Az $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ összegekről középiskolásoknak

STACHÓ LÁSZLÓ

A számtani sorozatokkal kapcsolatban minden középiskolás könnyen megtanulja az $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ azonosságot – gyakran azzal az ismert anekdotával együtt, hogyan találta ki ezt az iskolában Gauss még öt éves korában. A legtöbb függvénytáblázatban azt is látni: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Ennek a bizonyításáról azonban szakkörökön sem nagyon esik szó. A magasabb hatványok zárt összegképlete még félelmetesebbnek tűnik: Jakob Bernoulli 1686-ban talált egy olyan rekurziós formulát, amely $S_{k+1}(n)$-et $S_0(n), \ldots, S_{k-1}(n)$ alapján a később róla elnevezett, sok fontos alkalmazást nyert Bernoulli-számokkal állította elő [1]. Újabban a módszertan kutatói számára fontos kihívás lett az $S_k(n)$ összegek pedagógiai szempontból minél vonzóbb, elemi tárgyalása. Nemrégiben született is egy áttekintő doktori munka [2] az ismert megközelítési lehetőségekről.

Célom itt az [2, 3.fejezet]-ben bemutatott rekurziók egyikének kis módosítása, amelyhez mindössze a binomiális tétel

$$(1+n)^k = 1 + \binom{k}{1} n + \binom{k}{2} n^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} n^{k-1} + n^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} n^\ell$$

alapváltozata a szükséges előismeret, rádásul akár a $\binom{k}{\ell}$ binomiális együtthatók pontos ismerete nélkül.

A kiinduló kérdésünk: $(k+1)$-edfokú polinom-e $S_k(n)$? Azaz, ha

$$(*) \qquad P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k+1} n^{k+1},$$

akkor lehet-e

$$(1) \qquad P(0) = 0, \quad P(n+1) - P(n) = n^k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)?$$

Észrevétel: Itt szükségképpen $a_0 = 0$. Továbbá $(*)$ miatt $(n+1)^j = \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} n^\ell$, így

$$P(n+1) - P(n) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j \left[(n+1)^j - n^j\right] = \sum_{j=0}^{k+1} a_j \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} n^\ell =$$

$$= \sum_{0 \le \ell < j \le k+1} a_j \binom{j}{\ell} n^\ell = \sum_{\ell=0}^{k} \left[\sum_{j=\ell+1}^{k+1} a_j \binom{j}{\ell}\right] n^\ell \, .$$

Vagyis (1) teljesül, ha (sőt pontosan akkor, ha) itt $\ell < k+1$ esetén n^ℓ együtthatója zérus, míg n^{k+1} együtthatója $= 1$, azaz ha

$$\begin{array}{lllllr}
a_{k+1}\binom{k+1}{k} & & & & & = 1 \\
a_{k+1}\binom{k+1}{k-1} & +a_k\binom{k}{k-1} & & & & = 0 \\
a_{k+1}\binom{k+1}{k-2} & +a_k\binom{k}{k-2} & +a_{k-1}\binom{k-1}{k-2} & & & = 0 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{k+1}\binom{k+1}{0} & +a_k\binom{k}{0} & +a_{k-1}\binom{k-1}{0} & +\cdots & +a_1\binom{1}{0} & = 0 \, .
\end{array}$$

Adott k kitevő esetén az $(n+1)^k$ kifejezés kifejtésével előismeret nélkül megkaphatók a szükséges $\binom{j}{\ell}$ együtthatók, és a kapott egyenletrendszer egymás utáni visszahelyettesítéssel megoldható:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 1/\binom{k+1}{k} = 1/\binom{k+1}{1} = 1/(k+1) \\
a_k &= -a_{k+1}\binom{k+1}{k-1}/\binom{k}{k-1}\left(= -\frac{1}{2}\ \text{mindig}\right) \\
a_{k-1} &= -\left[a_{k+1}\binom{k+1}{k-2} + a_k\binom{k}{k-2}\right]/\binom{k-1}{k-2} \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad .
\end{aligned}$$

A számolás nem is unalmas teljesen elemi úton kis k (pl. $k \le 4$) esetén.

Példa: $k = 3$ **esete**. A (binomiális) együtthatókhoz $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ egymás utáni kifejtése akár Pascal-háromszög nélkül, direkt módon is könnyű. Ezután az (1)-nek megfelelő

$$(n+1)^4 = \left[a_4(n+1)^4 + a_3(n+1)^3 + a_2(n+1)^2 + a_1(n+1)\right] - \left[a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n\right]$$

egyenletben az n^ℓ $(\ell = 4, 3, 2, 1)$ hatványok együtthatóit összehasonlítva

$$\begin{aligned}
4a_4 &= 1 \\
6a_4 + 3a_3 &= 0 \\
4a_4 + 3a_3 + 2a_2 &= 0 \\
a_4 + a_3 + a_2 + a_1 &= 0\ .
\end{aligned}$$

Aki ismeri a Pascal-háromszöget, annak egyszerű képe lehet az egyenletrendszerről az első, 1-eseket tartalmazó ferde oszlop alatti háromszög jobbra forgatásával:

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & \\
a_1 \longrightarrow & & & & 1 & & 1 & & & \\
a_2 \longrightarrow & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
a_3 \longrightarrow & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
a_4 \longrightarrow & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 4 & & & \\
 & & 6 & & 3 & & \\
 & 4 & & 3 & & 2 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1\ .
\end{array}$$

Vagyis $a_4 = \underline{1/4}$, $a_3 = (-6/4)/3 = \underline{-1/2}$, $a_2 = (-4/4 + 3/2)/2 = \underline{1/4}$, $a_1 = -(1/4 - 1/2 + 1/4) = \underline{0}$. Tehát

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}\ .$$

Megjegyzés. "Közepesen nagy" $(4 \le k \le 10)$ hatványokra számítógépes kihívás lehet $S_k(n)$ formulája. Ha még komputer-algebrát is használhatunk, mátrixokkal célszerű dolgozni. Az előző jelölésekkel bevezetve az

$$\mathbf{n} := \left[n^{k+1}, n^k, \dots, n^2, n\right], \quad \mathbf{a} := \left[a_{k+1}, a_k, \dots, a_2, a_1\right], \quad \mathbf{e} := \left[1, 0, \dots, 0\right]$$
$$\mathbf{A} := \left[\binom{k+2-m}{k+1-\ell}\right]_{\ell,m=1}^{k+1} = \left[\binom{k+2-m}{\ell+1}\right]_{\ell,m=1}^{k+1}, \qquad \text{ahol } \binom{j}{\ell} := 0 \ (j < \ell)$$

k-vektorokat ill $(k \times k)$-mátrixot (ami tehát alsó-trianguláris), fennáll

$$P(n+1)-P(n) = n^k \ (n = 1, 2, \dots) \iff \mathbf{nAa}^{\mathrm{T}} = \mathbf{ne}^{\mathrm{T}} \iff \mathbf{Aa}^{\mathrm{T}} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \iff \mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}.$$

Vagyis $\quad S_k(n) = \sum\limits_{m=1}^{n} m^k = \mathbf{na}^{\mathrm{T}} = \mathbf{n}\Big[\mathbf{A}^{-1} \text{ 1-ső oszlopa}\Big].$

Hivatkozások

[1] Jacob Bernoulli, Ars Coniectandi, Opus posthumus, Basel (1713);
in: Jacob Bernoulli, Opera Omina, I. kötet, Genf (1744);
http://www.omikk.bme.hu/muzealis/galeria.pl?prefix=85.058.

[2] Molnár István, *Pozitív egész kitevőjű hatványösszegekről. Történeti és módszertani áttekintés*, Doktori értekezés, SZTE (2011), http://doktori.bibl.u-szeged.hu/792.