Diszkrét Lebesgue-tétel középiskolásoknak

STACHÓ L.

Ezt a kis cikket abban a reményben írom, hogy az analízis elemeinek oktatása újra teret nyerhet középiskoláinkban, és akkor az integrálszámítás alaptételének egy nagyon egyszerű, elemi eszközökkel könnyen megérthető változata nagyon jó szolgálatot tehet. Szerencsére van most is sok olyan tagozatos osztály és szakkör, amely azonnal tudja alkalmazni.
Érdemes pár szót szánnom a közvetlen motivációmra. Tavaly (2017) szeptemberben egy konferencián voltam Ploiestiben, ahol ezzel egyidőben országos középiskolai tanári kongresszus is volt. Hozzánk is eljutott a híre, hogy a következő feladat nagy visszhangot kapott: *Mennyi az* $x_n := \big[(a+a^{-n})^n - a^n\big]/n$ *sorozat határértéke* $|a|>1$ *esetén?* A válasz ugyanis $1/a$, a feladat ismertetett megoldásai azonban a $(1+b/n)^n \to e^b$, $n(c^{1/n}-1) \to \log c$ határértékek ismeretén alapultak, bár sem exp, sem log nincs explicite a végeredényben. Ezek ügyes kombinációjaként reklámozta feladatát maga a szerző is. Némi meglepetésre, még a konferencia idején sikerül a következő direkt megközelítést találnom: A binomiális tétel szerint $n>2$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n}\Big[-a^n + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(a^{-n})^k\Big] = 0 + a^{-1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k-nk}.$$

Itt $k>2$ mellett $\Big|\dfrac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k-nk}\Big| \le (n-1)^k|a^{n(k/2)-nk}| \le \Big(\dfrac{n}{|a|^{n/2}}\Big)^k$.
Tudjuk (mivel $\sqrt{|a|}>1$), hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n^2/|a|^{n/2}=0$. Ezért lehet olyan ν értéket választani, amelynél $n^2/|a|^{n/2}<1/2$ valahányszor $n>\nu$. Vagyis $n>\nu$ mellett

$$|x_n - a^{-1}| \le \sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{n}{|a|^{n/2}}\Big)^k \le \sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{1}{2n}\Big)^k \le \sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n}\Big)^k = \Big(\frac{1}{2n}\Big)^2\frac{1}{1-1/(2n)} \to 0.$$

Pólya György nevezetes mondása szerint egy feladat megoldása után célszerű feltenni a kérdést: *Mi is történt itt voltaképpen?* Ha belegondolunk, a megoldás alapja egy nagyon általános kérdés kezelése, amely egyszerűsége ellenére ritkán szerepel bevezető oktatásban. Legyenek $n=1,2,\ldots$-re $a_1^{(n)}+a_2^{(n)}+\cdots$ pozitív tagú sorok, amelyek tagonként is konvergálnak: $a_i^{(1)},a_i^{(2)},\ldots \to a_i$ minden rogzített i indexre. Mikor lehet a limeszek összege az összegek limesze:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1^{(1)} & + & a_2^{(1)} & + & a_3^{(1)} & + & \cdots & = & \sum_{i=1}^\infty a_i^{(1)} \\
a_1^{(2)} & + & a_2^{(2)} & + & a_3^{(2)} & + & \cdots & = & \sum_{i=1}^\infty a_i^{(2)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
a_1^{(n)} & + & a_2^{(n)} & + & a_3^{(n)} & + & \cdots & = & \sum_{i=1}^\infty a_i^{(n)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & = & ?
\end{array}$$

Tétel. *Ha létezik olyan* $c_1, c_2, \ldots \geq 0$ *sorozat, amelyre*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty \quad , \qquad 0 \leq a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots \leq c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \ ,$$

akkor

$$\sum_i a_i^{(n)} \to \sum_i a_i \qquad (n \to \infty).$$

Bizonyítás. Mivel $a_i = \lim_n a_i^{(n)} \leq c_i$ minden i-re, $\sum_i a_i < \infty$ és így akármilyen I indexnél felbontva

$$\begin{aligned} \Big|\sum_i a_i^{(n)} - \sum_i a_i\Big| &\leq \sum_i |a_i^{(n)} - a_i| = \sum_{i=1}^{I} |a_i^{(n)} - a_i| + \sum_{i=I+1}^{\infty} |a_i^{(n)} - a_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{I} |a_i^{(n)} - a_i| + \sum_{i=I+1}^{\infty} 2c_i \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ . \end{aligned}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Mivel $\sum_i c_i < \infty$, választható I úgy, hogy

$$\sum_{i=I+1}^{\infty} 2c_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen. Mivel pedig most $\lim_n (a_i^{(n)} - a_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, I)$, található olyan N küszöb, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} |a_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n > N) \ .$$

Ekkor $\left|\sum_i a_i^{(n)} - \sum_i a_i\right| < \varepsilon$ minden $n > N$ indexű sorra.

Megjegyzés. 1) Az abszolút-konvergens sorok bevezetése nélkül is tárgyalhatjuk az $|a_i^{(1)}|, |a_i^{(2)}|, \ldots \leq c_i$, $\sum_i c_i < \infty$ előjeles eseteket az $\left[a_i^{(n}\right]_+$ pozitív részekre ill. $\left[a_i^{(n}\right]_-$ negatív részekre alkalmazva a tételt.

2) A tétel erejéről bevezetésképpen érdemes az $a_i^{(n)} := \delta_{in} = [1 \text{ ha } i = n, \text{ máskor } 0]$ ill. $a_i^{(n)} := \left[1/i \text{ ha } 2^n < i < 2^{n+1}, \text{ egyébként } 0\right]$ ellenpéldákat tanulmányozni.

3) Instruktív pozitív példa a $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{n!} + \cdots$ sorfejtés az $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$ binomiális kifejtés alapján. Az $a_i^{(n)} = \binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i = \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-i+1)}{n}\frac{1}{i!}x^i$, $c_i := \frac{x^i}{i!}$ esetre alkalmazzuk a tételt. Lényegében ez történik Stefan Banach [2] könyvében.

Hivatkozás

[1] Stachó L., A többváltozós analízis alapjai, JATE Press, Szeged, 1994.

[2] S. Banach, Differenciál- és integrálszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.