A 3. ábrán látszik, hogy $IG = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 3p\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-6p)$. Ha az 5. ábrán $SMN = \beta$, akkor $HIG = 45° - \beta$. Az e egyenes meredekségéből következően $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$, alkalmazzuk a trigonometriából ismert addíciós tételek egyikét, kapjuk, hogy $\operatorname{tg}(HIG\sphericalangle) = \frac{1}{3}$. Ekkor $GH = \frac{IG}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}(1-6p)$, és $t_{GHI} = \frac{(1-6p)^2}{48}$.

Láttuk tehát, hogy mindhárom háromszög területe egyenlő, mégpedig $\frac{(1-6p)^2}{48}$. Ebből következően $t = \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{(1-6p)^2}{48} = \frac{1-(1-6p)^2}{8}$, és a keresett valószínűség (1) alapján $Q = 1 - (1-6p)^2$.

A kapott eredményt néhány konkrét esetben mutatja a következő táblázat:

p	Q
0,01	0,12
0,02	0,23
0,07	0,66
0,1	0,84
0,15	0,99

Az itt szereplő adatok már elegendőek voltak arra, hogy a kiindulásnak választott gyakorlati tapasztalatot elemezni tudjuk.

Az eredményünkből látható, hogy ha $p = \frac{1}{6}$, akkor a valószínűség 1. Ezen eredmény alapján a gyerekek megfogalmazták a következő tételt:

Bármely háromszögben van két olyan oldal, amelyek különbségének abszolút értéke nem nagyobb a kerület hatodrészénél. Ezután természetesen e tétel elemi úton történő igazolására is sort keríthetünk...

Tarcsay Tamás JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziuma 6724 Szeged Szentháromság u. 2.

A Fibonacci-sorozat mint a lineáris algebra reklámja

STACHÓ LÁSZLÓ

A Műhelysarok 1993. júniusi számában Cofman Judit cikkének egyik fő témája az

$$f_1 := 1\,,\ f_2 := 1\,, \ldots,\ f_{n+1} := f_{n-1} + f_n\,, \ldots$$

Fibonacci-sorozat és a síkbeli fraktálok kapcsolata. Mint ő maga is megjegyezte a szegedi látogatásakor tartott előadásában, ezek mögött nem kis mértékben az a lineáris algebrai tény áll, hogy az $f_0 := 0$ taggal bővítve a sorozatot,

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} = L^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \text{ahol} \qquad L := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen az L mátrix főtengelytranszformáltját használva természetes módon juthatunk az

$$(*) \qquad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

rekurzió-mentes előállításhoz. Csakhogy ehhez szinte egy egész félévnyi lineáris algebra előadás anyaga szükséges, mégha 2 dimenzióban is.

Ebben a rövid cikkben azt szeretném megmutatni, hogy ha „bátran" egy még nagyobb térbe lépünk ki, akkor a nemrekurzív formula tárgyalása annyira leegyszerűsödik, hogy nem igényel egyáltalán lineáris algebrai előismereteket. Sőt, talán egyenesen reklámja lehet a lineáris algebrának.

Legyen $\mathbf{S}$ az $(x_1, x_2, \ldots)$ számsorozatok tere (halmaza). Tekintsük ezen a

$$T : (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

eltolást. Alkalmazzuk ezt kétszer az $\mathbf{f}$ Fibonacci-sorozatra.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots) \\ T\mathbf{f} &= (0, f_1, f_2, f_3, \ldots) \\ T^2\mathbf{f} &= (0, 0, f_1, f_2, \ldots). \end{aligned}$$

Az összeadást és a kivonást a sorozatokon tagonként végezve az $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ összefüggés szerint

$$\begin{aligned} T^2\mathbf{f} + T\mathbf{f} &= (0, f_1, f_1 + f_2, f_2 + f_3, \ldots) = (0, f_1, f_3, f_4, \ldots) \\ &= (0, f_2, f_3, f_4, \ldots) \\ &= \mathbf{f} - (1, 0, 0, 0, \ldots), \end{aligned}$$

hiszen $f_1 = f_2 = 1$. A T, T^2 eltolások $\mathbf{S} \to \mathbf{S}$ függvények. Mivel pedig S-en már értelmeztük az összeadást, természetes módon értelmezhetjük az ilyen függvények összegét, különbségét is. Ha tehát minden λ szám esetén használjuk a

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$$

tagonkénti szorzást, akkor a $T^2\mathbf{f} + T\mathbf{f} = \mathbf{f} - (1, 0, 0, \ldots)$ relációt a

$$(T^2 + T - 1)\mathbf{f} = T^2\mathbf{f} + T\mathbf{f} - \mathbf{f} = (1, 0, 0, \ldots)$$

polinomiális formába írhatjuk.

Észrevétel: A $\lambda - T : \mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x} - T\mathbf{x}$ és $\mu - T : \mathbf{x} \mapsto \mu\mathbf{x} - T\mathbf{x}$ leképezések összetétele

$$(\lambda - T) \circ (\mu - T) = T^2 - (\lambda + \mu)T + \lambda\mu \, .$$

Mint a számok szorzásánál! Valóban,

$$\begin{aligned}
(\lambda - T)\circ(\mu - T)(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= \\
&= (\lambda - T)(\mu x_1, \mu x_2 - x_1, \mu x_3 - x_2, \ldots) \\
&= (\lambda\mu x_1, \lambda(\mu x_2 - x_1) - \mu x_1, \lambda(\mu x_3 - x_2) - (\mu x_2 - x_1), \ldots) \\
&= (\lambda\mu x_1, -(\lambda+\mu)x_1 + \lambda\mu x_2, x_1 - (\lambda+\mu)x_2 + \lambda\mu x_3, \ldots) \\
&= (0, 0, x_1, \ldots) - (\lambda+\mu)(0, x_1, x_2, \ldots) + \lambda\mu(x_1, x_2, x_3, \ldots).
\end{aligned}$$

Ha tehát a $t^2 + t - 1$ polinom gyökei

$$\alpha := \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \, , \quad \beta := \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

akkor

$$(\alpha - T) \circ (\beta - T)\mathbf{f} = (1, 0, 0, \ldots) \, .$$

Észrevétel: $\lambda \neq 0$ esetén a $\lambda - T$ művelet invertálható (**S**-en).

Bizonyítás. A $(\lambda - T)\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenlet jelentése tagonkénti kiírásban

$$(\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \, .$$

Ez **x**-re lépésenként egyértelműen megoldható, ha $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= y_1 \\ \lambda x_2 - x_1 &= y_2 \\ \lambda x_3 - x_2 &= y_3 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \lambda^{-1} y_1 \\ x_2 &= \lambda^{-1}(y_2 + x_1) = \lambda^{-1} y_2 + \lambda^{-2} y_1 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda^{-1} y_n + \lambda^{-2} y_{n-1} + \cdots + \lambda^{-n} y_1 \,. \end{aligned}$$

Speciálisan

$$(\lambda - T)^{-1}(1, 0, 0, \ldots) = (\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \lambda^{-3}, \ldots)\,.$$

Most rögtön megkísérelhetjük a Fibonacci-sorozat tagjait az

$$\mathbf{f} = (\beta - T)^{-1}(\alpha - T)^{-1}(1, 0, 0, \ldots) = (\beta - T)^{-1}(\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \ldots)$$

összefüggés alapján kiszámítani. Innen ($y_n := \alpha^{-n}$ és $\lambda := \beta$ mellett) felhasználva, hogy $\alpha\beta = -1$:

$$\begin{aligned} f_n &= \beta^{-1}\alpha^{-n} + \beta^{-2}\alpha^{-n+1} + \cdots + \beta^{-n}\alpha^{-1} \\ &= \beta^{-1}\alpha^{-1}\frac{\beta^{-n} - \alpha^{-n}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}} = \frac{(-\alpha)^{-n} - (-\beta)^{-n}}{\beta - \alpha}\,. \end{aligned}$$

Az utóbbi éppen a $(*)$ formula jobb oldala.

Stachó László, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.