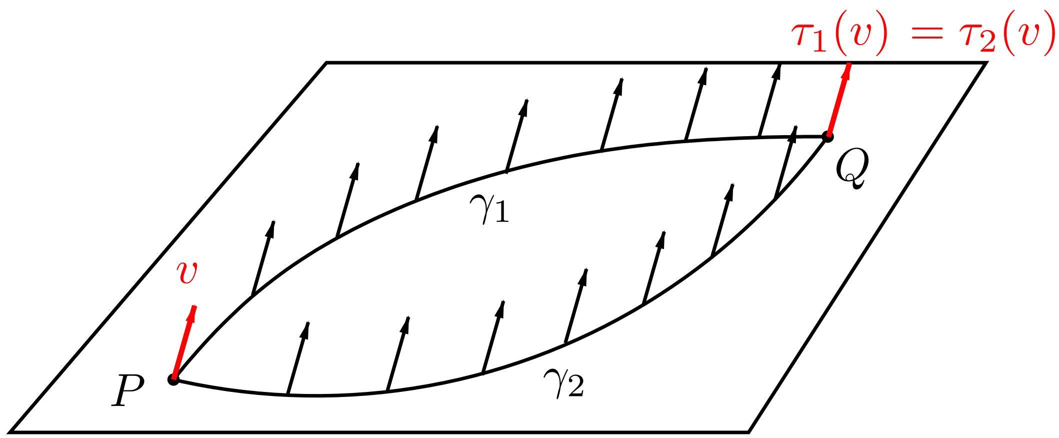


$\tau_1^{-1}(v)$
v
φ
$\tau_2 \circ \tau_1^{-1}(v)$
γ_1^{-1}
$\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$
P
Q
γ_2

Példák

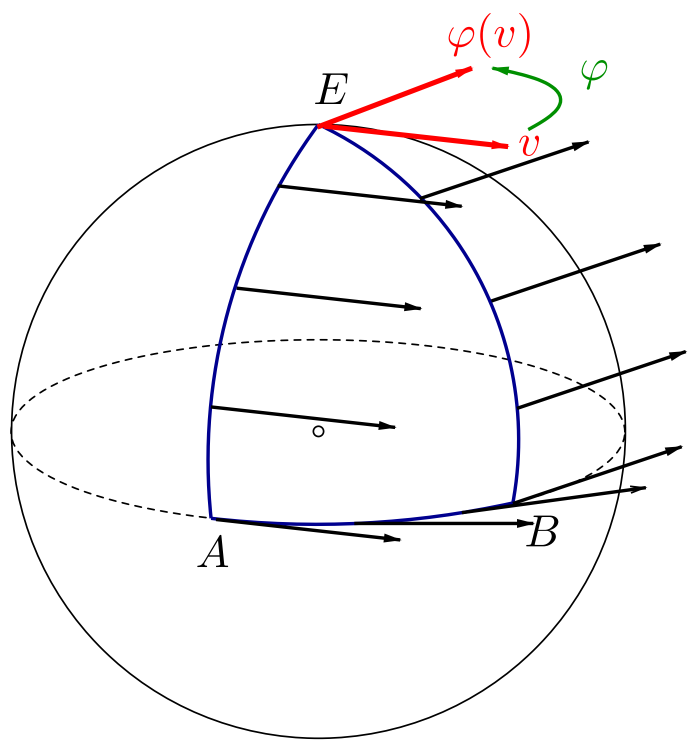
1. Euklideszi sík:

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}$$



2. Gömbfelület:

$$\mathbf{R} \not\equiv \mathbf{0}$$



Finsler sokaság, párhuzamos eltolás, holonómia

- Finsler függvény: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x,y)$

$$g_y\colon (u,v) \;\mapsto\; g_{ij}(x,y)u^i v^j = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}^2(x, y+su+tv)}{\partial s\,\partial t}\Big|_{t=s=0}$$

- Geodetikusok: $\ddot{x}^i + 2G^i(x,\dot{x}) = 0$,

$$G^i(x,y) := \frac{1}{4} g^{il}(x,y)\Big(2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x,y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x,y)\Big) y^j y^k.$$

- A $c(t)$ görbe mentén az $X(t)$ egy párhuzamos vektormező, ha

$$\nabla_{\dot{c}} X(t) = \Big(\frac{dX^i(t)}{dt} + \Gamma^i_j(c(t), X(t))\dot{c}^j(t)\Big)\frac{\partial}{\partial x^i} = 0, \quad \Gamma^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}.$$

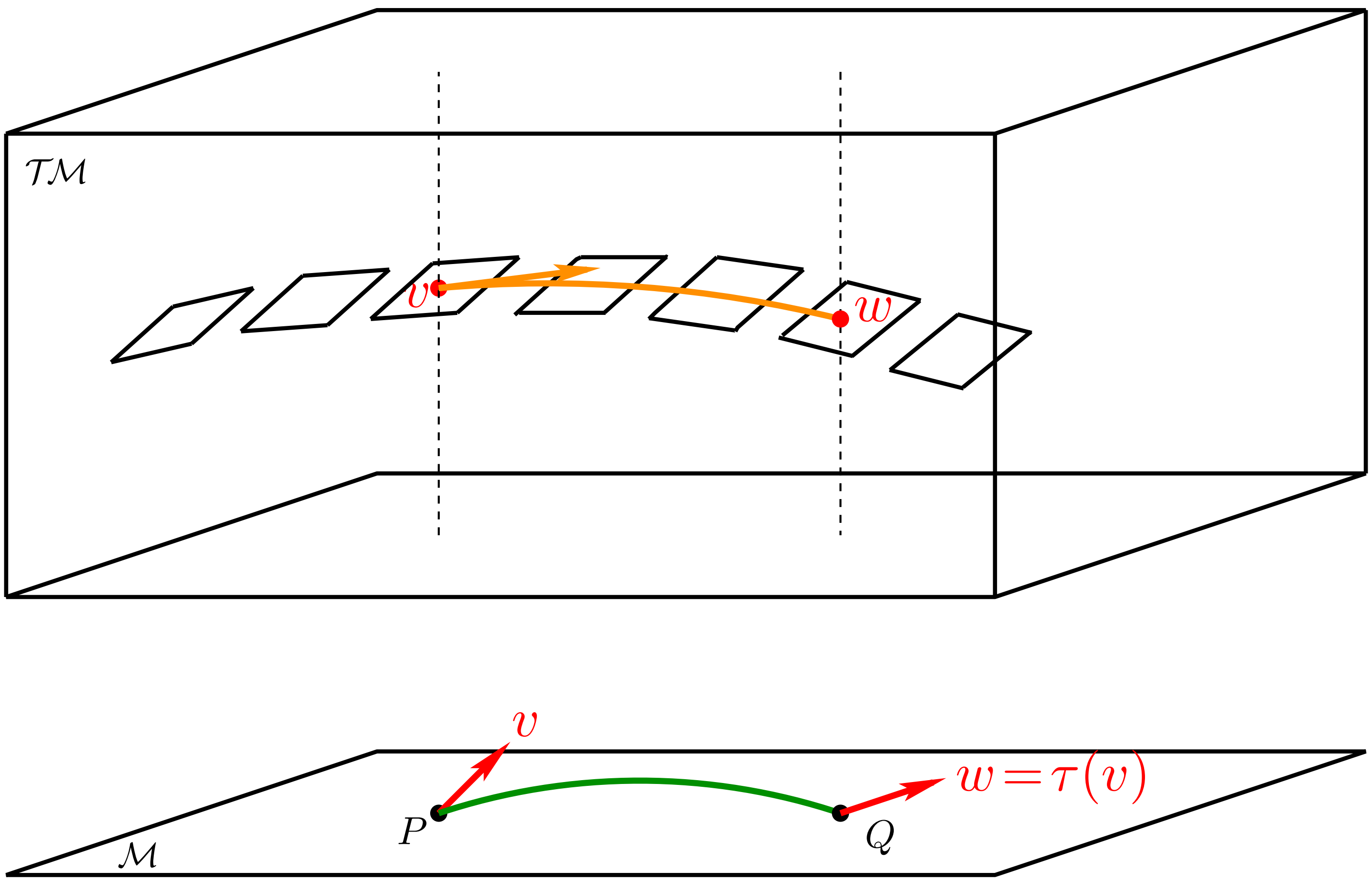
- Párhuzamos eltolás a $c\colon[0,1]\to M$ görbe mentén:

$$\tau_c : T_{c(0)}M \to T_{c(1)}M, \qquad X_0 \;\Rightarrow\; X(t) \;\Rightarrow\; X_1 := \tau X_0 = X(1)$$

- Holonómia elem: zárt hurok menti párhuzamos eltolás

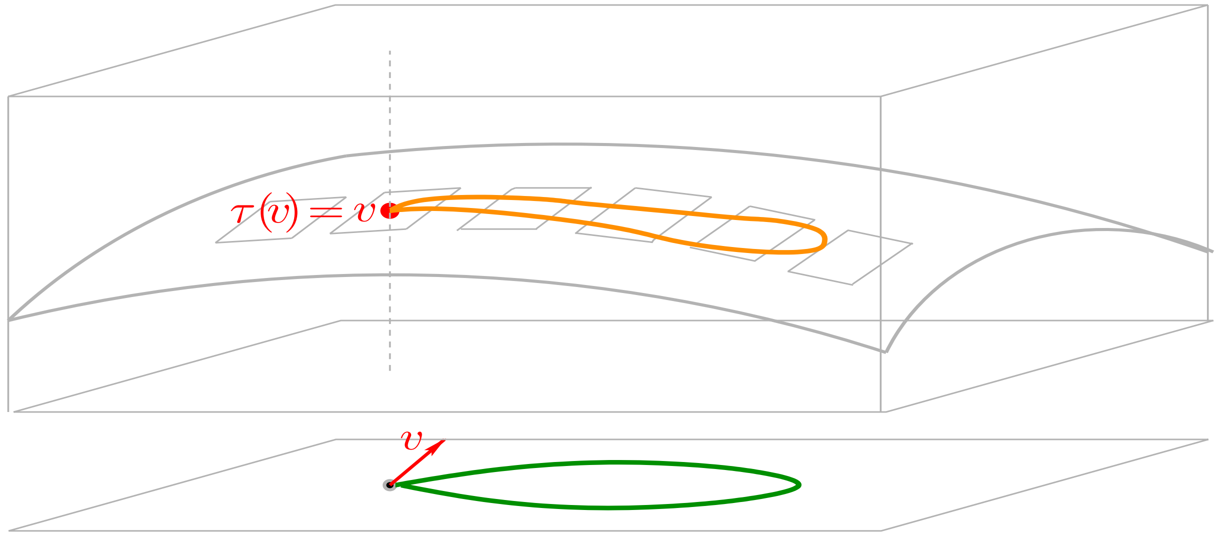
- Holonómia csoport: holonómia elemek által generált csoport.

Párhuzamos eltolás: geometriai konstrukció

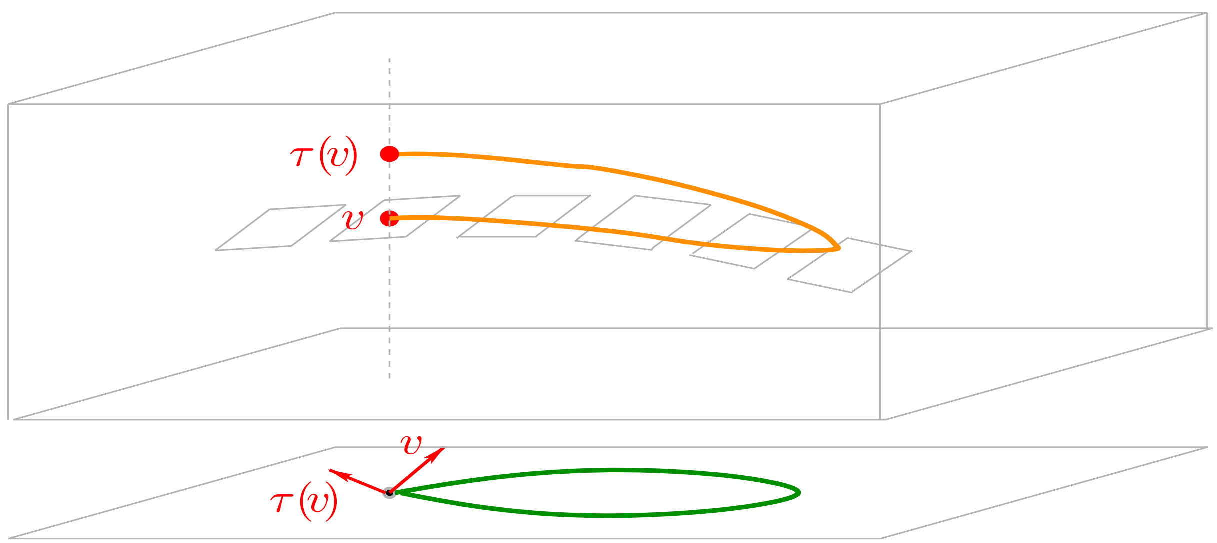


Párhuzamos eltolás: geometriai konstrukció

- $R \equiv 0$



- $R \not\equiv 0$



A $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{I}_x M)$ **egy** H **részcsoportját érintő Lie algebra:**

Def: • Az X vektormező érinti H-t, ha van olyan C^1-osztályú 1-paraméteres $\{\phi_t\}$ görbe H-ban, hogy

$$\phi_0 = \mathrm{Id}, \qquad \left.\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\right|_{t=0} = X.$$

• Az $\mathfrak{X}^\infty(\mathcal{I})$-nek egy $\mathfrak{h}$ Lie részalgebrája ***érinti*** a H-t, ha $\mathfrak{h}$ minden eleme érinti H-t.

$$\boxed{\text{A } \mathfrak{h} \text{ érinti } H\text{-t} \quad \Rightarrow \quad \text{információ } H\text{-ra}}$$

Állítás: Ha $\mathfrak{h}$ érinti a $H \subset \mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{I})$-beli zárt csoportot, akkor $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$.

Biz: • $X \in \mathfrak{h}$, az 1-paraméteres diffeomorfizmuscsaládra $\{\phi(t) \in H\}_{t\in\mathbb{R}}$:

$$\left\{\left(\phi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \in H\right\}_{t\in\mathbb{R}} \quad \longrightarrow \quad \{\exp tX\}_{t\in\mathbb{R}}$$

• H zárt $\Rightarrow \{\exp tX\}_{t\in\mathbb{R}} \subset H$.

Definíció: Az $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{I})$ vektormező ***erősen érinti*** a H-t, ha van olyan a $k \in \mathbb{N}$ és hozzá H-ban diffeomorfizmusoknak olyan k-paraméteres családja $\{\phi_{(t_1,\dots,t_k)}\}$, amire

1. $\phi_{(t_1,\dots,t_k)} = \mathrm{Id}$, ha $t_j = 0$ valamilyen $1 \le j \le k$-ra
2. $\left.\dfrac{\partial^k \phi_{(t_1,\dots,t_k)}}{\partial t_1 \cdots \partial t_k}\right|_{(t_1,\dots,t_k)=(0,\dots,0)} = X.$

Megjegyzés: ha $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{I})$ erősen érinti H-t, akkor érinti is H-t.

Állítás: *A H-t erősen érintő vektormezők által generált Lie algebra érinti H-t.*

$X_1 \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{I})$ erősen érintő $\Rightarrow \{\phi^1_{(t_1,\dots,t_{k_1})}\}$
$X_2 \in \mathfrak{X}^\infty(\mathcal{I})$ erősen érintő $\Rightarrow \{\phi^2_{(t_1,\dots,t_{k_2})}\}$ $\quad\Rightarrow\quad \left[\phi^1_{(t_1,\dots,t_{k_1})}, \phi^2_{(t_1,\dots,t_{k_2})}\right]$

$$\left[\phi^1_{(t_1,\dots,t_{k_1})}, \phi^2_{(t_1,\dots,t_{k_2})}\right] = \left(\phi^1_{(t_1,\dots,t_{k_1})}\right)^{-1} \circ \left(\phi^2_{(t_1,\dots,t_{k_2})}\right)^{-1} \circ \left(\phi^1_{(t_1,\dots,t_{k_1})}\right) \circ \left(\phi^2_{(t_1,\dots,t_{k_2})}\right)$$

$$\left[\phi^1_{(t_1,\dots,t_{k_1})}, \phi^2_{(t_1,\dots,t_{k_2})}\right] \quad \Rightarrow \quad [X_1, X_2]$$

Az infinitézimális holonómia algebra

$\mathfrak{hol}^*(M)$**:** a görbületi vektormezők által generált legszűkebb Lie algebra, ami invariáns a horizontális Berwald-féle kovariáns deriválásra nézve

$\mathfrak{hol}^*_x(M) := \left\{ \xi_x \ ; \ \xi \in \mathfrak{hol}^*(M) \right\}$

Állítás: $\mathfrak{hol}^*_x(M)$ érinti a $\mathrm{Hol}_x(M)$-t.

1. $\xi_x = R_x(X^h_x, Y^h_x)$, ahol $X_x, Y_x \in T_xM$ $\quad (X(x) = X_x,\ Y(x) = Y_x\ )$
   - $\{\phi_t\}$, $\{\psi_s\}$ az X^h és Y^h-hoz tartozó folyam,
   - $\theta_{t,s} = [\phi_t, \psi_s] = \phi_t^{-1} \circ \psi_s^{-1} \circ \phi_t \circ \psi_s : \quad \mathcal{I}_x \to \mathcal{I}_x$

$$\theta_{0,s}(x) = \mathrm{Id}, \quad \theta_{t,0}(x) = \mathrm{Id}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{t=0,s=0} \theta_{t,s}(x) = \xi_x$$

2. Ha ξ erősen érinti $\mathrm{Hol}(M)$-et, akkor $\nabla_X \xi$ is erősen érinti $\mathrm{Hol}(M)$-et.
   - ξ erősen érinti $\mathrm{Hol}(M)$-t az U-n $\quad \Rightarrow \quad \left\{\Phi_{(t_1,\dots,t_k)}\right\}_{t_i \in (-\varepsilon,\varepsilon)}$
   - Legyen τ_t az X folyama menti párhuzamos eltolás
   - $\left[\Phi_{(t_1,\dots,t_k)}, \tau_{t_{k+1}}\right] := \Phi^{-1}_{(t_1,\dots,t_k)} \circ \tau^{-1}_{t_{k+1}} \circ \Phi_{(t_1,\dots,t_k)} \circ \tau_{t_{k+1}} \quad \subset \mathrm{Diff}^\infty\big(\mathcal{I}M\big)$
   - $\dfrac{\partial^{k+1}[\Phi_{(t_1\dots t_k)}, \tau_{(t_{k+1})}]}{\partial t_1 \dots \partial t_{k+1}}\Big|_{(0\dots 0)} = \left[X^h, \xi\right] = v[X^h, \xi] = \nabla_X \xi$

Finsler felületek $(\dim M = 2)$

Megjegyzés:
- $\mathcal{I}_x \simeq S^1$,
- $\dim \mathfrak{R}_x(M) \leq 1$,
- $\mathfrak{hol}^*_x(M)$ lehet magasabb (akár végtelen) dimenziós.

Állítás: *Ha* $\mathfrak{hol}^*_x(M)$ *tartalmaz* 4, *egyszerre el nem tűnő* $\mathbb{R}$*-lineárisan független vektormezőt, akkor* $\mathsf{Hol}(M)$ *nem lehet véges dimenziós Lie csoport.*
(S. Lie: Ha egy véges dimenziós Lie csoport fixpont nélkül hat egy 1-dimenziós sokaságon, akkor annak dimenziója maximálisan 3.)

Eredmények

1. Nemzérus konstans zászlógörbületű Finsler tér esetén $\mathfrak{hol}^*(x) = \mathfrak{R}_x$ akkor és csak akkor teljesül, ha a Berwald-féle középgörbület zérus. $(B_{jk} = \frac{\partial^3 G^l}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l})$
2. Konstans zászlógörbületű Randers felületek ($\mathcal{F} = \alpha + \beta$), ahol $\mathfrak{hol}^*(x) = \mathfrak{R}_x$.
3. Konstans zászlógörbületű Randers felületek, ahol $\dim\big(\mathfrak{hol}^*(x)\big) = \infty$:

$$\alpha = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1 - |x|^2}, \quad \beta = \frac{\langle x, y\rangle}{1 - |x|^2} + \frac{\langle a, y\rangle}{1 - \langle a, x\rangle}$$

Konstans görbületű lokálisan síkprojektív Finsler felületek

Tulajdonság: a geodetikusok egyenesek, $G^i(x,y)=\mathcal{P}(x,y)y^i$

Eredmények: végtelen dimenziós holonómia csoporttal rendelkező Finsler felületekre példák.

Tétel. Ha van olyan $x_0\in M$, amire $\mathcal{F}(x_0,y)=\|y\|$ és $\mathcal{P}(x_0,y)=c\cdot\|y\|$, akkor

$$\overline{\mathsf{Hol}_{x_0}(M)}=\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1).$$

· $\mathcal{I}_{x_0}(M)=\mathbb{S}^1$,

· $\mathfrak{hol}^*_0(M)\supset \mathsf{F}(\mathbb{S}^1)=\Big\{\cos nt\,\partial_t,\sin nt\,\partial_t\Big\}_{n\in\mathbb{N}}\Rightarrow \overline{\mathsf{F}(\mathbb{S}^1)}=\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)\subset\overline{\mathfrak{hol}^*_0(M)}\subset\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$

· $\exp(\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1))=\exp\left(\overline{\mathfrak{hol}^*_0(M)}\right)\subset\overline{\exp(\mathfrak{hol}^*_0(M))}\subset\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)$

· $\Big\langle\exp(\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1))\Big\rangle\subset\Big\langle\,\overline{\exp(\mathfrak{hol}^*_0(M))}\,\Big\rangle\subset\overline{\mathsf{Hol}_0(M)}\subset\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)$

· $\Big\langle\exp(\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1))\Big\rangle$ konj. inv. $\Rightarrow$ normális részcsoport $\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)$-ben

· $\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)$ egyszerű $\Rightarrow\Big\langle\exp(\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1))\Big\rangle=\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)\Rightarrow\overline{\mathsf{Hol}_0(M)}=\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)$

Következmény: A Funk metrika (konstans negatív görbület) illetve Shen és Bryant metrika (konstans pozitív görbület) esetén: $\overline{\mathsf{Hol}(M)}=\mathsf{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{S}^1)$.

Tétel: *Egy 2-dimenziós, konstans λ görbületű síkprojektív tér holonómia csoportja pontosan akkor véges dimenziós, ha*

1. $\lambda = 0$,
2. $\lambda \neq 0$ *és a tér Berwald típusú, azaz a kanonikus konnexió lineáris.*

Tegük fel, hogy $\lambda \neq 0$.

- Ha ∇ lineáris $\Rightarrow$ Hol(M) lineáris $\Rightarrow$ véges dimenziós.
- Ha ∇ nem lineáris, Hol(M) véges dimenziós:

  $x_0 \in M$, $\xi = R_{x_0}(X, Y)$

  · $\mathcal{P}(x_0, y)$ nem lineáris az y-ban $\Rightarrow \{\xi,\ \nabla_1\xi,\ \nabla_2\xi\}$ lineárisan független,

  · $\{\xi,\ \nabla_1\xi,\ \nabla_2\xi,\ \nabla_i\nabla_j\xi\}$ lineárisan függő,

  · $\left\{\Phi_0 = 1,\ \Phi_1 = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^1},\ \Phi_2 = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^2},\ \Phi_{ij} = 2\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^i}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y^j} - \lambda g_{ij}\right\}$ lineárisan függő

  $\Rightarrow \exists\ A_{ij}, B_{ij}$ konstansok, melyekkel $\lambda g_{ij} = A_{ij} + 2\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j + B^m_{ij}\mathcal{P}_m$,

  · $g_{ij} = \partial_{y^i y^j} E \Rightarrow \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} = 0 \Rightarrow$ PDE $\mathcal{P}$-re

$$\begin{cases} 2\mathcal{P}_2\mathcal{P}_{11} - 2\mathcal{P}_1\mathcal{P}_{12} + b_2\mathcal{P}_{11} + (c_2 - b_1)\mathcal{P}_{12} - c_1\mathcal{P}_{22} = 0, \\ 2\mathcal{P}_1\mathcal{P}_{22} - 2\mathcal{P}_2\mathcal{P}_{12} - b_3\mathcal{P}_{11} + (b_2 - c_3)\mathcal{P}_{12} + c_2\mathcal{P}_{22} = 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{P}(x_0, y) = y_2 \cdot f\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''\left(\frac{2}{y_2} f + \frac{b_2}{y_2} + (b_1 - c_2)\frac{y_1}{y_2^2} + \frac{c_1 y_1^2}{y_2^3}\right) = 0, \\ f''\left(\frac{2y_1}{y_2^2} f - \frac{b_3}{y_2} + (c_3 - b_2)\frac{y_1}{y_2^2} + \frac{c_2 y_1^2}{y_2^3}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2f + b_2 + (b_1 - c_2)t + c_1 t^2 = 0, \\ 2tf - b_3 + (c_3 - b_2)t + c_2 t^2 = 0. \end{cases}$$

$$b_3 + (2b_2 - c_3)t - (2c_2 - b_1)t^2 + c_1 t^3 \equiv 0,$$

$$b_3 = 0, \qquad 2b_2 - c_3 = 0, \qquad 2c_2 - b_1 = 0, \qquad c_1 = 0.$$

$$f(t) = -b_2 - c_2 t, \qquad \mathcal{P}(x_0, y) = -y_2 b_2 - c_2 y_1$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ lineáris $\Rightarrow$ ∇ lineáris $\Rightarrow$ Berwald tér.

References

[1] Z. Muzsnay, P.T. Nagy, *Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy,* Houston J. Math. **38**, (2012), 77–92.

[2] Z. Muzsnay, P.T. Nagy, *Tangent Lie algebras to the holonomy group of a Finsler manifold*, Com. Math., 19, 137-147

[3] Z. Muzsnay, P.T. Nagy, *Projectively flat Finsler manifolds with infinite dimensional holonomy*, feltételesen elfogadva, Forum Math

[4] Z. Muzsnay, P.T. Nagy, *Witt algebra and the curvature of the Heisenberg group*, elfogadva, Com. Math.

[5] Z. Muzsnay, P.T. Nagy, *The characterisation of the holonomy algebra of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature*, in preparation

[6] R. Bryant, *Finsler structures on the 2-sphere satisfying $K = 1$,* Finsler Geometry, Contemporary Mathe matics **196**, Amer. Math. Soc., Providence, (1996), 27–42.

[7] R. Bryant, *Projectively flat Finsler 2-spheres of constant curvature,* Selecta Math., New Series, **3**, (1997), 161–204.

[8] R. Bryant, *Some remarks on Finsler manifolds with constant flag curvature,* Houston J. of Math. **28**, (2002), 221–262.

[9] S. S. Chern, Z. Shen, *Riemann-Finsler geometry,*

[10] Z. Shen, *Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature*, Math. Ann. 325, (2003), 19–30.

[11] Z. Shen, *Projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature,* Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 1713–1728.