ZÁRT BANACH TÉR EGYSÉGGÖMBÖK BIHOLOMORF AUTOMORFIZMUSAINAK FIXPONTJAIRÓL

Kandidátusi disszertáció

STACHÓ LÁSZLÓ

Témavezető :

E. VESENTINI
Scuola Normale Superiore
Pisa

JATE Bolyai Intézet

SZEGED 1980

T A R T A L O M

oldal

Bevezetés

A végtelen dimenziós Banach terek közti holomorf leképezések elméletének kiépitése a korai '20-as években indult meg Fréchet [9] és Gâteaux [11] munkái nyomán az akkor körvonalazódni kezdő absztrakt harmonikus analizis ösztönzésére [52] (részletes történeti megjegyzések ld. [19]). A.E. Taylor [42] és M. Zorn [53] vizsgálatai a '40-es évek közepére tisztázták a holomorfia Fréchet- és Gâteaux-féle definicióinak ekvivalenciáját a homogén polinomok egyenletesen konvergens sorával való lokális előállithatósággal egy nem tul erős feltevés (a leképezés lokális korlátossága) mellett. Ez a tény vezetett ahhoz a sejtéshez, hogy a véges dimenziós sokaságok globális komplex analizisének mély és elegáns geometriai módszerei [4], [34], [29] nagyrészt (de legalábbis a szimmetrikus korlátos tartományok esetében) átvihetők végtelen dimenzióra is. Az első igazán releváns pozitiv eredmények ebben az irányban azonban először csak a '70-es években jelentkeztek, mindenek előtt a korlátos Banach térbeli tartományok tanulmányozásában [6], [14], [40], [12], [16], [15] ill. egyes topologikus algebrák (pl. C*-, J*-algebrák) elméletével kapcsolatban [15], [44]. Különösen erős akadálynak bizonyult a Banach-sokaságok geometriai elmélete számára az automorfizmus csoportjuk tanulmányozásánál a véges dimenziós Lie-algebrák elmélete leghatásosabb eredményeinek át nem vihetősége végtelen dimenzióra ill. a véges és végtelen dimenziós holomorf leképezések fixpontjai létezése között fennálló látványos különbség. Ezen a vonalon az áttörést a korlátos tartományokban teljes holomorf vektormezők Lie-algebrájával [31], [24], [26], [27] ill. egyes automorfizmus-invariáns belső távolságok pluriszubharmonicitásával [45], [46] kapcsolatos véges dimenzióban is teljesen uj módszerek hozták meg.

Ez a dolgozat összegzése a Banach terek zárt egységgömbje biholomorf automorfizmusainak fixpontjaival kapcsolatban kiindult kutatásaimnak [35], [36], [37], [38], amelyeket a pisai Scuola Normale Superiore-en E. Vesentini professzor vezetése alatt az 1977/78 és '78/79-es akadémiai években folytattam.

A biholomorf automorfizmusok fixpont körüli sorfejtése a véges dimenziós komplex sokaságok elméletének kiépitésekor fontos szerepet játszott pl. Carathéodory egyes munkáiban [1], [2]. Nemrég Vesentininek [47] sikerült több ilyen eredményt végtelen dimenzióra általánositani. Kaup és Upmeier [27] egy kiterjesztési tétele pedig lehetőséget ad arra, hogy a sorfejtést az egységgömb határán fekvő fixpont esetén is értelmezhessük. Ezek az eredmények is motiválják a probléma önmagában való érdekességén tul a biholomorf automorfizmusokkal kapcsolatos fixponttételek keresését.

1971-ben Hayden és Suffridge [16] bebizonyitották, hogy egy Hilbert tér nyitott egységgömbjének bármely biholomorf automorfizmusa kiterjeszthető folytonosan a zárt egységgömbre és a kiterjesztett leképezésnek mindig van fixpontja. Ez az eredmény éles kontrasztban áll Kakutani [22] immár klasszikus példájával végtelen dimenziós Hilbert tér zárt egységgömbjének C^∞-sima fixpont nélküli topologikus automorfizmusára. 1976-ban Kaup és Upmeier megmutatták, hogy általában is, ha $E, B(E)$ és Aut $B(E)$ egy Banach teret, annak nyitott egységgömbjét ill. a nyitott egységgömb biholomorf automorfizmusainak csoportját jelölik, akkor minden

$F\in$ Aut $B(E)$ holomorf módon folytatható a $\bar{B}(E)$ ($\equiv B(E)$ lezártja E-ben) egy nyitott környezetére. Innen természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy — Aut $\bar{B}(E)$-vel jelölve az Aut $B(E)$ elemeinek folytonos kiterjesztettjeit $\bar{B}(E)$-re — van-e tetszőleges Aut $B(E)$ -beli leképezésnek fixpontja. Általános tipusu holomorf leképezések fixpontjai létezésével kapcsolatos problémákat több cikk is tárgyalt már az irodalomban. Ebben a kontextusban két eredmény különösen figyelemre méltó: az egyik — az Earl-Hamilton tétel [6] — egy kontrakciós elv, amely garantálja többek közt, hogy $0<\lambda<1$ esetén bármely folytonos $\bar{B}(E)\longrightarrow\lambda\bar{B}(E)$ leképezés rendelkezik fixponttal, amely holomorf $B(E)$ fölött, a másik — Hayden és Suffridge tétele [17] — állitása pedig az, hogy ha az E Banach tér reflexiv és szeparábilis továbbá F egy folytonos és $B(E)$ fölött holomorf $\bar{B}(E)\longrightarrow\bar{B}(E)$ leképezés, akkor majdnem minden $\vartheta\in\mathbb{R}$ mellett az $e^{i\vartheta}F$ leképezésnek van fixpontja. A biholomorf automorfizmusok fixpontjainak problémaköre, úgy tünik, ettől eltérő jellegü. Ennek heurisztikus magyarázata elsősorban az, hogy a biholomorf automorfizmusok rendkivül szorosan kötődnek az őket hordozó sokaság geometriai strukturájához. (Pl. Banach térbeli korlátos tartományok csak igen erős szimmetriatulajdonságok mellett engednek meg nem-lineáris biholomorf automorfizmust.) Ennek megfelelően a dolgozatban is lényeges funkcióval rendelkeznek a topológiai meggondolások mellett a globális sokaságelméletből kölcsönzött módszerek.

Bár az imént idézett általános fixponttételek nem voltak közvetlenül alkalmazhatók annak a sejtésnek a vizsgálatára, amely szerint tetszőleges E Banach tér esetén az Aut $\bar{B}(E)$ csoport minden tagja rendelkezik fixponttal, közvetve jó segitséget nyujtottak a megfelelő tértipus megtalálásához, amelyben ellenpéldát konstruálhatunk, és amely különösen kritikus módon viselkedik a zárt egységgömb biholomorf automorfizmusai fixpontjai létezése szempontjából:

A nyitó tételben megmutatjuk, hogy azok a kompakt Ω topologikus terek, amelyekre $\mathrm{Aut}\,\bar{B}(C(\Omega))$ minden elemének van fixpontja szükségképpen F-terek (def. ld. 9 old., továbbiak [10]), ami automatikusan ellenpéldák egy széles osztályát szolgáltatja. Az első két fejezetben ennek a feltételnek az elegendőségét vesszük vizsgálat alá. Ez a probléma a függvénygyürük elméletének [10] szempontjain tul a legáltalánosabb tipusú Banach terek zárt egységgömb-automorfizmusai fixpontjainak vizsgálata számára is érdekességgel bir: Az irodalomban előforduló példák nem-szimmetrikus tartományok biholomorf automorfizmuscsoportjának az explicit leirására (pl. [43], [41], [49], [27], [45], [46], [36], [37]) azt sejtetik, hogy ha valamely $F \in \mathrm{Aut}\,\bar{B}(E)$ -nek van fixpontja, akkor F-nek van fixpontja a $B_o \equiv \bar{B}(E) \cap E_o$ gömbön is, ahol E_o a $\{G(0) : G \in \mathrm{Aut}\,B(E)\}$ alakzat által generált altér E -ben. [27] ill. [49]-ben ki van mutatva, hogy a B_o szimmetrikus tartomány. A véges dimenziós szimmetrikus tartományok Cartan-féle [3] leirásából az sejthető, hogy a B_o alakzat $J*$-algebrák (def. ld. [7], [8], [44]) egy M-háló tipusú direkt összege (def. ld. [33]), az egységelemes M-hálók pedig egy klasszikus reprezentációtétel [33] szerint azonosithatók a kompakt halmazokon folytonos függvények tereivel.

A 2. Fejezet konkluziója az, hogy sajnálatos módon az F-tulajdonsága egy kompakt Ω térnek nem elegendő általában ahhoz, hogy az $\mathrm{Aut}\,\bar{B}(C(\Omega))$ minden elemének legyen fixpontja, és ebben a munkában nem is jutunk el a kérdés végleges megoldásához. Ezzel szemben az ellenpéldák gondolatmeneteit minden esetben sikerül pontos pozitiv eredményekké továbbfejlesztenünk: Az 1. Fejezet záró tétele a topologikus F-terek egy jellemzését adja tisztán a tér korlátos folytonos függvényei zárt egységgömbjén értelmezhető biholomorf automorfizmusok fixpontjainak a segitségével. A bizonyitás során kiderül egy önmagában is érdekes elemien megfogalmazható topológiai tétel: Egy kompakt F-tér pontonként periodikus homeomorfizmusai önmagára szükségképpen periodikusak.* A 2. Fejezet fő tétele pedig karakterizálja mindazokat a preduállal rendelkező M-hálókat, amelyek zárt egységgömbje csak fixpontos biholomorf automorfizmusokat enged meg.

Kakutani hires L-háló reprezentációtételének (ld. [33]) egyszerü következménye, hogy minden preduálos M-háló reprezentálható $L^{\infty}(\mu)$ térként alkalmas μ mérték mellett (v.ö. [32]). Azaz a 2. Fejezetben megkaptuk a teljes leirását mindazoknak az L^{∞}-tipusu E tereknek, ahol $\mathrm{Aut}\,\bar{B}(E)$ összes tagjának van fixpontja. Másrészről, a Kobayashi és Carathéodory távolságok lokálisan konvex topologikus vektorterek résztartományain való viselkedésére vonatkozó mély eredményeinek következményeképpen E. Vesentini [45] megoldotta a duális problémát, bebizonyitva, hogy egy (legalább 2 dimenziós) L^{1}-tér egységgömbje biholomorf automorfizmusai mind lineárisak. Mint azt [45] megjegyzi, ugyanez az eredmény megkapható Suffridge [40] szubordinációs elvéből is. Ezek az észrevételek megerősitették azt a sejtést, hogy az egységgömb biholomorf automorfizmusai linearitás szempontjából ugyanugy viselkednek a 2-nél több dimenziós L^{p}-tereknél mint a 2 dimenziós speciális esetben, amelyet már Thullen [43] klasszikus tétele kimeritően leir, azaz $\mathrm{Aut}\,\bar{B}(L^{p}(\mu))$ összes elemei lineárisak akkor és csak akkor, ha $\dim L^{p}(\mu) > 2$ és $p \neq 2,\infty$. Azonban mind Vesentini

---

* Az eredeti bizonyitás [35] nem-elemi. Nemrégen Joó I. elemi bizonyitást talált [21].

módszere mind Suffridge szubordinációs elve alkalmazhatatlan direkt módon $p\neq 1$ -nél. (Megjegyzések ezzel kapcsolatban [37, 5.old.])
A 3. Fejezetben ezt a problémát egy uj uton közelitjük meg, amely lehetővé teszi a sejtés bizonyitásának leredukálását egy 2 dimenziós meggondolásra. Az eljárás alapjául az a Kaup és Upmeier [27] által bizonyitott tétel szolgál (amely a speciális végtelen dimenziós Lie csoportokkal kapcsolatos egyik legszebb eddig elért eredmény), hogy tetszőleges E Banach tér esetén az $\mathrm{Aut}_o B(E) \equiv$
$\equiv$ {az $id_{B(E)}$ összefüggő komponense $\mathrm{Aut}\, B(E)$ -ben} részcsoport minden F eleme felirható $F = \exp(v)$ alakban, ahol v egy alkalmas (F-től függő) $B(E)$ -ben teljes másodfoku polinomiális vektormező.

A [45] és [36] cikkekben a tér vektorháló szerkezete (ill. speciálisan háló-ortogonális függvénypárok egy elegendően tág osztályának a jelenléte) játszotta az egyik fő szerepet az L^p-terek kezelésében. A 4. Fejezet ennek a jelenségnek a mélyebb geometriai hátterét világitja meg. A fejezet fő tétele egy projekciós elv, amely elegendő feltételt ad arra, hogy egy komplex Banach sokaságban teljes holomorf vektormező holomorf projiciáltja egy alsokaság érintőnyalábjába mikor teljes a projekció képsokaságában. A projekciós elv következménye, hogy ha E egy Banach tér, v egy holomorf $B(E)$ -ben teljes vektormező és P egy kontraktiv $E \to E$ lineáris projekció, akkor a Pv mező teljes a $B(PE)$ gömbben.* Ez a tétel lehetővé teszi számos esetben az $\mathrm{Aut}_o B(E)$

A jelen disszertáció alapjául szolgáló [37]-ben más technikával — peremes sokaság módszerekkel — az utóbbi tételnek az egységgömb helyett körszerü csillag alakú korlátos tartományra való általánositottja van bizonyitva. A körszerü csillag alakú korlátos Banach térbeli tartományok vizsgálatát az teszi aktuálissá, hogy csoport rekonstruálását illetőleg több fontos strukturális tulajdonságának megállapitását az egységgömb néhány véges dimenziós altérmetszete biholomorf automorfizmuscsoportjából. Az 5. Fejezet a projekciós elv néhány tipikus alkalmazását mutatja be olyan esetekben, amelyekre az eddig publikált módszerek nem elkalmazhatók: Csak nemrégiben sikerült több parciális megoldás [34],[28], [12],[14] létezése ellenére T. Franzoninak [7] az $\mathcal{L}(H_1,H_2) \equiv$ $\equiv$ {korlátos lineáris $H_1 \longrightarrow H_2$ operátorok} terek egységgömbje biholomorf automorfizmuscsoportjának teljesen pontos leirása tetszőleges H_1,H_2 Hilbert terek esetén. (Egyben a fixpont-probléma is tárgyalva van [7]-ben). A fő nehézséget a lineáris automorfizmusok behatárolása jelentette, amelynek megoldásához [7]-ben absztrakt J-algebrai meggondolások vezettek. Mint látni fogjuk, a projekciós elv segitségével elérhető (jóval rövidebben, mint [7]-ben n=2 -re*) a $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ ($\equiv$ {folytonos n-lineáris $H_1 \times \cdots \times H_n$ funkcionálok}) terek biholomorf automorfizmuscsoportjának pontos leirása. Ez utóbbiak n=3 -tól kezdve nem láthatók el J*-struktúrával (triviális esetektől eltekintve), mivel az egységgömb ilyen-

---

Vigué [50] (v.ö. még [25]) egy tétele szerint minden szimmetrikus komplex Banach-sokaság biholomorf módon ekvivalens egy alkalmas ilyen tipusu tartománnyal. Ahhoz azonban, hogy a [37]-beli emlitett változatát a projekciós elvnek az itteni sokaságelméleti projekciós elvből levezethessük, — ugy tünik — a biholomorf automorfizmus-invariáns távolságok elméletének lényeges továbbfejlesztése szükséges csillagszerü tartományokon. Mindazonáltal, ha a tartomány határa C^1-sima, a projekciós elv ebben az irányban könnyen igazolható peremes sokaság módszerrel.

*Jól-ismert, hogy $\mathcal{L}(H_1,H_2)$ izometrikusan izomorf $H_1 \otimes H_2$ -vel.

kor már csak lineáris automorfizmusokat enged meg. A redukció kulcsa az a tény, hogy véges dimenziós $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ mellett az egységgömb kompaktsága nagyban leegyszerüsiti annak geometriáját.

Egy másik tipikus alkalmazási terület, amelyet a dolgozatban érintünk, a minimális ideáljaik által normában generált atomos Banach hálók (a továbbiakban minimális atomos B-hálók, def. ld. [33]. Kissé általánosabb tipusu Banach hálókkal kapcsolatos meggondolásokat is tartalmaz [37].). A véges dimenziós minimális atomos B-hálók egységgömbjei éppen a korlátos konvex Reinhardt tartományok. 1974-ben Sunada [41] pontos strukturatételt adott a véges dimenziós korlátos Reinhardt tartományok biholomorf automorfizmuscsoportjának egységkomponenséről. Bizonyitásai azonban lényegesen támaszkodtak a véges dimenziós félig-egyszerü Lie-algebrák Cartan-féle elméletére, igy nem voltak ∞ dimenzióra átvihetők (v.ö. [23]). A projekciós elv lehetőséget ad arra, hogy a Sunada-tétel 2 dimenziós speciális esete alapján (amely már jóval régebben ismert volt [43]) egy egyszerü algebrai és topológiai jellegü összeillesztési eljárás segitségével megkapjuk az Aut B(E) csoport leirását tetszőleges E minimális atomos B-háló esetén. A projekciós elvvel még a 2 dimenziós eset tárgyalása is leegyszerüsithető. (A dolgozatban ezt konvex tartomány mellett be is mutatjuk. Az általános eset véges dimenzióban nem különbözik lényegesen a konvex tartományokétól* — csak a felmerülő parciális differenciálegyenleteket kell általánosabban értelmezni.) Végül a biholomorf automorfizmuscsoportra nyert strukturatétel a Tyihonov-Schauder fixponttételen (ld. [5]) keresztül elvezet a kiindulási fixpont probléma teljes megoldásához a minimális atomos B-hálók osztályán.

Alapvető jelölések és definiciók

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ rendre a természetes-, egész-, racionális-, valós- ill. komplex számok halmazát jelölik. Δ a komplex számsik nyitott egységkörlapja. Egy absztrakt S halmaz karakterisztikus függvénye 1_S (azaz $1_S(x)=1$ ha $x\in S$ és $1_S(x)=0$ ha $x\notin S$, a pontos értelmezési tartomány mindig világos lesz a kontextusból). Egyes formulák áttekinthetősége érdekében leképezéseket a következő szimbólumokkal definiálunk: $F \equiv [X\ni x\mapsto \psi(x)]$ jelenti azt az F leképezést, amelynek értelmezési tartománya X és az $x\in X$ helyen felvett értéke $\psi(x)$. Ha az értelmezési tartomány nyilvánvaló, egyszerüen csak $F \equiv [x\mapsto\psi(x)]$ -et irunk vagy az $x\mapsto\psi(x)$ leképezésről beszélünk.

Ha Ω egy topologikus tér és $H\subset\Omega$, akkor $\bar{H},H^{o},\partial H$ jelenti a H halmaz lezártját, belsejét ill. határát (ha szükséges hangsulyozni, hogy mindezeket egy τ topológiára vonatkoztatjuk, $\bar{H}^{\tau},H^{o\tau},\partial_{\tau}H$ -t irunk). $C(\Omega) \equiv \{$folytonos $\Omega\to\mathbb{C}$ függvények$\}$ és $C_b(\Omega)$ jelöli a korlátos folytonos $\Omega\to\mathbb{C}$ függvények Banach terét a szokásos sup-normával. Kompakt Ω esetén egyszerüen $C(\Omega)$-t irunk $C_b(\Omega)$ helyett. Az Ω -t önmagára képező homeomorfizmusokat az Ω tér topologikus automorfizmusainak nevezzük. Azt mondjuk, hogy Ω egy F-tér, ha tetszőleges kozéró-tipusu (azaz valamely $g\in C(\Omega)$ mellett $G = \{x\in\Omega\colon f(x)\neq 0\}$ alakban előálló) nyitott $G\subset\Omega$ halmaz esetén minden $f\in C_b(G)$ függvény folytonosan folytatható az egész Ω térre (v.ö. [10]).

Ha $\mu_1,\mu_2,\dots$ pozitiv mértékek rendre az $X_1,X_2,\dots$ halmazokon és $\rho_1,\rho_2,\dots$ egy pozitiv számsorozat, akkor $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\rho_n\mu_n$ a következőképpen definiált μ mértéket jelenti az $X \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\times\{n\}$

tartó halmazon: egy $Y \subset X$ halmaz μ-mérhető akkor és csak akkor, ha létezik $Y_1 \subset X_1, Y_2 \subset X_2, \dots$ úgy, hogy Y_n μ-mérhető minden $n \in \mathbb{N}$ -re és $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \times \{n\}$; ekkor $\mu(Y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \mu_n(Y_n)$.

Meggondolásainkban többször felhasználjuk a Möbius transzformációkat, azaz az $\mathrm{Aut}\,\Delta$ $(= \mathrm{Aut}\{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta| \le 1\})$ leképezéscsoport elemeit. Jól-ismert, hogy $\mathrm{Aut}\,\bar{\Delta} = \{[\bar{\Delta} \ni \zeta \mapsto k\frac{\zeta+u}{1+u\zeta} : |k|=1>|u|\}$. $\mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$ az egyenletes konvergencia topológiával ellátva egy összefüggő csoport és a $(k,u) \longmapsto [\zeta \mapsto k\frac{\zeta+u}{1+u\xi}]$ leképezés egy homeomorfizmus $\partial\Delta \times \Delta$ és $\mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$ között.

A dolgozatban végig komplex Banach terekkel foglalkozunk ennek esetenkénti kihangsulyozása nélkül. Ha E egy Banach tér, a (topologikus) duálisát E^*-gal fogjuk jelölni. Ha $f \in E$ és $\Phi \in E^*$, akkor szokásosan $\langle f,\Phi\rangle$ -t irunk $\Phi(f)$ helyett. Konfuzió veszélye nélkül a $\| \;\|$ jelet használjuk a szövegben előforduló összes Banach tér normája számára (igy pl. $\|\Phi\| \equiv \sup\{|\langle f,\Phi\rangle| : \|f\|=1\}$ a duális norma E^* -on) ill. $\| \;\|_E$ -t irunk, ha szükséges. Ettől a konvenciótól csak egy esetben térünk el: ha f egy (komplex értékü) függvény, a $\|f\|_{\ell^2}$ szimbólum jelentése $\sum_{x \in \mathrm{dom}\, f} |f(x)|^2$.

A tér nyitott egységgömbjének jele $B(E)$, a lezártjáé $\bar{B}(E)$. Ha $E_1,E_2,\dots,E_n$ Banach terek, $\mathcal{L}(E_1,E_2) \equiv \{$korlátos lineáris $E_1 \to E_2$ operátorok$\}$ és $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \equiv \{ E_1 \times \cdots \times E_n$ -en folytonos n-lineáris funkcionálok $\}$ (itt $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$ -nél $\|A\| \equiv \sup\{\|Af\| : \|f\|=1\}$ ill. $F \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ -nél $\|F\| \equiv \sup\{|F(f_1,\dots,f_n)| : \|f_1\| = \dots = \|f_n\| = 1\}$). Ha $\mathcal{F} \equiv \{ E_i : i \in I \}$ az E Banach tér altereinek egy családja, azt mondjuk, hogy E az $\mathcal{F}$ család c_0-direkt összege (irásban $\bigoplus_{i \in I}^{c_0} E_i = E$), hogyha $\|f_1+\dots+f_n\| = \max\{\|f_1\|,\dots,\|f_n\|\}$ valahányszor $f_1 \in E_{i_1},\dots,f_n \in E_{i_n}$ ($i_1,\dots,i_n$ páronként különböző indexek) és az E teret topologikusan kifeszitik az $\mathcal{F}$ -beli véges összegek. Ha E egy Banach háló, a pozitiv kupját ill. a sup és inf operációit rendre $E_+, \vee, \wedge$ jelölik. Az E egy ideálja alatt annak olyan I alterét értjük, amelynél $f \in I$, $|g| \leq |f|$ esetén mindig $g \in I$; az E projekciós ideáljai* pedig azok az L ideálok, amelyekre található L' ideál ugy, hogy $L + L' = E$, $E \cap L' = \{0\}$, ekkor az L' komplementer ideál választása szükségképpen egyértelmü; az E tér projekcióját az L' altéren keresztül L-re az L-re való ideál-projekciónak nevezzük.

Ha M, M' komplex Banach sokaságok, D nyitott $\subset M$, $x \in D$ és F egy $D \to M'$ leképezés, akkor $F'(x)$ jelöli F-nek az x-beli (Fréchet-)deriváltját ha létezik. Az F leképezés definició szerint holomorf, ha minden $x \in D$-ben létezik $F'(x)$. Ha $S \subset M$ és S^{O} sürü az S-ben, akkor $\mathrm{Aut}\, S$ jelenti az S alakzat azon önmagára való homeomorfizmusainak a halmazát, amelyek az inverzükkel együtt holomorfak S^{O} fölött. A dolgozat nagy részében azt a speciális esetet fogjuk tekinteni, amelyben az M sokaság egyszerüen egy E Banach tér, S pedig egy korlátos körszerü (azaz $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$ $e^{i\vartheta} S = S$) alakzat E-ben. Ekkor $\mathrm{Aut}\, S$-et az S-en egyenletes konvergencia topológiájával topologizáljuk és $\mathrm{Aut}_{O} S$-et irunk az identitás leképezés (id_S) összefüggő komponense számára. Ha $x, y \in M$, a köztük levő (az M sokasághoz asszociált) Carathéodory-féle távolság $d_M(x,y) \equiv \sup\{\mathrm{areath}|F(y)| : F$ holomorf $M \to \Delta$ leképezés, $F(x) = 0\}$. (Továbbiak ld. [19], [48], [25], [27]).

---

* angolul projection band (v.ö. [33, 61.old. 2.7 Proposition])

1. Fejezet

$\overline{B}(C_b(\Omega))$ automorfizmusainak fixpontjai és az F-tulajdonság

Geometriai funkcionálanalizisbeli meggondolások (v.ö. [17]) arra a sejtésre vezettek, hogy még olyan Banach tér is létezhet, amelynek a zárt egységgömbje megenged fixpont nélküli biholomorf automorfizmust. Az egyetlen nehézséget csak az alkalmas tértipus megtalálása jelentette ennek belátásához. Egy különösen egyszerü és instruktiv példa ugyanis pl. a következő [35]:

A $\overline{B}(C(\overline{\Delta}))$ fölött definiált

$$(1) \qquad F : f \longmapsto \left[\overline{\Delta} \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)+\zeta/2}{1+\overline{\zeta}f(\zeta)/2}\right]$$

leképezésről könnyen verifikálható, hogy egy biholomorf automorfizmusa $\overline{B}(C(\overline{\Delta}))$ -nak; ugyanakkor az $Ff_o = f_o$ egyenletből $f_o(\zeta)^2 = \zeta/\overline{\zeta}$ adódik, ami kizárja az f_o függvény folytonosságát a 0 $(\in \overline{\Delta})$ helyen.

Az (1) konstrukciója pozitiv eredményeket igérő megközelitését teszi lehetővé az alábbi — mint a Bevezetésben vázoltuk, az általános fixpontprobléma szempontjábólsem érdektelen — kérdésnek: Milyen topologikus tulajdonságokkal jellemezhetők azok az Ω terek, amelyeknél $\mathrm{Aut}\,\overline{B}(C_b(\Omega))$ minden tagjának van fixpontja?

1.Propozició. Legyen Ω egy topologikus tér. Ha minden $F \in \mathrm{Aut}\,\overline{B}(C_b(\Omega))$ -nak van fixpontja, akkor Ω egy F-tér.

Bizonyitás. Legyen $t \in C(\Omega)$ tetszőlegesen rögzitve, legyen $G \equiv \{x \in \Omega : t(x) \neq 0\}$ és tekintsünk egy tetszőleges $g \in C_b(G)$ függvényt. Meg kell mutatnunk, hogy g folytonosan kiterjeszthető Ω -ra. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $|g| < \frac{1}{2}$ és range $t \subset [0,\pi/2]$ (tehát $G = \{x : t(x) > 0\}$). Definiáljuk a $k : \Omega \longrightarrow \partial\Delta$ és $u : \Omega \longrightarrow \frac{1}{2}\Delta$ függvényeket a következőképpen :

$k(x) \equiv e^{it(x)}$ $(x \in \Omega)$ ill. $u(x) \equiv \dfrac{2ig(x)e^{-t(x)/2}}{1+|g(x)|^2} \sin\dfrac{t(x)}{2}$ $(x \in G)$ és

és $u(x) \equiv 0$ $(x \notin G)$. Vegyük észre, hogy az $N(x) \equiv [\bar{\Delta} \ni \zeta \mapsto k(x)\dfrac{\zeta+u(x)}{1+\overline{u(x)}\zeta}]$ leképezések rögzitett $x \in \Omega$ esetén mind Möbius-transzformációk, és hogy az $N : \Omega \to \mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$ leképezés folytonos (mivel a k ill. u függvények szintén folytonosak). Vizsgáljuk meg ezután az $F(f) \equiv$ $\equiv [x \mapsto N(x)f(x)]$ által definiált F leképezését $\bar{B}(C_b(\Omega))$ -nek. Az N leképezés $\Omega \to \mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$ folytonossága miatt az F leképezés egy topologikus automorfizmusa $\bar{B}(C_b(\Omega))$ -nak, Zorn tétele [48], [53] pedig triviálisan garantálja mind az F mind az inverzének a holomorfiáját $B(C_b(\Omega))$ fölött. Vagyis $F \in \mathrm{Aut}\,\bar{B}(C_b(\Omega))$. Tegyük fel, hogy az f_o függvény fixpontja F -nek. Ekkor

$$k(x)\,\frac{f_o(x)+u(x)}{1+\overline{u(x)}f_o(x)} \equiv f_o(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

ahonnan $f_o^2\,\dfrac{2ige^{it/2}}{1+|g|^2}\sin\dfrac{t}{2} + (1-e^{it})f_o + \dfrac{2ige^{it/2}}{1+|g|^2}\sin\dfrac{t}{2} = 0$. Minthogy $x \in G$ esetén $\dfrac{2ie^{it(x)/2}}{1+|g(x)|^2}\sin\dfrac{t(x)}{2} = \dfrac{e^{it(x)}-1}{1+|g(x)|^2} \neq 0$, kapjuk, hogy

$\overline{g(x)}f_o(x)^2 - (1+|g(x)|^2)f_o(x) + g(x) = 0$ azaz $f_o(x) \in \{g(x), \dfrac{1}{\overline{g(x)}}\}$ minden $x \in G$ -re. Azonban $\|f_o\| \leq 1$, ezért szükségképpen $f_o|_G = g$, és igy f_o egy folytonos kiterjesztése g -nek Ω -ra.

Azonnal felvetődik a kérdés: Milyen mértékig elegendő az Ω tér F-tulajdonsága ahhoz, hogy minden $F \in \mathrm{Aut}\,\bar{B}(C_b(\Omega))$ leképezésnek legyen fixpontja?

A probléma tárgyalásánál elegendő csak kompakt terekre hagyatkoznunk, mivel jól-ismert [10], hogy $C_b(\Omega)$ izometrikusan izomorf a $C(\hat{\Omega})$ térrel, ahol $\hat{\Omega}$ nem más mint az Ω függvénytopológiájának a Stone-Čech kompaktifikáltja, és mert $\hat{\Omega}$ pontosan akkor F-tér ha Ω is az.

Egy kompakt tér folytonos függvényterének egységgömbjén a biholomorf automorfizmusaira áll a következő ismert reprezentációtétel.

A Tétel. (Vesentini - Stachó - Franzoni)[1]. Legyen Ω egy kompakt topologikus tér. Az $\mathrm{Aut}\ \bar{B}(C(\Omega))$ transzformációcsoportot pontosan azok az $F : \bar{B}(C(\Omega)) \longrightarrow C(\Omega)$ leképezések alkotják, amelyek felirhatók

$$(2) \qquad F(f) = [\,\Omega \ni x \longmapsto M_F(x) f(T_f x)\,]$$

alakban, ahol T_F az Ω tér egy alkalmas topologikus automorfizmusa, M_F pedig egy folytonos $\Omega \longrightarrow \mathrm{Aut}\ \bar{\Delta}$ leképezés. Az F automorfizmus egyértelmüen meghatározza a (T_F, M_F) párt, amelyre (2) teljesül.

Ez a tény motiválja, hogy az 1.Propozició megfordithatóságának vizsgálatát a Möbius transzformációk fixpontjainál kezdjük. Emlékeztetünk rá, hogy tetszőleges $M \in \mathrm{Aut}\ \bar{\Delta}$ egyértelmüen adható meg

$$(3) \qquad M = \left[\,\bar{\Delta} \ni \zeta \longmapsto k_M \frac{\zeta + u_M}{1 + u_M \zeta}\,\right]$$

alakban ugy, hogy $|k_M| = 1 > |u_M|$, és az $M \longmapsto (u_M, k_M)$ leképezés egy homeomorfizmus $\mathrm{Aut}\ \bar{\Delta}$ és $\Delta \times \partial\Delta$ között.

1.Definició. Az 1. és 2. Fejezetben a T_F, M_F, u_M, k_M szimbólumokkal mindvégig rendre a (2) által implicite definiált Ω -automorfizmust és $\Omega \mapsto \mathrm{Aut}\ \bar{\Delta}$ leképezést ill. a (3) -at kielégitő $u_M \in \Delta$, $k_M \in \partial\Delta$ számpárt fogjuk jelölni.

---

[1] Ld. E. Vesentini, Appunti del Seminario di Geometria; Scuola Normale Superiore, Pisa 1977/78.

1.Lemma. Legyen $id_{\overline{\Delta}} \neq M \in \mathrm{Aut}\,\overline{\Delta}$ és tegyük fel, hogy $e^{it} = k_M$. Ekkor az M transzformációnak

a) egyetlen fixpontja van amely Δ -ban fekszik, ha

$$|u_M| < |\sin\frac{t}{2}| \quad (= \frac{k_M - 1}{2})$$

b) két különböző $\partial\Delta$ -ban fekvő fixpontja van, ha $|u_M| > |\sin\frac{t}{2}|$

c) egyetlen fixpontja van amely $\partial\Delta$ -ban fekszik, ha $|u_M| = |\sin\frac{t}{2}|$

Bizonyitás. Egyszerü számolás.

2.Lemma. A $\Phi(M) \equiv \{\zeta \in \overline{\Delta} : M\zeta = \zeta\}$ formulával definiált multi-függvénynek létezik folytonos vágása az $\mathrm{Aut}_{\overline{\Delta}} \setminus \{id_{\overline{\Delta}}\}$ halmazon.

Bizonyitás. Általában is, ha $0 < r < 1$ és $F \in \mathrm{Aut}\,\overline{B}(E)$ ahol E egy tetszőleges Banach tér, az rF leképezésnek pontosan egy fixpontja van (ld. [6], [48]). Ezért a $Q(r,M) \equiv [rM \text{ fixpontja}]$ formula értelmes módon definiálja a $Q : [0,1) \times \mathrm{Aut}\,\overline{\Delta} \longrightarrow \overline{\Delta}$ leképezést. Hogyha $r_j \longrightarrow r$ $[0,1)$-ben és $M_j \longrightarrow M$ $\mathrm{Aut}\,\overline{\Delta}$ -ban $(j \longrightarrow \infty)$, akkor a $Q(r_j, M_j)$ sorozat nyilvánvalóan az rM egy fixpontjához tart, vagyis a Q leképezés folytonos.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $id_{\overline{\Delta}} \neq M \in \mathrm{Aut}_{\Delta}\overline{\Delta}$ mellett az $\tilde{S}_M \equiv \{\zeta : \exists (s_j, N_j) \longrightarrow (1,M) \text{ sorozat } Q(s_j, N_j) \longrightarrow \zeta\}$ halmaz pontosan egy pontból áll. Valóban : egyrészről

$$\overline{S}_M = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q\{(s,N) : 1-\frac{1}{n} < s < 1 \text{ és } |k_M - k_N|, |u_M - u_N| < \frac{1}{n}\}$$

Azaz S_M nem-üres összefüggő kompakt halmazok egy csökkenő sorozatának a metszete, tehát összefüggő és nem-üres. Másrészről $S_M \subset \{\zeta : M\zeta = \zeta\}$, amiből $\# S_M$ ($\equiv$ az S_M halmaz számossága) < 2, és igy $\# S_M = 1$ lehet csak.

Következésképpen az $R(M) \equiv \lim_{r \uparrow 1} Q(r,M)$ formulával megadott

$R : \mathrm{Aut}\,\bar\Delta \setminus \{id_\Delta\} \to \bar\Delta$ függvény jól-definiált és folytonos. Ugyanakkor $\{R(M)\} = S_M \subset \{\zeta : M\zeta=\zeta\}$, vagyis R egy vágása a Φ multifüggvénynek.

3.Lemma. Bármely $M \in \mathrm{Aut}\,\bar\Delta \setminus \{id_\Delta\}$ mellett található olyan $t \mapsto M^t$ Lie-homomorfizmusa $\mathbb{R}$ -nek $\mathrm{Aut}\,\bar\Delta$ -ba, amelyre fennáll

(4) $\quad M^1 = M$ és $\Phi(M^t) = \Phi(M) \quad \forall t \in (0,t_0)$,

ahol Φ az $M \mapsto \{\zeta : M\zeta=\zeta\}$ multifüggvény és $t_0 \equiv \{t>0 : M^t \neq id_{\bar\Delta}\}$ (konvenció : $\inf \emptyset = \infty$).

Bizonyitás. Rögzitsük M -et tetszőlegesen. Az 1.Lemmának megfelelően három lehetséges eset van : a) $\#\Phi(M) = 1$ és $\Phi(M) \subset \Delta$; b) $\#\Phi(M)=2$ és $\Phi(M) \subset \partial\Delta$; c) $\#\Phi(M) = 1$ és $\Phi(M) \subset \partial\Delta$.

a) Mivel az $\mathrm{Aut}\,\bar\Delta$ csoport tranzitiv Δ -n, kiválasztható olyan $N \in \mathrm{Aut}\,\bar\Delta$, amely a M fixpontját a 0 -ba viszi. Tehát a 0 fixpontja a $K \equiv NMN^{-1}$ transzformációnak. A Schwarz Lemma szerint létezik $\delta \in \mathbb{R}$ ugy, hogy $K = [\zeta \mapsto e^{i\delta}\zeta]$. Legyen $K^t \equiv [\zeta \mapsto e^{i\delta t}\zeta]$ $(t \in \mathbb{R})$. Mivel a $t \mapsto K^t$ hozzárendelés triviálisan egy Lie $\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}\,\bar\Delta$ homomorfizmus, az $M^t \equiv N^{-1}K^tN$ választás kielégitő.

b) $\mathrm{Aut}\,\bar\Delta$ kétszeresen tranzitiv $\partial\Delta$ -n. Ezért található olyan $N \in \mathrm{Aut}\,\bar\Delta$ amelyre $N\zeta_1 = 1$ és $N\zeta_2 = -1$ ahol ζ_1, ζ_2 az M fixpontjai. Vagyis a $K \equiv NMN^{-1}$ transzformáció fixpontjai -1 és 1. Vegyük észre, $k_K = 1$ és $u_K \in \mathbb{R}$ (ugyanis $k_K \dfrac{1+u_K}{1+\overline{u_K}} = 1$ és $k_K \dfrac{u_K-1}{1-\overline{u_K}} = -1$ -ből $\dfrac{1+u_K}{1-u_K} \Big/ \overline{\left(\dfrac{1+u_K}{1-u_K}\right)} = 1$ azaz $\dfrac{1+u_K}{1-u_K} \in \mathbb{R}$ következik). Legyen ekkor $\delta \equiv \mathrm{areath}\,(u_M)$ és $K^t \equiv \left[\zeta \mapsto \dfrac{\zeta+\mathrm{th}(t\delta)}{1+\zeta\,\mathrm{th}(t\delta)}\right]$. Egyszerü számolás mutatja, hogy $K^{t+s} = K^tK^s$ $\forall t,s \in \mathbb{R}$. Tehát ebben az esetben is vehető $M^t \equiv N^{-1}K^tN$.

c) Jelölje ζ_o az M fixpontját és rögzitsünk egy olyan $N' \in \mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$ transzformációt, amelynél $N\zeta_o = 1$. Legyen továbbá $N'' : \bar{\Delta} \longrightarrow \Pi \equiv \{\infty, \zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\zeta > 0\}$ a Cayley-féle $N''(\zeta) \equiv \frac{1}{i}\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ transzformáció. Most, $N \equiv N''N'$ vételével, a $K \equiv NMN^{-1}$ leképezés a Π félsiknak egy a ∞ ideális pontját helyben hagyó biholomorf automorfizmusa. Igy alkalmas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $K = [\zeta \longmapsto \alpha\zeta+\beta]$ irható. Mivel M -nek ζ_o az egyetlen fixpontja, K -nak nincs más fixpontja mint a ∞. Ezért K csak egy valós irányu eltolás lehet, $K = [\zeta \longmapsto \zeta+\beta]$, vagyis az $M^t \equiv [\zeta \longmapsto N^{-1}(\zeta+t\beta)N]$ választás teljesiti a kivánalmakat.

4.Lemma. Legyen $R : (\mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}) \setminus \{id_\Delta\} \longrightarrow \bar{\Delta}$ egy folytonos vágása a $\Phi : M \longmapsto \{\zeta : M\zeta = \zeta\}$ multifüggvénynek. Ekkor a) $MR(M) = R(M)$, b) $R(M^n) = R(M)$ valahányszor $M^n \neq id_{\bar{\Delta}}$ $(n \in \mathbb{Z})$, c) $R(NMN^{-1}) = NR(M)$ $\forall N \in \mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$.

Bizonyitás. a) triviális. b) Fixáljuk M -et, n -et, vegyünk egy $t \longmapsto M^t$ Lie-homomorfizmust a 3.Lemma által garantált tulajdonságokkal és legyen $t_o \equiv \inf\{t > 0 : M^t \neq id_{\bar{\Delta}}\}$. (4) mutatja, hogy $R(\{M^t : t \in (0,t_o)\}) \subset \Phi(M)$. Mivel $\# \Phi(M) \leq 2$, innen következik, hogy a $t \longmapsto R(M^t)$ függvény konstans a $(0,t_o)$ intervallumon. Vagyis ha $M^n \neq id_{\bar{\Delta}}$, akkor $R(M^n) = R(M^{\mathrm{mod}_{t_o} n}) = R(M^{\mathrm{mod}_{t_o} 1}) = R(M^1) = R(M)$.[2]

c) Legyen $t \longmapsto N^t$ egy olyan Lie $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\bar{\Delta}$ homomorfizmus, melyre $N^1 = N$. Most $N^{-t}R(N^tMN^{-t}) \in \Phi(M)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (ugyanis $N^tMN^{-t}\eta = \eta \Leftrightarrow M(N^{-t}\eta) = N^{-t}\eta$). Ezért a $t \longmapsto N^{-t}R(N^tMN^{-t})$ függvény konstans. Speciálisan $N^{-1}R(NMN^{-1}) = N^oR(N^oMN^o) = R(M)$.

2.Definició. Jelölje δ_n a $\delta_n((\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)) \equiv \max_{j=1,\ldots,n} |\alpha_j-\beta_j|$ metrikát $\mathbb{C}^n$-en. Tetszőleges $\vec{N} \equiv (N_o,\ldots,N_{n-2}) \in$

---

[2] $\mathrm{mod}_\alpha \beta \equiv \inf([0,\infty) \cap \{\beta+n\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\})$, $\mathrm{mod}_\infty \beta \equiv \beta$ $(\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R})$.

$\in \mathrm{Aut}\,\overline{\Delta}$ és $\vec{\zeta} \equiv (\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1}) \in \overline{\Delta}^n$ mellett legyen

(5) $P_n(\vec{N},\vec{\zeta}) \equiv [$azon $\eta \in \overline{\Delta}$, melyre

$\delta_n(\vec{\zeta},(\eta,N_0\eta,\dots,N_{n-2}\eta))$ minimális$]$.

<u>5.Lemma.</u> A P_n függvény jól-definiált (azaz létezik $\eta \in \overline{\Delta}$ ugy, hogy $\delta_n(\vec{\zeta},(\eta,N_0\eta,\dots,N_{n-2}\eta)) < \delta_n(\vec{\zeta},(\eta',N_0\eta',\dots,N_{n-2}\eta'))$ $\eta' \in \Delta \setminus \{\eta\}$). Hogyha $M_0\cdots M_{n-1} = \mathrm{id}_\Delta$ és $\eta =$ $P_n((M_0^{-1},M_1^{-1}M_0^{-1},\dots,M_{n-2}^{-1}\cdots M_0^{-1}),\vec{\zeta}) = \eta$, akkor $P_n((M_1^{-1},M_2^{-1}M_1^{-1},\dots,M_{n-1}^{-1}\cdots M_0^{-1}),(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_{n-1},\zeta_0)) = M_0^{-1}\eta$ (itt $\vec{\zeta} \equiv \zeta_1,\dots,\zeta_n)$).

<u>Bizonyitás.</u> Egy standard kompaktsági megondolás mutatja hogy legalább egy minimalizáló η létezik (4) -ben. Vegyük észre, hogy $\varepsilon \equiv \delta_n(\vec{\zeta},\{(\eta,N_0\eta,\dots,N_{n-2}\eta) : \eta \in \overline{\Delta}\})$ mellett fennáll $\varepsilon = \min\{\varepsilon' > 0 : (\vec{\zeta} + \varepsilon'\overline{\Delta}^n) \cap \{(\eta,N_0\eta,\dots,N_{n-2}\eta) : \eta \in \overline{\Delta}\} \neq \emptyset\}$. Tehát a $Z \equiv \{(\eta,N_0\eta,\dots,N_{n-2}\eta) : \eta \in \overline{\Delta}\}$ halmazra teljesül $Z \cap (\vec{\zeta} + \varepsilon\Delta^n) = \emptyset$ és $\{\eta \in \overline{\Delta} : \delta_n(\vec{\zeta},(\eta,N_0\eta,\dots,N_{n-2}\eta)) = \varepsilon\} \subset$ $\subset Z \cap \partial(\vec{\zeta} + \varepsilon\overline{\Delta}^n)$. Jelöljük Φ -vel az $(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}) \mapsto$ $\mapsto (\alpha_0,N_0^{-1}\alpha_1,\dots,N_{n-2}^{-1}\alpha_{n-1})$ leképezést. Ekkor $\Phi(Z)=\{(\zeta,\dots,\zeta)\in\mathbb{C}^n : \zeta\in\overline{\Delta}\}$, és a $\Phi(\vec{\zeta} + \varepsilon\Delta^n)$ halmaz előáll alkalmas $\vec{\beta} \in \mathbb{C}^n$ ill. $\varepsilon \in [0,1)^n$ mellett $\Phi(\vec{\zeta} + \varepsilon\Delta^n) = \{(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}) : |\alpha_0-\beta_0| < \varepsilon_0,\dots,|\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}| < \varepsilon_{n-1}\}$ alakban. Igy elegendő belátni, hogy ha $\Delta_0,\dots,\Delta_{n-1}$ nyitott körlapok $\mathbb{C}$ -ben, akkor a $D \equiv \{(\lambda,\dots,\lambda) \in \mathbb{C}^n : \lambda \in \overline{\Delta}\}$ alakzat legfeljebb egy pontban metszi a $C \equiv \Delta_0 \times\cdots\times \Delta_{n-1}$ polidiszk határát valahányszor $D \cap C = \emptyset$. Ezt ad absurdum bizonyitjuk: Tegyük fel, hogy nem, és legyen $F_j \equiv \overline{\Delta_0}\times\cdots\times\overline{\Delta_{j-1}}\times(\partial\Delta_j)\times\overline{\Delta_{j+1}}\times\cdots\times\overline{\Delta_{n-1}}$ $(j=0,\dots,n-1)$. Ekkor $\partial C = F_0 \cup \dots \cup F_{n-1}$. Mivel C és D konvexek, most létezik $\lambda \in \mathbb{C}$ és $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ugy, hogy $(\lambda,\dots,\lambda) + [-1,1]\cdot(\mu,\dots,\mu) \subset \partial C$. Ezért valamelyik j_0 indexre az $F_{j_0} \cap [(\lambda,\dots,\lambda)+[-1,1]\cdot(\mu,\dots,\mu)]$ szakasz belseje nem-üres, azaz léteznek $\lambda',\mu' \neq 0$ ugy hogy

$(\lambda',\ldots,\lambda') + (-1,1)(\mu',\ldots,\mu') \subset F_{j_o}$. Ez azonban azt jelenti, hogy $\lambda'+\tau\mu' \in \partial\Delta_{j_o}$ $\forall\tau \in (-1,1)$, ami lehetetlen. Tehát az (5) definició értelmes.

A második állitás bizonyitásához vegyük észre, hogy a δ_n és P_n definiciója szerint fennáll

$$\delta_n((\zeta_o,\ldots,\zeta_{n-1}),(\eta,M_o^{-1}\eta,\ldots,M_{n-2}^{-1}\cdots M_o\eta)) \leq$$
$$\leq \delta_n((\zeta_o,\ldots,\zeta_{n-1}),(\eta',M_o^{-1}\eta',\ldots,M_{n-2}^{-1}\cdots M_o^{-1}\eta')) \quad \forall\eta' \in \overline{\Delta}.$$

Tehát bármely $\eta' \in \overline{\Delta}$ -ra

$$\delta_n((\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},\zeta_o),(M_o^{-1}\eta,\ldots,M_{n-2}^{-1}\cdots M_o^{-1}\eta,\eta)) \leq$$
$$\leq \delta_n((\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},\zeta_o),(M_o^{-1}\eta',\ldots,M_{n-2}^{-1}\cdots M_o^{-1}\eta',\eta'))$$

vagy ami ugyanaz,

$$\delta_n((\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},\zeta_o),((M_o^{-1}\eta),M_1^{-1}(M_o^{-1}\eta),\ldots,M_{n-2}^{-1}\cdots M_1^{-1}(M_o^{-1}\eta),M_{n-1}^{-1}\cdots M_1^{-1}(M_o^{-1}\eta))\leq$$

$\leq$ [ugyanaz a kifejezés η helyett η' -vel].

Mivel $\overline{\Delta} = \{M_o^{-1}\eta' : \eta' \in \overline{\Delta}\}$, ez azt jelenti, hogy a $\lambda \longmapsto \delta_n((\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},\zeta_o),(\lambda,M_1^{-1}\lambda,\ldots,M_{n-1}^{-1}\cdots M_1^{-1}\lambda))$ függvény a minimumát felveszi az $M_o^{-1}\eta$ pontban.

<u>6.Lemma.</u> A P_n leképezés folytonos.

<u>Bizonyitás.</u> Mivel P_n a lokálisan kompakt $(\mathrm{Aut}\,\overline{\Delta})^{n-1}\times\overline{\Delta}^n$ teret a kompakt $\overline{\Delta}$ -ba vetiti, elegendő megmutatni, hogy a gráfja zárt. Hogy ezt véghezvigyük, vizsgáljuk meg először a

$\varphi : (\mathrm{Aut}\,\overline{\Delta})^{n-1}\times\overline{\Delta}^n \ni (\vec{N},\vec{\zeta}) \longmapsto \delta_n(\vec{\zeta},(\eta,N_o\eta,\ldots,N_{n-2}\eta))$ függvényt.

Világos, hogy $\varphi_\eta = \inf\limits_{\eta\in\overline{\Delta}} \varphi_\eta$ ahol $\varphi_\eta(\vec{N},\vec{\zeta}) \equiv \delta_n(\zeta,(\eta,N_o\eta,\ldots,N_{n-2}\eta))$.

A háromszög egyenlőtlenség szerint az összes φ_η $(\eta \in \overline{\Delta})$ függvények teljesitik a

$$|\varphi_\eta(\vec{N},\vec{\zeta})-\varphi_\eta(\vec{N}',\vec{\zeta}')| \leq \sum_{j=0}^{n-1}|\zeta_j-\zeta_j'| + \sum_{j=0}^{n-2}\sup\{|N_j\xi-N_j'\xi| : \xi \in \overline{\Delta}\}$$

Lipschitz feltételt. Ekkor azonban az infimumukra is áll ugyanez a Lipschitz feltétel. Vagyis a φ függvény folytonos. Most ha $(\vec{N}^{(i)},\vec{\zeta}^{(i)}) \longrightarrow (\vec{N},\vec{\zeta})$ és $P_n(\vec{N}^{(i)},\vec{\zeta}^{(i)}) \longrightarrow \eta$, akkor

$$\begin{array}{l} \delta_n(\vec{N}^{(i)},\vec{\zeta}^{(i)}) = \delta_n(\vec{\zeta}^{(i)},(P_n(\vec{N}^{(i)},\vec{\zeta}^{(i)}),N_o^{(i)}P_n(\vec{N}^{(i)},\vec{\zeta}^{(i)}),\dots,N_{n-2}^{(i)}P_n(\vec{N}^{(i)},\vec{\zeta}^{(i)}))) \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \delta_n(N,\zeta) = \inf\{\delta_n(\vec{\zeta},(\eta' N_o\eta',\dots,N_{n-2}\eta')):\eta'\in\bar{\Delta}\}=\delta_n(\vec{\zeta},(\eta,N_o\eta,\dots,N_{n-2}\eta)). \end{array}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség éppen a $P_n(\vec{N},\vec{\zeta}) = \eta$ reláció definiciója.

<u>1.Tétel.</u> Jelöljön Ω egy topologikus teret. A következő állítások ekvivalensek

a) Ω egy F-tér

b) Minden $F\in \mathrm{Aut}_o\bar{B}(C_b(\Omega))$ leképezésnek van fixpontja

<u>Bizonyitás.</u> b)$\Rightarrow$a) : Vegyük észre, hogy tetszőlegesen rögzitett folytonos $t:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ és $u:\Omega\rightarrow\frac{1}{2}\bar{\Delta}$ függvény mellett az

$$(6) \qquad F : f\longmapsto[x\longmapsto e^{it(x)}\frac{f(x)+u(x)}{1+\bar{u}(x)f(x)}]$$

transzformáció beletartozik $\mathrm{Aut}_o\bar{B}(C_b(\Omega))$ -ba. (Valóban : $F_\tau \equiv [f\longmapsto[x\longmapsto e^{i\tau t(x)}\frac{f(x)+\tau u(x)}{1+\tau\bar{u}(x)f(x)}]]$ jelölés mellett a $[0,1]\ni\tau\longmapsto F_\tau$ hozzárendelés egy olyan folytonos $[0,1]\rightarrow\mathrm{Aut}\,\bar{B}(C_b(\Omega))$ leképezés, amelyre $F_o = \mathrm{id}$ és $F_1 = F$.) Az 1.Propozició bizonyitásából kiolvasható, hogy az Ω F-tér amennyiben a $\bar{B}(C_b(\Omega))$ minden (6) alaku biholomorf automorfizmusának van fixpontja.

a)$\Rightarrow$b) : Tegyük fel, hogy Ω egy F-tér, és jelentse $\hat{\Omega}$ az Ω függvénytopológiájának a Stone-Čech kompaktifikáltját, J pedig a $C_b(\Omega)$ tér és a $C(\hat{\Omega})$ közötti kanonikus izometrikus izomorfiát. Tekintsünk egy $F\in\mathrm{Aut}_o\bar{B}(C_b(\Omega))$ leképezést, és legyen $\hat{F}\equiv JFJ^{-1}$. Világos, hogy $\hat{F}\in\mathrm{Aut}_o\bar{B}(C(\hat{\Omega}))$. Először is belátjuk, hogy $T_{\hat{F}} = \mathrm{id}_{\hat{\Omega}}$. Valóban: Legyen $\tau\longmapsto\hat{F}_\tau$ egy olyan folytonos $[0,1]\rightarrow\mathrm{Aut}\bar{B}(C(\hat{\Omega}))$ leképezés, melynél $\hat{F}_o = \mathrm{id}_{\hat{\Omega}}$ és $\hat{F}_1 = \hat{F}$ és legyen x egy tetszőlegesen rögzitett pontja $\hat{\Omega}$ -nak. Vegyük észre, hogy most tetszőleges $f\in\bar{B}(C(\hat{\Omega}))$ függvény mellett a $[0,1]\ni\tau\longmapsto s_f(\tau)\equiv$ $\equiv M_{\hat{F}_\tau}(x)^{-1}(\hat{F}_\tau f)(x)$ függvény folytonos. Az 1.Definició figyelembevételével kapjuk, hogy $s_f(\tau) = f(T_{\hat{F}_\tau}x)$. Vagyis $\tau_i\rightarrow\tau$ esetén mindig $f(T_{\hat{F}_{\tau_i}}x) \longrightarrow f(T_{F_\tau}x)$. Ez csak ugy teljesülhet, ha a $\tau \longmapsto T_{\hat{F}_\tau}x$ leképezés folytonos. (Az ellenkező esetben ugyanis az $\hat{\Omega}$ tér kompaktsága miatt valamely $\tau_i \longrightarrow \tau$ általánositott sorozatra és $y \in \hat{\Omega}$ pontra $T_{\hat{F}_{\tau_j}}x \longrightarrow y \neq T_{\hat{F}_\tau}x$ volna. Ekkor tetszőleges $f \in \bar{B}(C(\hat{\Omega}))$ mellett $f(T_{\hat{F}_{\tau_i}}x) \longrightarrow f(y)$ állna, ahonnan következik $f(T_{\hat{F}_\tau}x) = f(y)$. Ugyanakkor — lévén $\hat{\Omega}$ kompakt Hausdorff tér — található olyan $f \in \bar{B}(C(\hat{\Omega}))$ függvény, melyre $f(T_{\hat{F}_\tau}x) \neq f(y)$.) Mivel $\hat{\Omega}$ egy F-tér, igy a $\tau \longmapsto T_{\hat{F}_\tau}x$ leképezés konstans (ld.[10]). Azaz $T_{\hat{F}} = T_{\hat{F}_0} = id_{\hat{\Omega}}$, vagyis az $\hat{F}$ transzformáció $\hat{F}(f) = [x \longmapsto M(x)f(x)]$ alaku. A tétel bizonyitásához elegendő tehát csak azt megmutatni, hogy minden ilyen tipusu $\bar{B}(C(\hat{\Omega}))$-automorfizmusnak van fixpontja. Az 5.Lemma állitása lehetőséget nyujt arra, hogy további technikai bonyodalmak fellépése nélkül ennél rögtön kissé többet lássunk be :

<u>2.Propozició.</u> Legyen Ω egy topologikus F-tér és $F \in \mathrm{Aut}\, \bar{B}(C_b(\Omega))$. Ha az általa indukált T_F Ω-automorfizmus periodikus, akkor F -nek van fixpontja.

<u>Bizonyitás.</u> Rögzitsünk egy olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, melyre $T_F^n = id_\Omega$, és jelölje R az egyik folytonos vágását $\mathrm{Aut}\, \bar{\Delta} \setminus \{id_{\bar{\Delta}}\}$ felett az $M \longmapsto \{\zeta : M\zeta = \zeta\}$ multifüggvénynek (létezését a 2.Lemma garantálja). Irjunk röviden $T \equiv T_F$ és $M \equiv M_F$ -et.

Tekintsük a $G \equiv \{x \in \Omega : M(x)M(Tx)\cdots M(T^{n-1}x) \neq id_{\bar{\Delta}}\}$ halmazt és a $g(x) \equiv R(M(x)\cdots M(T^{n-1}x))$ formulával definiált $g : G \longrightarrow \bar{\Delta}$ függvényt. A G halmaz egy T-invariáns kozéró halmaz hiszen $G = \{x \in \Omega : |k_{M(x)\cdots M(T^{n-1}x)}| + |u_{M(x)\cdots M(T^{n-1}x)}| \neq 0\}$ és nyilván $M(x)\cdots M(T^{n-1}x) = id_{\bar{\Delta}} \Longleftrightarrow id_{\bar{\Delta}} = M(Tx)\cdots M(T^{n-1}x)M(x) = M(Tx)\cdots M(T^{n-1}x)M(x)$. A g függvényről a következőt állithatjuk :

(6) $\qquad g(x) = M(x)g(Tx) \quad \forall x \in G$.

Valóban, ha $x \in G$, akkor $g(Tx) = R(M(Tx)\cdots M(T^{n-1}(Tx))) =$
$= R(M(Tx)\cdots M(T^{n-1}x)M(x)) = R(M(x)^{-1}M(x)\cdots M(T^{n-1}x)M(x)) =$
$=$ a 4.Lemma c) szerint $= M(x)^{-1}R(M(x)\cdots M(T^{n-1}x)) = M(x)^{-1}g(x)$

Legyen most h egy folytonos kiterjesztése g -nek G -ről Ω -ra (létezését az Ω-tér F-tulajdonsága biztositja). Mivel $|g|\le 1$, az általánosság megszoritása nélkül vehetjük, hogy $|h|\le 1$. Definiáljuk az $f : \Omega \longrightarrow \overline{\Delta}$ függvényt (amely a jelöltünk arra, hogy az F automorfizmus fixpontja legyen) az

$$f(x) \equiv P_n((M(x)^{-1}, M(Tx)^{-1}M(x)^{-1}, \ldots, M(T^{n-2}x)^{-1}\cdots M(x)^{-1}), (h(x), h(Tx), \ldots, h(T^{n-1}x))).$$

Verifikáljuk, hogy $f(x) = M(x)f(Tx) \quad \forall x \in \Omega$:

Először legyen $x \in G$. Ekkor $h(x) = g(x)$. De (6) szerint $g(Tx) = M(x)^{-1}g(x), \ldots, g(T^{n-1}x) = M(T^{n-2}x)^{-1}\cdots M(x)^{-1}g(x)$. Tehát

$$(7) \qquad f(x) = P_n((M(x)^{-1}, \ldots, M(T^{n-2}x)^{-1}\cdots M(x)^{-1}),$$
$$(g(x), M(x)^{-1}g(x), \ldots, M(T^{n-2}x)^{-1}\cdots M(x)^{-1}g(x))).$$

A 2.Definiciót a (7) jobb oldalára alkalmazva látjuk, hogy $f(x) = g(x)$. Ezért (6) alapján kapjuk, hogy $f(x) = g(x) =$
$= M(x)g(Tx) = M(x)f(Tx)$.

Ezután legyen $x \in \Omega \setminus G$. Most $M(x)\cdots M(T^{n-1}x) = id_{\overline{\Delta}}$. Tehát
$$f(Tx) = P_n((M(Tx)^{-1}, \ldots, M(T^{n-1}x)^{-1}\cdots M(Tx)^{-1}), (h(Tx), \ldots, h(T^n x))) =$$
$$= P_n((M(Tx)^{-1}, \ldots, M(T^{n-1}x)^{-1}\cdots M(Tx)^{-1}), (h(Tx), \ldots, h(T^{n-1}x), h(x))).$$
Innen $M_j \equiv M(T^j x)$, $\zeta_j \equiv h(T^j x)$ $(j=0,\ldots,n-1)$ és $\eta \equiv f(x)$ mellett alkalmazva az 5.Lemmát, adódik $f(Tx) = M(x)^{-1}f(x)$.

Az f függvény folytonossága közvetlen következménye a 6. Lemmának.

Felvetődik a kérdés, milyen bonyolultabb viselkedést tételezhetünk fel az F automorfizmushoz csatolt T_F Ω-automorfizmusról, hogy a 2.Propozició állitása még igaz maradjon. Ebben a helyzetben már célszerü csak kompakt Ω térre szoritkoznunk.

3. Definició. Ha T egy absztrakt Ω halmaz leképezése önmagába és $x \in \Omega$, akkor az $\inf\{n \in \mathbb{N} : T^n x = x\}$ számot a T x-pontbeli rangjának nevezzük és $r_T(x)$ -szel jelöljük ($\inf \emptyset \equiv \infty$). A T transzformációt pontonként periodikusnak mondjuk ha minden $x \in \Omega$ -ra $r_T(x) < \infty$.

7. Lemma. Legyen Ω egy Baire tér és T egy pontonként periodikus Ω-automorfizmus. Legyen $\Omega_n \equiv \{x \in \Omega : r_T(x) \leq n\}$ $(n=1,2,\ldots)$. Ekkor a $G \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1})^o$ alakzat (ahol $\Omega_o \equiv \emptyset$) az Ω térnek egy mindenütt sürü nyitott T-invariáns részhalmaza és $\overline{\lim_{y\to x}}\, r_T(y) = \lim_{G \ni y \to x} r_T(y)$ $\forall x \in \Omega$.

Bizonyitás. Ha $x = \lim_{j\in J} x_j$ és $T^m x_j = x_j$ $j \in J$, akkor nyilván $T^m x = x$. Tehát az $r_T : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos. Ezért $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ mind zártak. A T transzformáció pontonkénti periodicitása azt jelenti, hogy $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Igy az Ω tér Baire-tulajdonsága miatt a $G' \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^o$ halmaz sürü az Ω-ban. Tekintsük most egy tetszőleges nyitott U részhalmazát Ω-nak. Mivel $\overline{G'} = \Omega$, található $n_o \in \mathbb{N}$ ugy, hogy $\Omega_{n_o}^o \cap U \neq \emptyset$. Mivel $r_T(x) \leq n_o$ $\forall x \in \Omega_{n_o}$, létezik olyan $y_o \in \Omega_{n_o}^o \cap U$, melyre $r_T(y_o) = \max\{r_T(x) : x \in \Omega_{n_o}^o \cap U\}$. Azonban az $\{x \in \Omega_n^o \cap U : r_T(x) = r_T(y_o)\}$ $(= U \cap \Omega_{n_o}^o \cap \{x \in \Omega : r_T(x) > r_T(y_o) - 1\}$ halmaz egy nyitott környezete az y_o pontnak. Ezért a $G'' \equiv \{y \in \Omega : \exists U$ y-környezet $\forall x \in U$ $r_T(x) = r_T(y)\}$ alakzat sürü Ω-ban. Csakhogy $G'' =$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in \Omega : \exists U \ y\text{-környezet } \forall x \in U \ r_T(x) = n\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : r_T(x) = n\}^o = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega_n \setminus \Omega_{n-1})^o .$$

A G halmaz T-invarianciája nyilvánvaló, mert $r_T(x) = r_T(Tx)$ $\forall x \in \Omega$.

A második állitás bizonyitásához vegyük észre, hogy az r_T függvény alulról félig folytonossága miatt $\underline{\lim}_{G \ni z \to y}\, r_T(z) \geq r_T(y)$

$\forall y \in \Omega$. Vagyis $\overline{\lim}_{G\ni y\to x} r_T(y) \le \overline{\lim}_{y\to x} r_T(y) \le \overline{\lim}_{y\to x}\ \overline{\lim}_{G\ni z\to y} r_T(z) =$
$= \overline{\lim}_{G\ni z\to x} r_T(z)$.

8.Lemma. Legyen Ω egy kompakt tér, T egy Ω-automorfizmus, $f_1, f_2, \ldots \in C(\Omega)$ és jelölje A az 1_Ω és az $f_n \circ T^m$ $(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z})$ függvények által generált C^*-részalgebráját $C(\Omega)$-nak. Ekkor létezik egy olyan K kompakt metrikus tér, $\Phi : \Omega \to K$ folytonos leképezés ill. egy olyan $\tilde{T}$ automorfizmusa K-nak, amelyre $A = C(K)\circ\Phi$ [3] és $\Phi\circ T = \tilde{T}\circ\Phi$.

Bizonyitás. A kommutativ Gel'fand-Neumark tételen és szeparabilitási érveken alapuló standard meggondolás. Részletesen kidolgozva ld. [37, 26.old.] ill. [35].

1.Következmény. Ha $f_1 = f_2 = \ldots = f$ $(\in C(\Omega))$, akkor
$\inf\{n \in \mathbb{N} : f(T^k x) = f(T^{\operatorname{mod}_n k} x)\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\} = r_{\tilde{T}}(\Phi(x))$.

Bizonyitás. Válasszunk egy olyan $\tilde{f} \in C(K)$ függvényt, amelyikre $f = \tilde{f}\circ\Phi$ és legyen $r^*(x) \equiv \inf\{n\in\mathbb{N} : f(T^k x) = f(T^{\operatorname{mod}_n k} x)\ \forall k\in\mathbb{Z}\}$ $(x \in \Omega)$ ill. $\tilde{r}^*(\tilde{x}) \equiv \inf\{n\in\mathbb{N} : \tilde{f}(\tilde{T}^k\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{T}^{\operatorname{mod}_n k}\tilde{x})\ \forall k\in\mathbb{Z}\}$ $(\tilde{x} \in K)$.

Először belátjuk, hogy $r^*(x) = \tilde{r}^*(\Phi(x))$ $\forall x \in \Omega$. Valóban, tetszőleges $\ell \in \mathbb{N}$ mellett $r^*(x) \le \ell \iff \exists 0<n<\ell\ \forall k \in \mathbb{Z}$ $f(T^{\operatorname{mod}_n k} x) = f(T^k x) \iff \exists 0<n<\ell\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \tilde{f}(\tilde{T}^{\operatorname{mod}_n k}\Phi(x)) = \tilde{f}(\tilde{T}^k\Phi(x))$ $\iff \tilde{r}^*(\Phi(x)) \le \ell$.

Ezután megmutatjuk, hogy $\tilde{r}^* = r_{\tilde{T}}$: Mivel $A = C(K)\circ\Phi$, minden olyan $x, y \in \Omega$ párhoz amelynél $\Phi(x) \ne \Phi(y)$, található olyan $g \in A$ függvény, hogy $g(x) \ne g(y)$. Az A függvényalgebra definiciójából és a Stone-Weierstrass tételből következik, hogy $\exists k \in \mathbb{Z}$ $f(T^k x) \ne f(T^k y)$. Vagyis $\Phi(x) = \Phi(y)$ pontosan akkor, ha $\forall k \in \mathbb{Z}$ $f(T^k x) = f(T^k y)$. Ezért ha $\tilde{x}\in K$ $x \in \Phi^{-1}(\{x\})$ akkor $\tilde{T}^n\tilde{x} = \tilde{x} \iff \tilde{T}^n\Phi(x) =$ $= \Phi(x) \iff \Phi(T^n x) = \Phi(x) \iff \forall k \in \mathbb{Z}$ $f(T^{n+k}x) = f(T^k x)$ (ezek az ek-

---

[3] azaz $\forall f \in C(\Omega)$ $f \in A \iff \exists \tilde{f} \in C(K)$ $f = \tilde{f}\circ\Phi$

vivalenciák minden rögzitett $n \in \mathbb{N}$ mellett állnak). Innen $\inf\{n \in \mathbb{N} \ \tilde{T}^n\tilde{x} = \tilde{x}\} = \inf\{n \in \mathbb{N} : \tilde{f}(\tilde{T}^{\mathrm{mod}_n k}\tilde{x}) = f(\tilde{T}^k\tilde{x}) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$.

9.Lemma. Legyen Ω egy kompakt F-tér, T egy pontonként periodikus Ω-automorfizmus. Ekkor tetszőleges $f \in C(\Omega)$ függvényre található $n_o \in \mathbb{N}$ ugy, hogy $f = f \circ T^{n_o}$.

Bizonyitás. $f_1 \equiv f_2 \equiv \ldots \equiv f$ mellett válasszuk a A függvény-algebrát a K reprezentációs teret ill. a Φ és $\tilde{T}$ leképezéseket a 8.Lemmának megfelelően. Tételezzük fel a bizonyitandó ellenkezőjét, ami az 1.Következmény miatt ugy fogalmazható meg, hogy $\sup\{r_{\tilde{T}}(\tilde{x}) : \tilde{x} \in K\} = \infty$. Mivel nyilván $r_{\tilde{T}}(\Phi(x)) \leq$ $\leq r_T(x) \ \ \forall x \in \Omega$, a $\tilde{T}$ K-automorfizmus szintén pontonként periodikus. Igy a 7.Lemmát alkalmazhatjuk a K térre és a $\tilde{T}$ leképezésre (az ottani Ω ill. T helyett). Ebből az $r_{\tilde{T}}$ függvény alulról félig folytonossága miatt azt kapjuk, hogy létezik egy olyan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \in K$ sorozat, amelyre $\tilde{x}_n \in \{\tilde{x} \in K : r_{\tilde{T}}(\tilde{x}) = r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n)\}^o$ $(n \in \mathbb{N})$ és $r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n) \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$. Tetszőlegesen $n \in \mathbb{N}$ mellett rögzitsük az $\tilde{x}_n$ pontnak egy olyan $U_n \subset \{\tilde{x} \in K : r_{\tilde{T}}(\tilde{x}) = r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n)\}$ nyitott környezetét amelyre az $U_n^k \equiv \tilde{T}^k U_n$ $\ k = 0, \ldots, r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n) - 1$ halmazok páronként diszjunktak (ez egy jól-ismert metszet-konstrukcióval mindig elérhető). Rögzitsünk továbbá egy δ irracionális számot és egy olyan $\ell_1, \ell_2, \ldots \in \mathbb{Z}$ sorozatot, amelyre $\ell_n / r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n) \to \delta$ $(n \to \infty)$. Vezessük be az $I \equiv \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n)\}$ indexhalmazt, és legyen $\tilde{G} \equiv \bigcup_{(n,k) \in I} U_n^k$. Vegyük észre, hogy a U_n^k halmazok páronként diszjunktak, és hogy a $\tilde{G}$ alakzat $\tilde{T}$-invariáns. Definiáljuk $\tilde{G}$ fölött a $\tilde{g}$ és $\tilde{h}$ függvényeket a következőképpen : legyen $\tilde{g}(\tilde{x}) \equiv \exp(2\pi i k \ell_n / r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n))$ ill. $\tilde{h}(\tilde{x}) \equiv$ $\equiv \exp(2\pi i \ell_n / r_{\tilde{T}}(\tilde{x}_n))$ valamennyi $\tilde{x} \in U_n^k$ mellett $((k,n) \in I)$. Legyen továbbá $g_o \equiv \tilde{g} \circ \Phi$ és $h_o \equiv \tilde{h} \circ \Phi$ — az értelmezési tartományuk a $G \equiv \Phi^{-1}(\tilde{G})$ halmaz. A $\tilde{g}$ ill. $\tilde{h}$ függvények folytono-

sak és teljesitik a $\tilde{g}(\tilde{T}\tilde{x}) = \tilde{h}(\tilde{x})\tilde{g}(\tilde{x})$ $(\tilde{x}\in\tilde{G})$ egyenletet. Igy g_o, h_o $C_b(G)$ és $g_o\circ T = h_o g_o$. Minthogy $G = \Phi^{-1}(\tilde{G})$ egy metrikus tér egy nyitott részhalmazának a teljes inverz képe egy folytonos leképezés mellett, a G halmaz kozéró tipusu. Ezért (az Ω tér F-tulajdonságából kifolyóan) található $\sigma,h\in C(\Omega)$ ugy, hogy $g|_G = g_o$ és $h|_G = h_o$. Mivel $\sigma_o(Tx) = h_o(x)\sigma_o(x)$ $\forall x\in G$, fennáll $g(Tx) = h(x)g(x)$ $\forall x\in\overline{G}$ (!) . Speciálisan, ha $x_n\in\Phi^{-1}(\{x_n\})$ $(n=1,2,\dots)$ és x egy torlódási pontja az $x_1,x_2,\dots$ sorozatnak, akkor $1 = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x) = g(T^{r_T(x)}x) =$
$= h(T^{r_T(x)-1}x)g(T^{r_T(x)-1}x) = \dots = \left[h(T^{r_T(x)-1}x)\cdots h(x)\right]g(x) =$
$h(T^{r_T(x)-1}x)\cdots h(x)$. Hasonlóan, $g(T^{r_T(x)}x_n) = h(T^{r_T(x)-1}x_n)\cdots h(x_n) =$
$= \exp\left[2\pi i\ r_T(x)\ell_n / r_T(x_n)\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Azonban ekkor az $1 = g(x) =$
$= g(T^{r_T(x)}x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(T^{r_T(x)}x_n) = \exp\left[2\pi i\ r_T(x)\delta\right] \neq 1$ ellentmondásra jutunk.

Amit az imént megmutattunk, ugy interpretálható hogy amenynyiben Ω egy kompakt F-tér és T egy pontonként periodikus automorfizmusa Ω -nak, akkor az $f\mapsto f\circ T$ lineáris $C(\Omega)$-unitér operátor is pontonként periodikus.

Csakhogy a következő egyszerü Banach tér elv áll :

<u>10.Lemma.</u> Legyen E egy Banach tér és T egy pontonként periodikus korlátos lineáris $E\to E$ leképezés. Ekkor a T operátor szükségképpen periodikus.

<u>Bizonyitás.</u> Tegyük fel, hogy T nem-periodikus. Ekkor található egy olyan $f_1,f_2,\dots\in E$ sorozat, melyre $n_k \equiv r_T(f_k)\uparrow\infty$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy az f_k rendelkezik a legnagyobb normával a $T^n f_k$ $(n=0,1,\dots)$ vektorok közül (hiszen a $\{T^n f : n\in\mathbb{N}\}$ véges minden $f\in E$ esetén) , vehető továbbá $\|f_k\| = 1$ $(k=1,2,\dots)$. Legyen $\delta_k \equiv$

$\delta_k \equiv \min\{\|T^j f_k - T^i f_k\| : 0 \le i < j < n_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$, és $\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_2 \equiv \frac{\delta_1}{6}, \ldots, \alpha_k \equiv \frac{\delta_1 \cdots \delta_{k-1}}{6^k}, \ldots$. Tekintsük a T^n operátorok értékeit az $f \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ helyen. $T^n f - f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (T^n f_k - f_k) =$ $= \sum_{k=Sn}^{\infty} \alpha_k (T^n f_k - f_k)$, ahol $s(n) \equiv \min\{k : T^n f_k \ne f_k\}$ (megjegyzés : $n_k > n$ esetén már $T^n f_k \ne f_k$) .

$$\|T^n f - f\| \ge \alpha_{s(n)} \|T^n f_{s(n)} - f_{s(n)}\| - \sum_{k=s(n)+1}^{\infty} \alpha_k \|T^n f_k - f_k\| \ge$$

$$\ge \alpha_{s(n)} \delta_{s(n)} - \sum_{k=s(n)+1}^{\infty} 2\alpha_k = \alpha_{s(n)} \delta_{s(n)} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{s(n)} \frac{\delta_{s(n)} \cdots \delta_{s(n)+m}}{6 \qquad 6} >$$

$$> \alpha_{s(n)} \delta_{s(n)} (1 - \tfrac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} 3^{-m}) > 0 .$$

Tehát $\forall n \in \mathbb{N}$ $T^n f \ne f$, azaz $r_T(f) = \infty$. Vagyis a T operátor nem pontonként periodikus.

A 9. és 10.Lemmából azonnal következik a

2.Tétel. Egy kompakt F-tér pontonként periodikus topologikus automorfizmusai szükségképpen periodikusak.

Ennek fényében meggondolásaink eredményei az alábbi módon foglalhatók össze :

1'.Tétel. Jelöljön Ω egy kompakt teret, legyen $G \equiv \mathrm{Aut}\,\overline{B}(C(\Omega))$ és $G_o \equiv \mathrm{Aut}_o \overline{B}(C(\Omega))$. Ekkor ekvivalensek

a) Ω egy F-tér

b) Minden $F \in G$ -nek, melyre $T_F = id_\Omega$, van fixpontja

c) Minden $F \in G$ -nek, melyre T_F periodikus, van fixpontja

d) Minden $F \in G$ -nek, melyre T_F pontonként periodikus, van fixpontja

e) Minden $F \in G_o$ rendelkezik fixponttal.

2. Fejezet

A fixpontprobléma megoldása preduálos M-háló egységgömbjén

Az 1'.Tétel bizonyitásrendszere ismeretében várható : annak az általános problémának a megoldására, hogy egy kompakt Ω F-tér esetében a $C(\Omega)$ függvénytér zárt egységgömbjén az összes biholomorf automorfizmus rendelkezik-e fixponttal, direkt módon nem alkalmas az előzőekben kifejlesztett technika. Magát a kérdést át lehet fogalmazni a következőképpen : Tegyük fel, hogy E egy olyan kommutativ C^*-algebra, amelynek a maximális ideál tere F-tulajdonságu. Igaz-e ekkor, hogy minden $F \in \mathrm{Aut}\,\overline{B}(E)$ rendelkezik fixponttal? Ebben az utóbbi megvilágitásban számithatunk arra, hogy a válasz negativ : Sejteni lehet hogy alkalmas (X,μ) mértéktér mellett található olyan μ-mérhető $M : X \to \mathrm{Aut}\overline{\Delta}$ leképezés és ergodikus $T : X \to X$ transzformáció, amelynél az $F(f) \equiv$ $\equiv [x \mapsto M(x)f(Tx)]$ formulával megadott biholomorf automorfizmusa $\overline{B}(L^\infty(\mu))$ -nek fixpont nélküli. (Az $L^\infty(\mu)$ tér maximális ideál tere hiper-Stone-tér, és igy F-tér egyben [10]).

Végig ebben a fejezetben jelölje M_1 és M_2 a $[\zeta \mapsto -\zeta]$ ill. $[\zeta \mapsto \frac{\zeta + \mathrm{th}(1)}{1+\zeta \mathrm{th}(1)}]$ projektiv transzformációit a $\overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kompaktifikált számsiknak. (Megjegyzés : $M_1|_{\overline{\Delta}}, M_2|_{\overline{\Delta}} \in \mathrm{Aut}\,\overline{\Delta}$. A $\mathrm{th}(1)$ konstans vételének oka, hogy $M_2^t = [\zeta \mapsto \frac{\zeta+\mathrm{th}(t)}{1+\zeta\mathrm{th}(t)}]$ $\forall t \in \mathbb{Z}$ (ld. 3.Lemma b) biz.).) Legyen λ a normalizált Lebesgue mérték a $\mathbb{C}$ sik $\partial\Delta$ egységkörén azaz $\lambda\{e^{i\xi} : 0<\xi<\alpha\} \equiv \frac{\alpha}{2\pi}$ ha $\alpha \in [0,2\pi]$) . Rögzitsünk továbbá egy irracionális $\delta \in (0,1)$ számot és jelölje T az $x \mapsto \exp(-2\pi i\delta)x$ rotációját $\partial\Delta$ -nak. Az $L^\infty(\partial\Delta,\lambda)$ Lebesgue-teret, mint szokásos, a $\{\tilde{\varphi} : \varphi$ korlátos Borel-mérhető $\partial\Delta \to \mathbb{C}$ függvények$\}$ formában fogjuk kezelni, ahol $\tilde{\varphi} \equiv$ $\equiv \{\psi(:\partial\Delta \to \overline{\mathbb{C}}) : \lambda\{x \in \partial\Delta : \psi(x) \neq \varphi(x)\} = 0\}$. Végül bevezetjük az $M : \partial\Delta \to \mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}}$ ill. $F : \overline{B}(L^\infty(\partial\Delta,\lambda)) \to L^\infty(\partial\Delta,\lambda)$ leképezéseket az $M(e^{2\pi i\tau}) \equiv \begin{cases} M_1 & \text{ha } 0\le\tau<\delta \\ M_2 & \text{ha } \delta\le\tau<1 \end{cases}$ ill. $F(\tilde{\varphi})=[x\mapsto M(x)\varphi(Tx)]^{\sim}$

definiciókkal. Világos, hogy $F\in \operatorname{Aut}\overline{B}(L^{\infty}(\partial\Delta,\lambda))$.

3.Tétel. Az (imént definiált) F transzformációnak nincs fixpontja.

A bizonyitást nyolc lépésre osztjuk

1) Legyen G az M_1 és M_2 transzformációk által generált részcsoportja $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ -nak. Mivel

(8) $$M_2M_1 = M_1M_2^{-1} \qquad (\Leftrightarrow M_1M_2 = M_2^{-1}M_1) ,$$

fennáll $G = \{M_1^sM_2^t : s=0,1 ; t\in\mathbb{Z}\}$. G -nek ez a reprezentációja egyértelmü abban az értelemben, hogy ha $s,s'\in\{0,1\}$, $t,t'\in\mathbb{Z}$ és $M_1^sM_2^t = M_1^{s}M_2^{t}$ akkor szükségképpen $s=s'$ és $t=t'$ mivel $id_{\overline{\mathbb{C}}}= = M_1^{s-s}M_2^{t-t} = [\zeta\mapsto(-1)^{s-s}\frac{\zeta+th(t'-t)}{1+\zeta\, th(t'-t)}]$.

2) A továbbiakban ad absurdum fogunk érvelni a $\exists f\ Ff = f$ feltevésből. Jelölje f_o az F egy fixpontját és legyen φ_o egy (ettől kezdve rögzitett) reprezentánsa az f_o -nak (azaz $f_o = \tilde{\varphi}_o$). A λ-majdnem mindenütt kifejezés röviditésére bevezetjük a $\forall_\lambda$ szimbólumot. Most tehát $\varphi_o(Tx) = M(x)^{-1}\varphi_o(x)$ $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$ $\forall n\in\mathbb{N}$, és innen

(9) $$\varphi_o(T^nx) = M(T^{n-1}x)^{-1}\cdots M(x)^{-1}\varphi_o(x) \quad \forall_\lambda x\in\partial\Delta\ \forall n\in\mathbb{N} .$$

Tehát $\operatorname{range}(\varphi_o\circ T^n)\subset G(\operatorname{range}\varphi_o)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

3) Jól-ismert, hogy a T transzformáció ergodikus. Ezért ha egy λ-mérhető S halmazra $\lambda(S\Delta T(S)) = 0$ teljesül, akkor szükségképpen $\lambda(S) = 0$ vagy $\lambda(S) = 1$.

Tehát ha egy $\Gamma\subset\overline{\mathbb{C}}$ Borel-halmazra $N(\Gamma)\subset\Gamma$ $\forall N\in G$ áll, akkor a $\varphi_o^{-1}(\Gamma)$ teljes inverz kép vagy egy 0-halmaz, vagy egy 0-halmaz komplementere.

4) Ha $\zeta,\eta\in\overline{\Delta}\setminus\{-1,1\}$ és $\eta\notin G(\zeta)$, akkor létezik olyan

T-invariáns nyitott U, V halmazpár, melyre $\zeta \in U$, $\eta \in V$ és $U \cap V = \emptyset$.

Bizonyitás: Vegyük észre, hogy bármely $t \in \mathbb{Z}$ mellett M_2^t: $1 \mapsto 1$, $(-1) \mapsto (-1)$, $[-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, kör $\longrightarrow$ (másik) kör. Igy az $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}}$ csoport konformitásából könnyen következik, hogy minden $t \in \mathbb{Z}$ -re az M_2^t leképezés a korlátos $D \equiv \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - i| < \sqrt{2}\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta + i| < \sqrt{2}\}$ tartományt önmagára vetiti. Legyen d_D a Carathéodory távolság D -n (def. 11.old., továbbiak [48], [29], [6]), és tekintsük a $G(\zeta)$ orbitot. (8) -ból leolvashatjuk, hogy $G(\zeta) = \{\pm M_2^t \zeta : t \in \mathbb{Z}\} \subset \subset \overline{\Delta} \setminus \{-1,1\} \subset D$. Mivel $M_2^t \zeta = \frac{\zeta + th(t)}{1 + \zeta th(t)} \longrightarrow \pm 1$ aszerint hogy $t \longrightarrow \pm\infty$, a $G(\zeta)$ halmaznak nincs torlódási pontja D -ben. Ezért $d_D(\eta, G(\zeta)) > 0$. Tehát az $U \equiv \{\zeta' \in D : d_D(\zeta', G(\zeta)) < \frac{1}{2} d_D(\eta, G(\zeta))\}$ és $V \equiv \{\eta' \in D : d_D(\eta', G(\zeta)) > \frac{1}{2} d_D(\eta, G(\zeta))\}$ választás megfelel a kivánalmaknak.

Ezután megmutatjuk, hogy $\lambda(\varphi_0^{-1}(G(\zeta_0))) = 1$ valamilyen $\zeta_0 \in \overline{\Delta}$ mellett.

Bizonyitás : Az előbb belátott állitás és 3) kizárják, hogy bármely $\zeta, \eta \in \overline{\Delta} \setminus \{-1,1\}$ pár és U, V $G(\zeta)$- ill. $G(\eta)$-környezetek mellett egyszerre teljesüljön $\lambda(\varphi_0^{-1}(U)) > 0$ és $\lambda(\varphi_0^{-1}(V)) > 0$. Hogyha minden $\zeta \in \overline{\Delta} \setminus \{-1,1\}$ -re található olyan U környezete a $G(\zeta)$ orbitnak, melyre $\lambda(\varphi_0^{-1}(U)) = 0$, akkor a $\overline{\mathbb{C}}$ tér szeparabilitása miatt $\lambda(\varphi_0^{-1}(\overline{\Delta} \setminus \{-1,1\})) = 0$, ahonnan $\lambda(\varphi_0^{-1}(\{-1,1\})) = 1$. Ilyenkor vehető pl. $\zeta_0 = 1$. Amennyiben pedig valamely $\zeta_1 \in \overline{\Delta} \setminus \{-1,1\}$ pont $G(\zeta_1)$ orbitjának bármely U környezetére $\lambda(\varphi_0^{-1}(U)) > 0$, akkor ennek a ζ_1 -nek minden G-invariáns U' környezetére $\lambda(\varphi_0^{-1}(U')) = 1$ teljesül. Ekkor $1 = \lambda(\varphi_0^{-1}(\{\zeta \in D : d_D(\zeta, G(\zeta_1)) < \frac{1}{n}\})) \longrightarrow \lambda(\varphi_0^{-1}(G(\zeta_1)))$ $(n \to \infty)$. Vagyis ebben az esetben megfelelő a $\zeta_0 \equiv \zeta_1$ választás.

Ettől kezdve feltesszük, hogy

$$\operatorname{range} \varphi_0 = \{c_1, c_2, \dots\} \subset G(c) \subset \bar{\Delta}$$

ahol $c, c_1, c_2, \dots$ adott konstansok. Az előző észrevételünk biztositja, hogy ez nem megszoritása az általánosságnak.

5) Az 1) lépés során megjegyzettekből egyenesen következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ mellett egyértelmüen meghatározható egy olyan $s_n : \partial\Delta \to \{0,1\}$, $t_n : \partial\Delta \to \mathbb{Z}$ Borel függvénypár, hogy

$$M_1^{s_n(x)} M_2^{t_n(x)} = M(T^{n-1}x)^{-1} \dots M(x)^{-1} \qquad \forall x \in \partial\Delta .$$

Az s_n, t_n szimbólumok ezután ezeket a függvénypárokat fogják jelölni. (9) -ből kapjuk,

$$(9') \qquad \varphi_0(T^n x) = M_1^{s_n(x)} M_2^{t_n(x)} \varphi_0(x) \qquad \forall_\lambda x \in \Delta \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Bevezetve az $s \equiv 1_{\{\exp(2\pi i \tau) :\ 0<\tau<\delta\}}$ és $t \equiv 1_{\partial\Delta} - s$ függvényeket, az M leképezést $M(x) = M_1^{s(x)} M_2^{t(x)}$ $(x \in \partial\Delta)$ alakban adhatjuk meg. A (8) reláció lehetővé teszi, hogy az s_n, t_n függvényeket s és t segitségével kifejezzük. Speciálisan, u szerinti teljes indukcióval látható, hogy $s_n(x) = \operatorname{mod}_2[s(x)+\dots+s(T^{n-1}x)]$. Tehát

$$M_1^{s_n(x)} = [\zeta \mapsto (-1)^{s(x)+\dots+s(T^{n-1}x)}\zeta] \quad \forall x \in \partial\Delta \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

6) Tovább pontositjuk a $(-1)^{s_n}$ függvény s -sel való kifejtését : Tekintsük az $\tilde{s}(\tau) \equiv s(\exp(2\pi i \tau))$ formulával megadott $\tilde{s} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ függvényt. Ekkor $\tilde{s}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1_{[0,\delta)}(\tau+m)$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$.

Bevezetve még az $\tilde{s}_n(\tau) \equiv s(\exp(2\pi i \tau)) + s(T\exp(2\pi i \tau)) + \ \ + s(T^{n-}\exp(2\pi i \tau$ függvényeket, kapjuk hogy $\tilde{s}_n(\tau) = \tilde{s}(\tau) + \tilde{s}(\tau-\delta) + \dots + \tilde{s}(\tau-(n-1)\delta) =$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[0,\delta)}(\tau+m-k\delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[k\delta,(k+1)\delta)}(\tau+m) =$$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1_{[0,n\delta)}(\tau+m)$. Vagyis $\tilde{s}_n$ periodikus folytatása (1 hosszuságu periodusok mellett a $\tau \mapsto \begin{cases} \operatorname{ent}(n\delta+1) & 0 \le \tau < n\delta - \operatorname{ent}(n\delta) \\ \operatorname{ent}(n\delta) & n\delta - \operatorname{ent}(n\delta) \le t < 1 \end{cases}$ függvénynek. Mivel $\int_{\partial\Delta} (-1)^{s_n} d\lambda = \int_0^1 (-1)^{\tilde{s}_n(\tau)} d\tau$, ez azt jelenti, hogy valahányszor $\{n_m\}$ egy olyan $+\infty$ -hez tartó indexsorozat, melyre $\mathrm{dist}(n_m\delta,\{2k-1:\ k\in\mathbb{N}\})\to 0$ $(m\to\infty)$, mindannyiszor $\int_{\partial\Delta}(-1)^{s_{n_m}}\,d\lambda\to -1$, azaz a $\{(-1)^{s_{n_m}}\}$ függvénysorozat mértékben (λ szerint) az $1_{\partial\Delta}$ függvényhez tart. Igy a klasszikus Riesz-Weyl Lemma szerint létezik egy olyan $\{n_{m_j}\}$ részsorozata az $\{n_m\}$ -nek, amelyre $(-1)^{s_{n_{m_j}}(x)}\longrightarrow -1$ $(j\to\infty)$ $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$, vagy ami ugyanaz, $s_{n_{m_j}}(x)\to 1$ $(j\to\infty)$ $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$.

Hasonlóan, a $\mathrm{dist}(n'_m\delta,\{2k\ :\ k\in\mathbb{N}\})\to 0$ $(m\to\infty)$ relációból egy olyan $\{n'_{m_j}\}$ részsorozat létezése következik, amelynél $s_{n_{m_j}}(x)\to 0$ $(j\to\infty)$ $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$.

7) Olyan $n_m\to\infty$ indexsorozat, amelyre $\mathrm{dist}(n_m\delta,\{2k-1:\ k\in\mathbb{N}\})\to 0$ $(m\to\infty)$ áll, létezik. (Bizonyitás : Az $\{\exp(\pi in\delta)\ :\ n\in\mathbb{N}\}$ halmaz sürü $\partial\Delta$ -ban, és a $\mathrm{dist}(n_m\delta,\{2k-1\ :\ k\in\mathbb{N}\})\to 0$ reláció ekvivalens $\exp[2\pi i(\delta/2)n_m]\to -1$ -gyel.) Világos, hogy bármely ilyen $\{n_m\}$ sorozatra $\exp(2\pi i\delta_{n_m})\to 1$ azaz $T^{n_m}\to id_{\partial\Delta}$ $(m\to\infty)$.

Ettől kezdve jelöljön $\{n'_m\}$ egy olyan rögzitett indexsorozatot, melyre $n'_m\to\infty$, $T^{n_m}\to id_{\partial\Delta}$ és $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$ $s_{n_m}(x)\to 1$ $(m\ \ \infty)$.

Tegyük fel ezután, hogy $\{n_m\}$ egy olyan indexsorozat, hogy $n_m\to\infty$, $T^{n_m}\to id_{\partial\Delta}$ és $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$ $s_{n_m}(x)\to 0$ $(m\to\infty)$.

Mivel $\mathrm{range}\,\varphi_0\subset G(c)=\{\pm M_2^t\ :\ t\in\mathbb{Z}\}$ (v.ö. 4)) és mivel $G(c)$ -nek a torlódási pontjai a tőle diszjunkt -1 és 1 pontok valahányszor $c\neq\pm 1$, $\mathrm{range}\,\varphi_0$ egy diszkrét részhalmaza $\mathbb{C}$ -nek. A Lebesgue-féle Eltolási Tétel szerint a $T^{n'_m}\to id_{\partial\Delta}$ relációból az következik, hogy $\varphi_0(T^{n'_m}x)\to\varphi_0(x)$ $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$. Hasonlóan, $\varphi_0(T^{n_m}x)\to\varphi_0(x)$ $\forall_\lambda x\in\partial\Delta$. Tehát, mivel a $\mathrm{range}\,\varphi_0$ halmaz diszkrét,

(10) $\forall_\lambda\ x \in \partial\Delta \quad \exists m_0(x) \quad \forall m > m_0(x)$

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(T^{n'_m}(x)) = M_1^{s_{n'_m}(x)} M_2^{t_{n'_m}(x)} \varphi_0(x) = M_1 M_2^{t_{n'_m}(x)} \varphi_0(x)$$

$$\text{és} \quad \varphi_0(x) = \varphi_0(T^{n_m}(x)) = M_1^{s_{n_m}(x)} M_2^{t_{n_m}(x)} \varphi_0(x) = M_2^{t_{n_m}(x)} \varphi_0(x) \ .$$

Tehát $\forall_\lambda\ x \in \partial\Delta \ \exists t', t'' \in \mathbb{Z} \quad M_1 M_2^{t} \varphi_0(x) = M_2^{t} \varphi_0(x) = \varphi_0(x)$.

Mivel minden $t'' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ -ra az M_2^t transzformáció fixpontjai -1 és 1 , (10) csak akkor állhat fenn, ha $\forall_\lambda\ x \in \partial\Delta \ \exists m_0(x)$ $\forall m > m_0(x) \quad t_{n_m}(x) = 0$. Vagyis

(10') Ha $n_m \to \infty$ egy olyan sorozat, hogy $T^{n_m} \to id_{\partial\Delta}$ és

$$\forall_\lambda\ x \in \partial\Delta \quad s_{n_m}(x) \to 0, \text{ akkor } t_{n_m}(x) \to 0 \quad \forall_\lambda\ x \in \partial\Delta \ .$$

8) Megmutatjuk, hogy (10') lehetetlen. Valóban, be lehet látni, hogy

a) Létezik páratlan számoknak olyan $n_m \to \infty$ sorozata, hogy $T^{n_m} \to id_{\partial\Delta}$ és $\forall_\lambda\ x \in \partial\Delta \quad s_{n_m}(x) \to 0$,

b) $\mathrm{mod}_2\ s_n(x) + t_n(x) = \mathrm{mod}_2 n \quad \forall x \in \partial\Delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ekkor b) szerint tetszőleges n_m sorozata, amely az a) -ban felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik, fennáll hogy $2 \nmid t_{n_m}(x)$ $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \partial\Delta$, amiből $t_{n_m}(x) \not\to 0 \quad \forall x \in \partial\Delta$ következik. A kapott ellentmondás bizonyitja a tételt.

a) bizonyitása : A 6) lépés konkluziója szerint az a) állitás ekvivalens azzal, hogy található páratlan számoknak olyan $n_k^* \to \infty$ sorozata, amelyre $\mathrm{dist}(n_m^* \delta, \{2k : k \in \mathbb{N}\}) \to 0$, vagy ami ugyanaz, $\exp[2\pi i n_m(\delta/2)] \to 1 \quad (m \to \infty)$. Ilyen tulajdonságu páratlan $\{n_k^*\}$ sorozat azonban nyilván létezik, hiszen az $\{\exp[2\pi i(2\ell+1)\delta/2] : \ell \in \mathbb{N}\}$ halmaz sürü $\partial\Delta$ -ban (mivel $\delta \notin \mathbb{Q}$).

b) bizonyitása n szerinti teljes indukcióval történik.

$n=1$ -re $M_1^{s_1(x)} M_2^{t_1(x)} = M(x)^{-1}$ ($= M_1^{-1}$ vagy M_2^{-1}). Tehát vagy $s_1(x) = 1$ és $t_1(x) = 0$ vagy $s_1(x) = 1$ és $t_1(x) = 0$, azaz $\mathrm{mod}_2\, s_1(x)+t_1(x) = \mathrm{mod}_2 1 = \mathrm{mod}_2 n$.

Az indukciós lépés véghezviteléhez vegyük észre, hogy

$$M_1^{s_{n+1}(x)} M_2^{t_{n+1}(x)} = M(T^n x)^{-1} M(T^{n-1}x)^{-1} \dots M(x)^{-1}) = M(T^n x)^{-1} M_1^{s_n(x)} M_2^{t_n(x)} .$$

Most három eset lehetséges :

i) Ha $M(T^n x) = M_1$, akkor $M_1^{s_{n+1}(x)} M_2^{t_{n+1}(x)} = M_1^{s_n(x)-1} M_2^{t_n(x)} =$

$= M_1^{\mathrm{mod}_2\, s_n(x)-1} M_2^{t_n(x)}$, azaz $\mathrm{mod}_2 [s_{n+1}(x)+t_{n+1}(x)] = \mathrm{mod}_2 [s_n(x)-1+t_n(x)] =$

$=$ az indukciós feltevés miatt $= \mathrm{mod}_2(n-1) = \mathrm{mod}_2(n+1)$.

ii) Ha $M(T^n x)=M_2$ és $s_n(x)=0$, akkor $M_1^{s_{n+1}(x)} M M_2^{t_{n+1}(x)} =$

$= M_2^{-1} M_2^{t_n(x)}$, azaz $0 = s_{n+1}(x)$ és $t_{n+1}(x) = t_n(x)-1$. Tehát

$\mathrm{mod}_2 [s_{n+1}(x)+t_{n+1}(x)] = \mathrm{mod}_2 [s_n(x)+t_n(x)] = \mathrm{mod}_2(n-1) = \mathrm{mod}_2(n+1)$.

iii) Ha $M(T^n x)=M_2$ és $s_n(x)=1$, akkor $M_1^{s_{n+1}(x)} M_2^{t_{n+1}(x)} =$

$= M_2^{-1} M_1 M_2^{t_n(x)} =$ (8) szerint $= M_1 M_2^{t_n(x)+1}$, azaz $\mathrm{mod}_2 [s_n(x)+t_n(x)] =$

$= \mathrm{mod}_2 [s_n(x)+t_n(x)+1] = \mathrm{mod}_2(n+1)$.

Ezzel a 3.Tétel bizonyitása teljes.

A 3.Tételben megjelenő ellenpélda konstrukciója tul speciálisnak tünhet. Valójában azonban a mértékterek finomszerkezete lehetővé teszi, hogy a segitségével eldönthessük a legáltalánosabb L^∞-tipusu E terek esetében is az Aut $B(E)$ csoport fixpontproblémáját. Az általánosithatóság kulcsa a következő

<u>B Tétel.</u> (D. Maharam [30]). Tetszőleges σ-véges μ mértékhez léteznek $\rho_1, \rho_2, \dots > 0$ sulyok és $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \dots$ kardinalitások ugy, hogy $L^1(\mu) \simeq L^1(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda^{\mathfrak{n}_n})$. [4)]

---

4) $\mathfrak{n} > 0$ -ra $\lambda^{\mathfrak{n}}$ jelöli a λ mérték $\mathfrak{n}$-ik hatványát (a $(\partial\Delta)^{\mathfrak{n}}$ tartóhalmazon. λ^0 definició szerint egy atom 1 sullyal (a λ^0-mérhető halmazok $\partial\Delta$ és $\emptyset$; $\lambda^0(\partial\Delta) \equiv 1$) .

11.Lemma. Legyen X egy diszkrét topologikus tér. Ekkor minden $F \in \mathrm{Aut}\, \overline{B}(C_b(X))$ -re létezik (egy egyértelműen meghatározott) T permutációja az X halmaznak és egy $M : X \to \mathrm{Aut}\, \overline{\Delta}$ függvény ugy, hogy $F = [f \mapsto [x \mapsto M(x)f(Tx)]]$.

Bizonyitás. Legyen βX az X tér Stone-Čech kompaktifikáltja és jelölje Φf egy $f \in C_b(X)$ függvény folytonos kiterjesztettjét βX -re. Most az $\hat{F} \equiv \Phi F \Phi^{-1}$ leképezés egy biholomorf automorfizmusa $B(C(\beta X))$ -nek. Mivel a βX tér izolált pontjai éppen az X halmaz pontjai (v.ö. [10]) és mivel egy topologikus tér automorfizmusai izolált pontot izolált pontba küldenek, fennáll $T_{\hat{F}}(X) = X$. Innen $(Ff)(x) = (\Phi^{-1}\hat{F}\Phi f)(x) = (\hat{F}\Phi f)|_X(x) =$

$= (\hat{F}\Phi f)(x) = [\hat{F}(\Phi f)](x) = M_{\hat{F}}(x)[(\Phi f)(T_{\hat{F}}x)] =$ mivel $T_{\hat{F}}x \in X$ $=$

$= M_{\hat{F}}(x)f(T_{\hat{F}}x)$.

2.Következmény. Diszkrét X tér esetén minden $F \in \mathrm{Aut}\overline{B}(C_b(X))$ -nek van fixpontja.

Bizonyitás. Jelölje τ a pontonkénti konvergencia topológiáját $C_b(X)$ -en. Vegyük észre, hogy $\overline{B}(C_b(X))$ ezzel a topológiával nem más (halmazelméletileg is) mint a $\overline{\Delta}^X$ szorzattér amely Tyihonov klasszikus tétele szerint kompakt. Másrészről a 11.Lemmából azonnal következik, hogy minden $F \in \mathrm{Aut}\, \overline{B}(C_b(X))$ leképezés $\tau \to \tau$ folytonos. Igy a Tyihonov-Schauder Fixponttétel [5] mutatja, hogy bármely $F \in \mathrm{Aut}\, \overline{B}(C_b(X))$ -nek van fixpontja.

4.Tétel. Legyen E egy olyan M-háló (def. ld.[33]) amelynek van egy $^*E$ preduálja. Ekkor a következő tulajdonságok ekvivalensek :

a) Bármely $F \in \mathrm{Aut}\, \overline{B}(E)$ -nek van fixpontja

b) $E \simeq C_b(X)$ valamely diszkrét X térre.

Bizonyitás. M. Rieffel [32] egy tétele szerint a preduálos M-hálók pontosan az L^{∞}-terek. Tehát az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $^{*}E = L^{1}(X,\mu)$ és $L^{\infty}(X,\mu)$ egy alkalmasan rögzitett (X,μ) mértéktér mellett.

Ha a μ mérték atomos, akkor a b) feltétel triviálisan teljesül, és igy a 2.Következményből adódik a) .

Tegyük fel, hogy μ nem-atomos. Ekkor b) nem áll, tehát elegendő kimutatnunk egy fixpont nélküli $F \in \mathrm{Aut}\,\bar{B}(E)$ létezését. Rögzitsük egy olyan véges μ mértékü X' részhalmazát az X térnek, amelyen a $\mu|_{X'}$ mérték nem atomos. A B Tétel következtében létezik olyan (μ-mérhető) $Y \subset X'$ halmaz és $\mathfrak{a} > 0$ kardinalitás, hogy $\mu(Y) > 0$ és $L^{1}(Y,\mu|_{Y}) \simeq L^{1}((\partial\Delta)^{\mathfrak{a}}, \mu(Y)\lambda^{\mathfrak{a}})$ $(\simeq L^{1}((\partial\Delta)^{\mathfrak{a}}, \lambda^{\mathfrak{a}}))$. Ezért $E \simeq \bigoplus_{j=1,2}^{c_0} E_j$ ahol $E_1 \equiv L^{\infty}((\partial\Delta)^{\mathfrak{a}}, \lambda^{\mathfrak{a}})$ és $E_2 \equiv L^{\infty}(X \setminus Y, \mu|_{X\setminus Y})$.

Igy a tétel bizonyitásához elegendő belátni, hogy létezik fixpont nélküli $F_1 \in \mathrm{Aut}\,\bar{B}(E_1)$. (ugyanis ekkor az $F \equiv [(f_1,f_2) \mapsto (F_1 f_1, f_2)]$ leképezés egy fixpont nélküli eleme $\mathrm{Aut}\,\bar{B}(\bigoplus_{j=1,2}^{c_0} E_j)$ -nek) .

A 3.Tételből közvetlenül adódik, hogy az

$$F_1 : f \mapsto [(\partial\Delta)^{\mathfrak{a}} \ni (\zeta_\alpha : \alpha < \mathfrak{a}) \mapsto M(\zeta_0) f((T\zeta_0), \zeta_\alpha : 0 < \alpha < \mathfrak{a})]$$

formulával definiált lekápezésnek (ahol $M : \partial\Delta \to \mathrm{Aut}\,\bar{\mathbb{C}}$ és $T : \partial\Delta \to \partial\Delta$ ugyanazok, mint a 3.Tételben) nincs fixpontja, de $F_1 \in \mathrm{Aut}\,\bar{B}(E_1)$.

3. Fejezet

Az Aut B csoport linearitása L^p terekben $p\neq 2,\infty$ esetén

A végtelen dimenziós biholomorf automorfizmusokkal kapcsolatos első érdekes eredmény [16] az volt, hogy a zárt egységgömb biholomorf automorfizmusai egy Hilbert térben, vagy ami ugyanaz, egy L^2-térben mind rendelkeznek fixponttal. Az előző fejezetben karakterizáltuk az összes olyan L^∞-tereket, ahol az Aut $\overline{B}$ csoport minden elemének van fixpontja. Mind a két esetben könnyen és pontosan leirható volt egy paraméteres algebrai formulával az Aut $\overline{B}$ csoport egy általános tagja, a nehézségeket ezeknek a formuláknak a topológiai szempontból való bonyolult viselkedése jelentette. Mi történik a többi L^p terekben? Egy pillantást vetve a 2-dimenziós speciális esetre[5)], arra a sejtésre juthatunk, hogy $p\neq 2,\infty$ mellett az Aut $\overline{B}(L^p(\mu))$ leképezéscsoport csak lineáris elemekből áll, hogyha $\dim L^p(\mu) > 1$. Azonban ezt a tényt jóval nehezebb bebizonyitani, mint igazolni az Aut $\overline{B}(L^2(\mu))$ vagy Aut $B(L^\infty(\mu))$ tagjait leiró algebrailag komplikáltabb formulákat. Csak nemrégiben sikerült ezt a sejtést L^1 -re bebizonyitani : az Aut-invariáns távolságokkal kapcsolatos mélyreható vizsgálatai egyik következményeképpen E. Vesentininek [46] . Amint a [46] cikk is rámutat, ugyanez az eredmény megkapható T. Suffridge-nak [40] egy konvex értékkészletü holomorf leképezésekre vonatkozó tételéből is. Ahhoz azonban, hogy a [46] - ill. [40] -beli

---

5) Thullen [43] klasszikus tétele szerint, minden olyan korlátos $D\subset\mathbb{C}^2$ Reinhardt tartomány, amelynél Aut D tartalmaz nem-lineáris elemeket is, lineárisan ekvivalens a $\{(\zeta_1,\zeta_2): |\zeta_1|,|\zeta_2|<1\}$ vagy $\{(\zeta_1,\zeta_2): |\zeta_1|^p+|\zeta_2|^2<1\}$ $(0<p<\infty)$ alakzat valamelyikével.

módszert az összes L^p-terekre egyszerre alkalmazhatóvá tegyük, kemény algebrai jellegü problémákkal kell szembenéznünk, amelyek megoldása — ugy tünik — inkább az általános elmélet lényeges továbbfejlesztését mint a direkt meggondolást igényli.

Itt egy olyan uj megközelitését mutatjuk be a problémának, amely bármely L^p-térre alkalmazható. A dolgozat további részéhez kiindulópontunk egy a Kaup-Upmeier [27] szerzőpáros ill. J-P. Vigué [49] által egyidőben talált tétel, amely a Banach térbeli korlátos körszerü tartományok biholomorf automorfizmuscsoportját a csoport Lie-algebrájának a tartományokban teljes holomorf vektormezőkkel való azonosithatósága alapján irja le. Mielőtt ezt kimondanánk, néhány terminológiával kapcsolatos megjegyzést teszünk:

4.Definició. Legyen E egy Banach tér és $S \subset E$. Mint szokásos, az E teret azonositjuk azzal az M_E Banach sokasággal, amelynek tartóhalmaza E és atlasza $\{(E, id_E)\}$, továbbá azonositjuk E-t az M_E érintőtereivel is. Ennek megfelelően egy S fölötti v vektormezőn egyszerüen egy $S \longrightarrow E$ leképezést értünk. A v vektormező exponenciális képe (amit $\exp(v)$ -vel fogunk jelölni) az a F leképezés, amelynek értelmezési tartománya az $S_v \equiv \{f \in S : \exists! \varphi_f$ folytonos $[0,1] \longrightarrow S$ leképezés $\varphi_f(0) = f$ és $\forall t \in (0,1)$ $\varphi_f'(t) = v(\varphi_f(t))\}$ halmaz és amelyre $F(f) \equiv \varphi_f(1)$ $(f \in S_v)$. Hogyha $H \subset S$ és $\operatorname{dom} \exp(tv|_H) \supset H$ $\forall t \in \mathbb{R}$, akkor azt mondjuk, hogy a v vektormező teljes H-ban. Hogyha S^o sürü S-ben, akkor $\operatorname{Aut}^o S \equiv \{F \in \operatorname{Aut} S : \exists L \in \mathcal{L}(E,E) \;\; F = L|_S\}$ -et fogunk irni.

C Tétel. (Kaup-Upmeier [27], Vigué [49]). Legyen E egy Banach tér és D egy korlátos körszerü csillag alaku tartomány E-ben (vagyis $\bar{\Delta}D = D$). Ekkor

a) $\mathrm{Aut}\, D = (\mathrm{Aut}^{o} D)(\mathrm{Aut}_{o} D)$

b) $\mathrm{Aut}_{o} D = \exp \mathcal{V} (\equiv \{\exp(v) : v \in \mathcal{V}\})$, ahol $\mathcal{V}$ a D'-n értelmezett benne teljes holomorf vektormezők családja.

c) $(\mathrm{Aut}\, D)\{0\}$ $(\equiv \{F(0) : F \in \mathrm{Aut}\, D\})$ egy E-beli altér metszete D-vel. Az $\mathrm{Aut}_{o} D$ transzformációcsoport tranzitiv az $(\mathrm{Aut}\, D)\{0\}$ orbiton.

d) Létezik egy és csak egy olyan konjugált-lineáris folytonos $c \mapsto q_c$ leképezése az $E_o \equiv \mathbb{C}(\mathrm{Aut}\, D)\{0\}$ altérnek a szimmetrikus $E \times E \to E$ bilineáris formák terébe azzal a tulajdonsággal, hogy $\mathcal{V} = \{[D \ni f \mapsto c + \ell(f) + q_c(f,f)] : c \in E_o$ és ℓ egy D-ben teljes lineáris vektormező E-n$\}$.

e) Minden $F \in \mathrm{Aut}\, D$ kiterjeszthető holomorf módon a $\overline{D}$ egy (alkalmas) környezetére.

<u>5.Definició.</u> Legyenek E és D mint a C Tételben. A továbbiakban $\log^{*}\mathrm{Aut}\, D$-vel fogjuk jelölni azoknak az E fölött értelmezett holomorf vektormezőknek a családját, amelyek teljesek D-ben.

A C Tétel b) ill. d) pontjaiból világos, hogy a $\log^{*}\mathrm{Aut}\, D$ halmaz egy $\mathbb{R}$-lineáris alsokasága a másodfokú $E \to E$ polinomok terének, és hogy $\mathrm{Aut}_{o} D = \{\exp(v|_D) : v \in \log^{*}\mathrm{Aut}\, D\}$.

<u>12.Lemma.</u> Tegyük fel, hogy E egy Banach tér, D egy korlátos nyitott halmaz E-ben, S egy nyitott környezete D-nak és v egy Lipschitz folytonos vektormező S-en. Ekkor ekvivalensek: a) v teljes D-ben, b) v teljes $\partial\Delta$-ben.

<u>Bizonyitás.</u> a)$\Rightarrow$b) Vezessük be az $F_t(f) \equiv \exp(tv)(f)$ $(f \in D,\ t \in \mathbb{R})$ ill. $K \equiv \mathrm{Lip}\, v$ $\left(= \sup\limits_{f,g \in S} \frac{\|v(f)-v(g)\|}{\|f-g\|}\right)$ jelöléseket. Ekkor az exp leképezés definiciója szerint fennáll

$$(10) \qquad F_t(f) = x + \int_0^t v(F_\tau(f))\, d\tau \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

valahányszor $f \in D$. Rögzitsünk egy tetszőleges $\sigma \in \partial D$ pontot, és legyen $f_1, f_2, \ldots$ egy σ-hez tartó sorozat D-ben. (10)-ből a Bellmann Egyenlőtlenség (ld. [4]) alapján kapjuk, hogy

$$\|F_t(f_n) - F_t(f_m)\| \le \|f_n - f_m\| e^{Kt} \qquad (n,m \in \mathbb{N}\,;\ t \in \mathbb{R}).$$

Vagyis a $[\tau \longmapsto F_\tau(f_n)]$ $(n=1,2,\ldots)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\mathbb{R}$ minden korlátos részhalmazán. Igy a $\varphi(t) \equiv \equiv \lim_{D \ni f \to \sigma} F_t(x)$ definició bármely $t \in \mathbb{R}$ mellett értelmes, és a φ függvény kielégiti a (10) integrálegyenletet (a $t \longmapsto F_t(f)$ függvény helyére irva). Mivel $\varphi(t) \in \overline{D}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, és mert a v vektormező teljes D-ben, fennáll $\operatorname{range} \varphi \subset \overline{D} \setminus D = \partial D$, azaz v teljes ∂D-ben is.

b)$\Rightarrow$a) Legyen $f_o \in D$ tetszőlegesen rögzitve, és jelölje ϕ a $\{\frac{d}{dt}x = v(x), x(0) = f_o, x \in D\}$ kezdetiérték-probléma maximális megoldását. Azt kell megmutatnunk, hogy $\operatorname{dom} \varphi = \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy ez nem áll. Mivel a D alakzat korlátos és mert a v mező Lipschitz-folytonos, $\sup_{f \in D} \|v(f)\| < \infty$. Ezért szükségképpen létezik $t_o \in \mathbb{R}$, melyre $\varphi(t_o) \in \partial D$ (v.ö. [4]). Ekkor azonban a v mező ∂D-ben való teljessége miatt $\operatorname{range} \varphi \subset \partial D$ is teljesül, ami ellentmond az $f_o \in D$ relációnak.

<u>3.Propozició.</u> Legyen E egy Banach tér és D egy korlátos körszerü csillag alaku tartomány E-ben. Jelöljük p-vel a D alakzat Minkowski-funkcionálját[6] és tekintsünk egy $v: f \mapsto c + \ell(f) + q(f,f)$ alaku vektormezőt E-n, ahol $c \in E$, $\ell \in \mathcal{L}(E,E)$ ill. q egy folytonos bilineáris $E \times E \longrightarrow E$ leképezés.

Ekkor $v \in \log^* \operatorname{Aut} D$ és $\partial D = \{f \in E : p(f) = 1\}$ esetén

$$(11) \qquad \operatorname{Re} \langle \ell(f), \Phi \rangle = p(f)^2 \, \overline{\langle c, \Phi \rangle} + \langle q(f,f), \Phi \rangle = 0$$

valahányszor $f \in E$, $\Phi \in E^*$ és $\operatorname{Re} \Phi \in \operatorname{subgrad}\big|_f\, p$.[7]

---

[6], [7] -ot ld. a következő lap alján

Bizonyitás. Legyen $\vartheta\in\mathbb{R}$, $g\in\partial D$ és $\Phi\in\{\Psi\in E^*: \mathrm{Re}\Psi\in \mathrm{subgrad}|_g\, p\}$ tetszőlegesen rögzitve. A 12.Lemma szerint a v mező teljes ∂D-ben, ezért a $\varphi(t)\equiv e^{-i\vartheta}\exp(tv)(e^{i\vartheta}g)$ definició értelmes minden $t\in\mathbb{R}$ mellett, sőt $\varphi(t)\in\partial D$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Ezért $0=\frac{1}{t}[p(\varphi(t)-p(\varphi(0))]\geq$ $\geq \mathrm{Re}\left\langle\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t},\Phi\right\rangle-\bar{\bar{o}}(1)$ és $0=\frac{1}{t}[p(\varphi(-t))-p(\varphi(0))]\geq$ $\geq \mathrm{Re}\left\langle\frac{\varphi(-t)-\varphi(0)}{t},\Phi\right\rangle-\bar{\bar{o}}(1)$ $\forall t>0$. Innen $t\downarrow 0$ mellett kapjuk, hogy $0\geq \mathrm{Re}\left\langle e^{-i\vartheta}v(e^{i\vartheta}g),\Phi\right\rangle$ és $0\geq\mathrm{Re}\left\langle -e^{-i\vartheta}v(e^{i\vartheta}g),\Phi\right\rangle$. Tehát $0=\mathrm{Re}\left\langle e^{-i\vartheta}v(e^{i\vartheta}g),\Phi\right\rangle=\mathrm{Re}\left\langle c+e^{i\vartheta}\ell(g)+e^{2i\vartheta}q(g,g),e^{-i\vartheta}\Phi\right\rangle$ $\forall\vartheta\in\mathbb{R}$. Vagyis $0=\mathrm{Re}\left[e^{-i\vartheta}\langle c,\Phi\rangle+\ell(g)+e^{i\vartheta}\cdot q(g,g),\Phi\right\rangle=$ $=\mathrm{Re}\left[\langle\ell(g),\Phi\rangle+e^{i\vartheta}(\overline{\langle c,\Phi\rangle}+\langle q(g,g),\Phi\rangle\right)$ $\forall\vartheta\in\mathbb{R}$, ahonnan

(11') $\mathrm{Re}\langle\ell(g),\Phi\rangle=\overline{\langle c,\Phi\rangle}+\langle q(g,g),\Phi\rangle=0$ $(p(g)=1,\ \Phi\in\mathrm{subgrad}|_g\, p)$.

Legyen ezután $f\neq 0$ tetszőleges vektor E-ből és tegyük fel, hogy $\mathrm{Re}\Phi\in\mathrm{subgrad}|_f\, p$. Mivel $0\in D$ és a D halmaz nyitott, $p(f)>0$. Tekintsük ekkor a $g\equiv f/p(f)$ vektort. A p funkcionál pozitiv-homogenitása miatt egyrészt $p(g)=1$, másrészt $\mathrm{subgrad}|_g\, p=\mathrm{subgrad}|_f\, p$. Tehát alkalmazhatjuk (11') -t ahonnan az ℓ leképezés linearitása ill. a q bilinearitása miatt rögtön adódik (11).

3.Következmény. Ha $[f\mapsto c+\ell(f)+q(f,f)]\in\log^*\mathrm{Aut}\,B(E)$, akkor

(11'') $\mathrm{Re}\langle\ell(f),\Phi\rangle=\|f\|^2\,\overline{\langle c,\Phi\rangle}+\langle q(f,f),\Phi\rangle=0$

valahányszor $f\in E$, $\Phi\in E^*$ és $\langle f,\Phi\rangle=\|f\|\cdot\|\Phi\|_*$.

---

[6] azaz $p(f)\equiv 1/\sup\{\lambda\in\mathbb{R}_+:\lambda\in D\}$ $(f\in E)$.

[7] A p függvény szubgradiense az f helyen definició szerint azon valós-lineáris folytonos $\Lambda: E\to\mathbb{R}$ funkcionálok (esetleg üres) halmaza, amelyekre $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[p(f+h)-(p(f)+\Lambda(h))]\geq 0$. Jólismert, hogy minden folytonos valós-lineáris $\Lambda: E\to\mathbb{R}$ funkcionál (egyértelmüen) felirható $\Lambda=\mathrm{Re}\Phi$ alakban, ahol $\Phi\in E^*$.

Bizonyitás. Jól-ismert, hogy az egységgömb Minkowski funkcionálja épp a norma-függvény, és hogy minden $f \in E \setminus \{0\}$ vektor mellett $\{\Phi \in E^* : \mathrm{Re}\Phi \in \mathrm{subgrad}|_f \|.\|\} = \{\Phi \in E^* : \langle f,\Phi\rangle = \|f\| \cdot \|\Phi\|_*\}$.

4.Következmény. Ha ∂D egy C^1-sima alsokasága E -nek, ugy $[f \mapsto c+\ell(f)+q(f,f)] \in \log^* \mathrm{Aut}\, D$ akkor és csak akkor, ha (11) teljesül minden $f \neq 0$ -ra $\Phi = \mathrm{grad}|_f\, p$ mellett.

Bizonyitás. Ebben az esetben a p funkcionál is folytonos (valós) Fréchet-gradienssel rendelkezik az $E \setminus \{0\}$ tartományon, és egy $g \in \partial D$ pontban a ∂D felület érintő hipersikja azon $\{h \in E : \langle h, \mathrm{grad}|_g\, p\rangle_{\mathbb{R}} = 1\}$ $\mathbb{R}$-affin alsokasága E -nek. Igy a (11) reláció épp azt fejezi ki, hogy a $v \equiv [f \mapsto c+\ell(f)+q(f,f)]$ vektormező érinti ∂D -t. Ekkor azonban a $\{\frac{d}{dt} x = v(x)\ ,\ x(0) = f\}$ kezdetiérték-probléma megoldásai $f \in \partial D$ esetén végig ∂D -ben futnak, és tekintve, hogy a v vektormező korlátos ∂D fölött, ez azt jelenti, hogy v teljes ∂D -ben (v.ö. [4]), azaz a 12.Lemma szerint v teljes D -ben.

A másik irányu implikáció a Propozició speciális esete.

Ennél a pontnál visszatérhetünk az L^p-terek egységgömbjéhez:

5.Tétel. Az $E \equiv L^p(X,\mu)$ tér egységgömbjének minden biholomorf automorfizmusa egy E-unitér lineáris leképezés megszoritottja az egységgömbre valahányszor $p \neq 2,\infty$ és $\dim E > 1$.

Bizonyitás. Legyen $p \neq \infty$. E^*-ot a szokásos módon azonositjuk az $L^q(X,\mu)$ térrel, ahol $q \equiv \frac{p}{p-1}$. Vagyis $\langle f,\Phi\rangle \equiv \int_X f\Phi\, d\mu$ $(f \in L^p(X,\mu)\ ,\ \Phi \in L^q(X,\mu))$. Vezessük be továbbá az $f^* \equiv \bar{f}|f|^{p-2}$ $(f \in L^p(X,\mu))$ jelölést. Most $\int_X |f^*|^q\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu < \infty$, azaz $f^* \in L^q(X,\mu)$ és $\langle f,f^*\rangle = \int_X |f|^p\, d\mu = \|f\|^p = \|f\| \cdot \|f^*\|_*$ $\forall f \in L^p(X,\mu)$.

Legyen X_1 és X_2 két μ-mérhető részhalmaza X -nek, $\rho\geq 0$ és $\vartheta\in\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $0<\mu(X_1),\mu(X_2)<\infty$. Tekintsük az $f\equiv 1_{X_1}+\rho e^{i\vartheta}1_{X_2}$ függvényt. Nyilván $f\in L^p(X,\mu)$, $\|f\|=[\mu(X_1)+\rho^p\mu(X_2)]^{1/p}$ és $f^*=1_{X_1}+\rho^{p-1}e^{-i\vartheta}1_{X_2}$. Tehát ha $c\in E$ és $q: E\times E\to E$ egy olyan bilineáris forma, amelyre a $[g\mapsto c+q(g,g)$ vektormező teljes $B(E)$ -ben, akkor $\alpha^m_{jk}\equiv\langle q(1_{X_j},1_{X_k}),1_{X_m}\rangle$-et és $\gamma_m\equiv\langle c,1_{X_m}\rangle$ -et irva, a 3.Következmény szerint

$$[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}(\gamma_1+\rho^{p-1}\gamma_2)+\alpha^1_{11}+2\alpha^1_{12}\rho e^{i\vartheta}+\alpha^1_{22}\rho^2e^{2i\vartheta}+$$

$$+\alpha^1_{11}\rho^{p-1}e^{-i\vartheta}+2\alpha^2_{12}\rho^p+\alpha^2_{22}\rho^{p+1}e^{i\vartheta}=0$$

minden $\rho\in\mathbb{R}_+$ és $\vartheta\in\mathbb{R}$ mellett. Vagyis

$$e^{2i\vartheta}\alpha^1_{22}\rho^2+e^{i\vartheta}\{\alpha^2_{22}\rho^{p+1}+2\alpha^1_{12}\rho+\rho^{p-1}\gamma_2[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}\}+$$

$$+\{\alpha^1_{11}+2\alpha^2_{12}\rho^p+\gamma_1[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}\}+e^{-i\vartheta}\alpha^2_{11}\rho^{p-1}=0\quad\forall\vartheta\in\mathbb{R}$$

valahányszor a $\rho\in\mathbb{R}_+$ szám tetszőlegesen rögzitve van. Ezért

$$0=\alpha^1_{22}=\alpha^2_{22}\rho^{p+1}+2\alpha^2_{12}\rho+\rho^{p-1}\gamma_2[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}=$$

$$=\alpha^1_{11}+2\alpha^2_{12}\rho^p+\gamma_1[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}=\alpha^2_{11}\qquad\forall\rho\in\mathbb{R}_+$$

Speciálisan, $0=\lim_{\rho\uparrow\infty}\frac{1}{\rho^2}\{\alpha^1_{11}+2\alpha^2_{12}\rho^p+\gamma_1[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}\}$. Azonban mivel $\alpha^1_{11}/\rho^2\to 0$ és $\gamma_1[\mu_1+\rho^p\mu_2]^{2/p}\to\gamma_1\mu_2^{2/p}$, $p\neq 2$ esetén ebből $\alpha^2_{12}=\gamma_1=0$ következik.

Tehát (γ_1 definiciója és az X_1, X_2 halmazok tetszőlegessége miatt)

$$0=\langle c,1_{X_1}\rangle=\int_{X_1}c\,d\mu\quad\text{valahányszor }\mu(X_1)<\infty\text{ és}$$

$$\exists X_2\quad 0<\mu(X_2)<\infty\text{ és }X_1\cap X_2=\emptyset.$$

Innen azt kapjuk, hogy $c=0$ ha $\dim L^p(X,\mu)>1$. A C Tétel d) állitása szerint ez azt jelenti, hogy $\log^*\mathrm{Aut}\,B(L^p(X,\mu))$ csak lineáris vektormezőket tartalmaz ($p\neq 2,\infty$, $\dim L^p(X,\mu)>1$).

Ezért az $\mathrm{Aut}_0 B(L^p(X,\mu))$ transzformációcsoport is csak lineáris leképezésekből áll ilyenkor. Most az $\mathrm{Aut}\, B(L^p(X,\mu))$ csoport linearitása azonnal következik a 6.Tétel a) pontjából.

4. Fejezet

Egy projekciós elv

A 3.Propozicióval nyertünk egy olyan eszközt, amely sok esetben rendkivül alkalmas explicit számolások elvégzésére, ha a $\log^* \mathrm{Aut}\, D$ vektormező Lie-algebrát (és ebből az $\mathrm{Aut}_o D$ transzformációcsoportot) a D körszerü csillag alaku korlátos tartomány geometriai paraméterei (mint pl. a Minkowski-funkcionálja) segitségével kivánjuk kifejezni, feltéve hogy a ∂D felület kellőképpen sima. Az összes lehetséges ilyen D alakzatokra $\log^* \mathrm{Aut}\, D$ meghatározása a 3.Propozició direkt alkalmazásával azonban reménytelenül bonyolultnak tünik még abban a speciális esetben is, ha a véges dimenziós C^∞-sima határu tartományokra korlátozzuk vizsgálatainkat. Másrészről láttuk a (11'') formula sikeres alkalmazását az L^p-terek egységgömbjére, ami annak a ténynek volt köszönhető, hogy az alapul szolgáló mértéktér bármely két diszjunkt (mérhető) X_1, X_2 részhalmaza mellett a norma-funkcionál gradiense az 1_{X_1}, 1_{X_2} függvények lineáris kombinációinál egy jól áttekinthető viselkedésü lineáris kombinációja a $\mathrm{grad}\big|_{1_{X_1}} \|.\|$ és $\mathrm{grad}\big|_{1_{X_2}} \|.\|$ vektoroknak (L^{p*}-ban). A mostani fejezetben a 4.Tétel bizonyitási mechanizmusának a mélyebb geometriai hátterét kivánjuk tisztázni.

6.Tétel. Projekciós elv. Legyen M egy komplex Banach sokaság, M' egy alsokasága M-nek, P egy olyan holomorf $M \longrightarrow M'$ leképezés melyre $P|_{M'} = \mathrm{id}_{M'}$, és legyen v egy M-ben teljes holomorf vektormező. Tegyük fel, hogy értelmezhető M'-n egy olyan δ differenciális Finsler metrika, melyre [8])

(i) a $P'v|_{M'}$ vektormező δ szerint korlátos,

és d-vel jelölve a δ által generált metrikát M'-n

(ii) a d metrika topológiája finomabb az M' topológiájánál,

(iii) minden olyan $x_1, x_2, \ldots \in M'$ sorozatra, amely a d metrika szerint Cauchy tulajdonságu de nem konvergens, fennáll $d_{M'}(x_1, x_n) \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty)$

Ekkor a $P'v$ vektormező teljes M' -ben.

A bizonyitást hét lépésre bontjuk :

1) A Carathéodory távolság definiciójából közvetlenül látszik, hogy mivel $M' \subset M$, fennáll $d_{M'}(x,y) \geq d_M(x,y) \quad \forall x,y \in M'$. Jól-ismert továbbá, hogy — mivel P holomorf módon vetiti M -et M' -be — a P leképezés egy $d_M \to d_{M'}$ kontrakció (v.ö. [6],[48]). Minthogy $P|_{M'} = id_{M'}$, innen $d_{M'}(x,y) \leq d_M(x,y)$ $\forall x,y \in M'$. Ezzel kaptuk, hogy $d_{M'} = d_M|_{M'}$.

2) A továbbiakban használni fogjuk az $a_x(t) \equiv \exp(tv)(x)$ $(x \in M,\ t \in \mathbb{R})$ jelölést, és b_x -szel fogjuk jelölni a $\{\frac{d}{dt} y = P'(y)v(y) \ ;\ y(0) = x\}$ kezdetiérték-probléma maximális értelmezési intervallumú megoldását.

Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen rögzitett $z \in M'$ mellett

$$d_{M'}(Pa_z(h), b_z(h)) = o(h) \qquad (h \to 0) \ . \tag{12}$$

---

[8] Definició szerint, δ egy olyan $T(M') \to \mathbb{R}_+$ leképezés (itt $T(M')$ az M' sokaság érintőnyalábja), hogy minden rögzitett $x \in M'$ mellett a $T_x(M') \ni w \longmapsto \delta(x,w)$ funkcionál konvex és pozitiv-homogén, és minden (U,Φ) koordinátatérképre az $f \longmapsto \delta(\Phi^{-1}f,\ \ddot{u}(\Phi^{-1}f))$ függvény lokálisan korlátos és alulról félig folytonos valahányszor $\ddot{u}$ egy holomorf vektormező M' -n. Egy u vektormező M' -n δ-korlátos, ha $\sup\{\delta(x,u(x)) : x \in M'\} < \infty$. $P'v$ az a vektormező, amelynek értéke az $x (\in M)$ helyen $P'(x)v(x)$ $(\in T_x(M))$, ahol $P'(x)$ a P Fréchet deriváltja x -nél. Ha $x,y \in M'$, $d(x,y) \equiv \inf\{\int_0^1 \delta(\varphi(t), \varphi'(t))\, dt : \varphi\ C^1\text{-sima}\ [0,1] \to M'$ függvény, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y\}$. $d_{M'}$ a Carathéodory távolság M' fölött.

Bizonyitás : Tekintsünk egy (U,Φ) térképet az M' atlaszából, amelyre $x \in U$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető (U -nak egy alkalmas résztartományára szoritkozva és Φ -n egy affin transzformációt végrehajtva), hogy Φ egy biholomorfizmus U és valamely E Banach tér nyitott egységgömbje között. Ekkor $U \subset M'$ miatt, $h \in \{t \in \mathrm{dom}\, b_z : b_z(h) \in \Phi^{-1}(\frac{1}{2}B(E))\}$ esetén mindig

$$d_{M'}(Pa_z(h),b_z(h)) \le d_U(Pa_z(h),b_z(h)) = \text{mivel } \Phi : U \leftrightarrow B(E)$$

biholomorfizmus $= d_{B(E)}(\Phi Pa_z(h),\Phi b_z(h)) \le \mu \cdot \|\Phi Pa_z(h) - \Phi b_z(h)\|$,

ahol $\mu \equiv \sup \{d_{B(E)}(f,g)/\|f-g\| : f,g \in \frac{1}{2}B(E)\}$. Earl és Hamilton egy jól-ismert tétele (ld.[6],[48]) garantálja, hogy itt $\mu < \infty$.

A $\|\Phi Pa_z(h) - \Phi b_z(h)\| = o(h) \quad (h \to 0)$ relációt a következőképp láthatjuk be : Definició szerint a_z a $\{\frac{d}{dt} y = v(y),\ y(0)= z\}$ kezdetiérték-probléma megoldása. Igy $\|\Phi a_z(h)-(\Phi z+h\Phi'v(z))\|=o(h)$. Vagyis figyelembe véve a b_z -t definiáló differenciálegyenletet,

$$\frac{d}{dh}\Big|_0 [\Phi Pa_z(h)-\Phi b_z(h)] = \frac{d}{dh}\Big|_0 \Phi P\Phi^{-1}\, a_z(h) - \Phi'P'v(z) =$$

$= \text{lánc szabály és } a_z \text{ def.} = \Phi'P'\Phi'^{-1}\Phi'v(z) - \Phi'P'v(z) = 0$.

3) (12) felhasználásával azonnal kapjuk, hogy bármely $x,y \in$ $\in M'$ -re

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{|h|} [d_{M'}(b_x(h),b_y(h))-d_{M'}(x,y)] =$$

$$= \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{|h|} [d_{M'}(Pa_x(h),Pa_y(h))-d_{M'}(x,y)] \le$$

$$\le \lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} [d_M(a_x(h),a_y(h))-d_M(x,y)] = 0$$

mivel P egy $d_M \to d_{M'}$ kontrakció és $d_{M'} = d_M|_{M'}$ (ld. 1)).

4) Ettől kezdve feltesszük, hogy a tétel állitásával ellentétben a $P'v$ mező nem teljes M' -ben. Most rögzithetünk egy olyan $x \in M'$ pontot, melyre $\mathrm{dom}\, b_x \ne \mathbb{R}$. Legyen t_0 az egyik határpontja most a $\mathrm{dom}\, b_x$ intervallumnak. Mivel $0 \in \mathrm{dom}\, b_x$,

$t_0 \neq 0$ és igy az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $t_0 = 1$ (hiszen v helyett $\frac{1}{t_0}v$ -vel az összes meggondolások ugyanugy elvégezhetők). Tekintsük ekkor a

$$\rho(t) \equiv d_{M'}(b_x(t),\ b_x(t+\tfrac{1}{2})) \qquad (t \in [0,\tfrac{1}{2}))$$

függvényt. Vegyük észre, hogy — lévén b_z megoldása a $\{\frac{d}{dt}y = P'(y)v(y),\ y(0)=z\}$ kezdetiértékproblémának — $b_x(t+h) = b_{b_x(t)}(h)$ és $b_x(t+\frac{1}{2}+h) = b_{b_x(t+\frac{1}{2})}(h)$ valahányszor t, $t+h$, $t+\frac{1}{2}$, $t+\frac{1}{2}+h \in [0,1)$. Innen 3) alapján kapjuk, hogy

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{\rho(t+h)-\rho(t)}{|h|} \leq 0 \qquad \forall t \in [0,\tfrac{1}{2}) .$$

5) Megmutatjuk, hogy a ρ függvény lokálisan Lipschitz tulajdonságu. Mivel az előző lépés konkluziója ugy interpretálható, hogy $\varphi'(t) = 0$ mindenütt, ahol φ' létezik, ebből következik, hogy a ρ függvény konstans. Tehát

$$(13) \qquad d_{M'}(b_x(t),b_x(t+\tfrac{1}{2})) = d_{M'}(x,b_x(\tfrac{1}{2})) \qquad \forall t \in [0,\tfrac{1}{2})$$

Bizonyitás.: Elég belátni a háromszög-egyenlőtlenség miatt, hogy bármely $z \in M'$ mellett a $t \mapsto b_z(t)$ leképezés a $d_{M'}$ metrika szerint lokálisan Lipschitz tulajdonságu. Jelölje $\delta_{M'}$ a Carathéodory-féle differenciális Finsler metrikáját az M' sokaságnak (def. ld. [6], [48]). Ekkor a $\gamma: \tau \mapsto \delta_{M'}(b_z(\tau),P'v(b_z(\tau)))$ függvény lokálisan korlátos (ld. pl. [48]). Ezért ha I egy kompakt részintervalluma $\operatorname{dom} b_z$ -nek, akkor $\sup\limits_{t\in I} \gamma(t) < \infty$, és igy

$$d_{M'}(b_z(t'),b_z(t'')) \leq \left|\int_{t'}^{t''} \delta_{M'}(b_z(t),b_z'(t))\,dt\right| = \left|\int_{t'}^{t''} \gamma(t)\,dt\right| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in I} \gamma(t)\cdot|t''-t'| \qquad \text{valahányszor } t',t'' \in I .$$

6) Irjunk $K \equiv \sup\limits_{x\in M'} \delta(x,P'v(x))$ -et, és tekintsük a $t_n \equiv \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$ $(n=1,2,\ldots)$ sorozatot. Most $m \leq n$ esetén

$$d(b_x(t_m+\tfrac{1}{2}),\ b_x(t_n+\tfrac{1}{2})) \le \int_{t_m}^{t_n} \delta(b_x(t),\ b_x'(t))\,dt =$$

$$= \int_{t_m}^{t_n} \delta(b_x(t),\ P'v(b_x(t)))\,dt \le \int_{t_m}^{t_n} K\,dt = \frac{K}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}) .$$

Vagyis $\{b_x(t_n+\frac{1}{2})\}$ egy Cauchy sorozat a d metrikában. Tételezzük fel, hogy $d(b_x(t_n+\frac{1}{2}),z) \longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$ valamely $z\in M'$ pontra. Ekkor (ii) következményeképpen $P'v(b_x(t_n)) \longrightarrow P'v(z)$ $(n\to\infty)$ volna. Csakhogy most a $\tilde{b}(t) \equiv \begin{cases} b_x(t) & \text{ha } t\in \operatorname{dom} b_x \\ b_z(t-1) & \text{ha } (t-1)\in \operatorname{dom} b_z \text{ és } t\ge 1 \end{cases}$ formulával definiált függvény megoldása a $\{\frac{d}{dt}y=P'v(y),\ y(0)=x\}$ kezdetiérték-problémának és $\operatorname{dom}\tilde{b} \supsetneq \operatorname{dom} b_x$, amit a b_x maximalitása kizár. Tehát a $\{b_x(t_n+\frac{1}{2})\}$ sorozat nem konvergens a d metrikában.

7) Az (iii) feltevés szerint $d_{M'}(b_x(\frac{1}{2}),\ b_x(1-\frac{1}{2n})) =$
$= d_{M'}(b_x(t_1+\frac{1}{2}),\ b_x(t_n+\frac{1}{2})) \longrightarrow \infty$ $(n\longrightarrow\infty)$. Most (13) alapján

$$d_{M'}(b_x(\tfrac{1}{2}),b_x(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2n})) \ge d_{M'}(b_x(\tfrac{1}{2}),b_x(1-\tfrac{1}{2n}))-d_{M'}(b_x(1-\tfrac{1}{2n}),b_x(\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2n}))=$$

$$= d_{M'}(b_x(\tfrac{1}{2}),b_x(1-\tfrac{1}{2n})) - d_{M'}(x,b_x(\tfrac{1}{2})) \longrightarrow \infty \quad (n\longrightarrow\infty) .$$

Ez azonban lehetetlen, mert egy sokaság Carathéodory metrika szerinti topológiája mindig durvább az illető sokaság alaptopológiájánál (v.ö.[48]) , és igy $d_{M'}(b_x(\frac{1}{2}),b_x(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})) \longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$, hiszen a $t\longmapsto b_x(t)$ függvény differenciálható.

A kapott ellentmondás bizonyitja a tételt.

A bizonyitás 1) lépéséből közvetlenül kiolvasható az az egyszerü észrevétel, hogy általában is

13.Lemma. Ha $d^*: N\longmapsto d_N^*$ egy olyan metrika értékü funktor a komplex Banach sokaságok kategóriáján, hogy minden N,N' sokaságra

(i) d_N^* egy metrika N -en

(ii) a holomorf $N\longrightarrow N'$ leképezések $d_N^*\longrightarrow d_{N'}^*$ kontrakciók, akkor $d^*_M|_{M'} = d^*_M$ valahányszor M' egy alsokasága M -nek és létezik holomorf projekciója M -nek M' -re.

1.Megjegyzés. a) A Kobayashi-féle invariáns távolságfogalom (def. ld. [48], [29]) szintén rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, amely tulajdonságait felhasználtuk a Carathéodory-metrikáknak a projekciós elv bizonyitásához (és igy a 13.Lemma is alkalmazható a Carathéodory-féle mellett a Kobayashi távolságokra).

b) A 13.Lemma fontos speciális esete a következő.

13'.Lemma. Ha E egy Banach tér, P kontraktiv lineáris $E \to E$ projekció, akkor $d_{B(E)}|_{B(PE)} = d_{B(PE)}$ ill. $d^K_{B(E)}|_{B(PE)} = d^K_{B(PE)}$ ahol d^K a Kobayashi távolságot jelöli.

Bizonyitás. Mivel $\|P\| = 1$, PE egy zárt altere E -nek és $PB(E) = B(PE) \subset B(E)$. Vagyis a 13.Lemma $M \equiv B(E)$; $M' \equiv B(PE)$ mellett alkalmazható.

c) A kapott eredményt tovább specializálhatjuk az alábbi módon: Vegyünk egy tetszőleges $v \in E$ egységvektort. A Hahn-Banach tétel szerint létezik $\Phi \in E^*$ ugy, hogy $\|\Phi\|_* = \langle v, \Phi \rangle = 1$. Vegyük észre, hogy most a $P: f \mapsto \langle f, \Phi \rangle \cdot v$ leképezés egy kontraktiv lineáris projekciója E -nek $\mathbb{C}v$ -re. Erre alkalmazva a 13'. Lemmát, egy uj bizonyitást nyertünk Vesentini következő lemmájára:

A Lemma. (Vesentini [45]). Legyen E egy Banach tér. Ekkor tetszőleges $v \in E$ egységvektorra és $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta$ számokra fennáll $d_{B(E)}(\zeta_1 v, \zeta_2 v) = d^K_{B(E)}(\zeta_1 v, \zeta_2 v) = d_{B(\mathbb{C}v)}(\zeta_1 v, \zeta_2 v) = d_\Delta(\zeta_1, \zeta_2)$ ($=$ $=$ areath $\dfrac{\zeta_1 - \zeta_2}{1 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2}$, mint jól-ismert). Vagyis a $[\Delta \ni \zeta \mapsto \zeta v]$ görbe egy komplex geodetikus $B(E)$ -ben mind $d_{B(E)}$ mind $d^K_{B(E)}$ szerint.

A továbbiakban figyelmünket végig a Banach terek egységgömbjeire forditjuk.

7.Tétel. (Projekciós elv). Ha E egy Banach tér és $P : E \to E$ egy kontraktiv lineáris projekció, akkor $P[\log^* \mathrm{Aut}\, B(E)]|_{PE} \subset \log^* \mathrm{Aut}\, B(PE)$.

Bizonyitás. Legyen $u \in \log^* \mathrm{Aut}\, B(E)$ tetszőlegesen rögzitve. Azt kell belátnunk, hogy a $Pu|_{B(PE)}$ vektormező teljes $B(PE)$-ben. Ugyanugy mint a 13 .Lemmánál, tekintsük az $M \equiv B(E)$, $M' \equiv B(PE)$ Banach sokaságot, a $P|_{B(E)}$ lineáris (tehát holomorf) projekcióját M-nek M'-re, és az $v \equiv u|_{B(E)}$ M-ben teljes vektormezőt. Vegyük a $\delta(x,w) \equiv \|w\|$ $(x \in B(PE),\ w \in PE)$ differenciális Finsler metrikát M' fölött. Nyilván a δ által generált metrika M'-n nem más, mint a $d(x,y) \equiv \|x-y\|$ $(x,y \in B(PE))$ távolság. Igy a tétel bizonyitásához csak a 6.Tétel (i), (ii), (iii) feltételei teljesülését kell verifikálnunk.

(i) : $x \in B(PE)$-nél $P'(x)v(x) = Pu(x)$, ahonnan $\delta(x,P'v(x)) = \|Pu(x)\| \leq \|u(x)\| =$ C Tétel d) $= \|u(0)+u'(0)x+q_{u(0)}(x,x)\| \leq \|u(0)\|+\|u'(0)\|_{\mathcal{L}(E,E)}+\|q_{u(0)}\|_{\{\text{bilin. } E\times E\to E\}}$.

(ii) triviális.

(iii) Tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots$ egy M'-beli limesz nélkül Cauchy-sorozat a d metrikában. Ekkor (tekintve, hogy PE $\|\ \|$-teljes) valamely $f \in \partial B(PE)$ vektorra $\|x_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Vagyis $\|x_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$. Ezért $d_{M'}(x_1,x_n) = d_{B(PE)}(x_1,x_n) \geq d_{B(PE)}(x_n,0) - d_{B(PE)}(x_1,0) =$ az A Lemma szerint $= \operatorname{areath}\|x_n\| - \operatorname{areath}\|x_1\| \to \infty$ $(n \to \infty)$.

6.Definició. Legyen E egy Banach tér. A $\mathbb{C}\cdot \mathrm{Aut}\, B(E)\{0\}$ alterét (v.ö. C Tétel c)) az E térnek ettől kezdve E_0-val fogjuk jelölni.

5.Következmény. Ha E egy Banach tér és $P : E \to E$ egy kontraktiv lineáris projekció, akkor $P(E_0) \subset (PE)_0$. Speciálisan, ha a $B(E)$ gömb szimmetrikus[9], akkor $B(PE)$ is az.

Bizonyitás. A projekciós elv és a C Tétel c) d) felhasználásával kapjuk, hogy $P(E_0) = P\{v(0) : v \in \log^* \mathrm{Aut}\, B(E)\} = \{Pv|_{PE}(0) : v \in \log^* \mathrm{Aut}\, B(E)\} \subset \{u(0) : u \in \log^* \mathrm{Aut}\, B(PE)\}$.

6.Következmény. Legyen E egy Banach tér. Ha létezik kontraktiv lineáris $E \to E$ projekcióknak olyan $\mathcal{P}$ családja, hogy minden $P \in \mathcal{P}$ -re $\mathrm{Aut}\, B(PE)$ csak lineáris transzformációkból áll és $\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \ker P = \{0\}$, akkor $\mathrm{Aut}\, B(E)$ -nek is lineárisak az összes elemei.

Bizonyitás. Ha $v \in \log^* \mathrm{Aut}\, B(E)$, akkor $Pv(0) = 0$ $\forall P \in \mathcal{P}$, ahonnan $v(0) = 0$, azaz a v vektormező lineáris (C Tétel d)). Másrészt $\mathrm{Aut}\, B(E) = \mathrm{Aut}^0 B(E) \mathrm{Aut}_0 B(E) = \mathrm{Aut}^0 B(E) \exp \log^* \mathrm{Aut}\, B(E)$.

A projekciós elv első alkalmazásaként befejezésül megmutatjuk, hogyan vezethető vissza az 5.Tétel Thullen [43] 2 dimenziós eredményére :

Legyen $E = L^p(X,\mu)$, $p \neq 2,\infty$ és $\dim E > 1$. Ha $g_1, g_2 \in E$ diszjunkt tartóju egységnyi normáju függvények E -ben (azaz $|g_1| \wedge |g_2| = 0$), akkor a $P_{g_1,g_2}(f) \equiv \sum_{j=1}^{2} \langle f, g_j^* \rangle g_j$ $(f \in E)$ leképezés egy kontraktiv lineáris projekciója E -nek az $E_{g_1,g_2} \equiv \mathbb{C}g_1 + \mathbb{C}g_2$ altérre. $B(E_{g_1,g_2}) = \{\zeta_1 g_1 + \zeta_2 g_2 : |\zeta_1|^p + |\zeta_2|^p < 1\}$ olyan Reinhardt tartomány, amelynek Thullen tétele szerint a biholomorf automorfizmusai lineárisak. Fennáll továbbá $\ker P_{g_1,g_2} = \{f \in E : \langle f, g_j^* \rangle = 0 \ (j=1,2)\}$. Tehát $\bigcap_{g_1,g_2} \ker P_{g_1,g_2} =$

$$= \{f \in E : \forall g \in E\ (\exists h \in E\ \ |g| \wedge |h| = 0) \Rightarrow \langle f, g^* \rangle = 0\} \subset \{f \in E :$$
$$\forall X_1 \subset X\ (\exists X_2 \subset X \setminus X_1\ \ 0 < \mu(X_1), \mu(X_2) \lessgtr \infty) \Rightarrow \int_X 1_{X_1} f \, d\mu = 0\} = \{0\}.$$

Innen a 6.Következmény adja az 5.Tételt.

---

[9] azaz ha $[\mathrm{Aut}\, B(E)]\{0\} = B(E)$ (tekintve, hogy $B(E)$ mindig szimmetrikus a 0 pontra)

5. Fejezet

A projekciós elv néhány alkalmazása

A vektortereken értelmezett holomorfiával kapcsolatos irodalomnak egy jelentős része speciális tartományok biholomorf automorfizmusainak a pontos geometriai leirásával foglalkozik. A projekciós elv ezen a területen különösen hasznos segédeszköznek bizonyulhat az eddigi (főleg véges dimenziós) eredményeknek mind az általánositása mind a közös keretben való tárgyalása számára. Ebben a fejezetben két olyan tipikus alkalmazását mutatjuk be a projekciós elvnek, amelyek egyfelől (részben) ismert tételeknek ([28], [16],[14],[7] ill. [43],[41]) más ismert eszközökkel már el nem érhető általánositását szolgáltatják, másfelől pedig lényegesen leegyszerüsitik a bizonyitás gondolatmenetét az eredetihez képest is (v.ö. Bevezetés 6-8. old.) .

A multilineáris formák terének egységgömb-automorfizmusai

Jelöljenek $H_1,\dots,H_n$ tetszőlegesen rögzitett legalább 2 dimenziós Hilbert tereket és tekintsük az $E \equiv H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ tér $B \equiv B(E)$ egységgömbjének biholomorf automorfizmus csoportját. Jól-ismert, hogy az $n=1,2$ esetekben a B egységgömb szimmetrikus tartomány (v.ö. [16],[7]) , és az $\mathrm{Aut}\, B$ csoport tagjai egy viszonylag egyszerü algebrai formulával adhatók meg. Ezzel kapcsolatban nehézséget egyedül az $\mathrm{Aut}\, B$ egy egyszerü szerkezetü részcsoportjának a megtalálása ill. (sajátos módon) az E tér unitér operátorainak pontos leirása jelenti. Az emlitett első probléma a Kaup-Upmeier-Vigué féle elmélet fényében könnyen megoldható : A 3. Következmény segitségével azonnal lehet látni[10], hogy ha $c \in H_1$,

[10] [37] -ben be van bizonyitva, hogy a 3.Következmény megforditása is áll (Corollary 5)

akkor a $[H_1 \ni f \mapsto c-(f|c)f]$ vektormező $\log^*\mathrm{Aut}\, B(H_1)$-beli ill. hogyha $C \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ $(\simeq H_1 \otimes H_2)$ akkor $[\mathcal{L}(H_1,H_2) \ni F \mapsto C-FC^*F] \in \log^*\mathrm{Aut}\, B(\mathcal{L}(H_1,H_2))$.

A figyelmünket mostantól az irodalom által még nem érintett $n>2$ esetre fordítjuk.

14.Lemma. $\mathrm{Span}\{UG : U \text{ lineáris} \in \mathrm{Aut}_o B\} = E$ valahányszor $C \in E \setminus \{0\}$ és $\dim H_j < \infty$ $(j=1,\dots,n)$.

Bizonyitás. Ha $C \neq 0$, akkor rögzithetünk olyan $e_j \in H_j$ $(j=1,..,n)$ egységvektorokat, amelyekre $\gamma \equiv C(e_1,\dots,e_n) \neq 0$. Jelölje ekkor P_j a H_j tér ortogonális projekcióját $\mathbb{C}e_j$-re és legyen $U_j^{\vartheta_j} \equiv \exp(i\vartheta_j P_j)$ $(\vartheta_j \in \mathbb{R}\ ;\ j=1,\dots,n)$ ill. $C(\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) \equiv (U_1^{\vartheta_1} \otimes \dots \otimes U_n^{\vartheta_n})C$ [11]. Mivel az $U_j^{\vartheta_j}$ operátorok H_j-unitérek, fennáll $U_1^{\vartheta_1} \otimes \dots \otimes U_n^{\vartheta_n} \in \mathrm{Aut}_o B$, és igy $e_1 \otimes \dots \otimes e_n = \frac{i}{\gamma} \frac{\partial^n}{\partial\vartheta_1 \cdots \partial\vartheta_n}\Big|_0 C(\vartheta_1,\dots,\vartheta_n) \in S \equiv \mathrm{Span}\{UC : U \text{ lineáris} \in \mathrm{Aut}_o B\}$. Ezért tetszőleges unitér $V_j : H_j \to H_j$ operátorok mellett is $(V_1e_1) \otimes \dots \otimes (V_ne_n) = (V_1 \otimes \dots \otimes V_n)(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \in S$, azaz $f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in S$ valahányszor $f_1 \in H_1,\dots, f_n \in H_n$, ahonnan $S=E$ (hiszen $\dim E < \infty$).

4.Propozició. $n>2$ esetén $\mathrm{Aut}\, B(H_1 \otimes \dots \otimes H_n)$ összes elemei lineárisak.

Bizonyitás. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{P} \equiv \{P_1 \otimes \dots \otimes P_n : P_j$ ortogonális H_j-projekció, $\dim P_jH_j = [2$ ha $j \le 3$ és 1 ha $j>3]\}$ leképezéscsacsalád csupa kontraktiv $E \to E$ projekciókból áll és $\bigcap_{P \in \mathcal{P}} \ker P = \{0\}$. Mivel tetszőleges $P \in \mathcal{P}$-re a PE altér izometrikusan izomorf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$-vel (itt $\mathbb{C}^2$ a szokásos euklidesi normával ellátott

---

[11] Ha $A_j \in \mathcal{L}(H_j,H_j)$ $(j=1,\dots,n)$, akkor $A_1 \otimes \dots \otimes A_n : H_1 \otimes \dots \otimes H_n \ni F \mapsto [(f_1,\dots,f_n) \mapsto F(A_1f_1,\dots,A_nf_n)]$. Ha $e_j \in H_j$ $(j=1,\dots,n)$, akkor $e_1 \otimes \dots \otimes e_n \equiv [(f_1,\dots,f_n) \mapsto (f_1|e_1)\cdots(f_n|e_n)]$ és $\delta_{e_1,\dots,e_n} \equiv [F \mapsto F(e_1,\dots,e_n)]$ (itt a $(\cdot|\cdot)$ szimbólum a skalárszorzatot jelöli az egyes Hilbert terekben.

2 dimenziós Hilbert tér), a 6.Következmény szerint elegendő belátni, hogy az $\mathrm{Aut}\, B(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ csoport elemei mind lineárisak.

Vagyis vehető az általánosság megszoritása nélkül $n=3$ és $H_j=\mathbb{C}^2$ $(j=1,2,3)$. Tegyük fel most, hogy $E_0 \neq \{0\}$ a bizonyitandóval ellentétben (v.ö. C Tétel). A 14.Lemma szerint ekkor $E=E_0$, azaz az B gömb szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

Jelölje e_1, e_2 az $(1,0)$ ill. $(0,1)$ vektorokat $\mathbb{C}^2$ -ben és tekintsük a $C \equiv e_1 \otimes e_1 \otimes e_1$ ill. $F \equiv e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2$ elemeit E-nek. Mivel az E tér véges dimenziós, tetszőleges $A \in E$ -re találhatók $f_1, f_2, f_3 \in \partial B(\mathbb{C}^2)$ ugy, hogy $\|A\| = \max_{\|g_1\|=\|g_2\|=\|g_3\|=1} |A(g_1,g_2,g_3)| = A(f_1,f_2,f_3)$. Speciálisan, hogyha $\lambda \in (0,\frac{1}{3})$ tetszőlegesen adott, akkor rögzithetünk olyan $f_j(\lambda)$ $(j=1,2,3)$ egységvektorokat, melyekre $\|C+\lambda F\| = \langle C+\lambda F, \delta_{f_1(\lambda),f_2(\lambda),f_3(\lambda)} \rangle$. Mivel most $C(g_1,g_2,g_3)$, $F(g_1,g_2,g_3) \geq 0$ $\forall g_1,g_2,g_3 \geq 0$ és mert $\langle C+\lambda F, \delta_{e_2,e_2,e_2} \rangle = \lambda F(e_2,e_2,e_2) < 1$, valamilyen $r_j(\lambda) \geq 0$ mellett $f_j(\lambda) = \frac{e_1 + r_j(\lambda)}{(1+r_j(\lambda))^{1/2}}$ $(j=1,2,3)$ irható. Bevezetve tehát a $\phi_\lambda(\rho_1,\rho_2,\rho_3) \equiv \langle C+\lambda F,$ $\delta_{\frac{e_1+\rho_1 e_2}{(1+\rho_1^2)^{1/2}}, \ldots, \frac{e_1+\rho_3}{(1+\rho_3^2)^{1/2}}} \rangle = [1+\lambda(\rho_1+\rho_2+\rho_3)] \cdot \prod_{k=1}^{3} (1+\rho_k^2)^{-1/2}$ függvényt,

$$\frac{\partial}{\partial \rho_j}\Big|_{(r_1(\lambda),r_2(\lambda),r_3(\lambda))} \phi_\lambda = 0 \quad (j=1,2,3).$$ Azaz $\{\lambda(1+r_j^2) - [1 + \lambda(r_1+r_2+r_3)]\} \cdot \prod_{k=1}^{3} (1+r_k^2)^{-3/2} = 0$ $(j=1,2,3)$, ahonnan $\lambda = \frac{r_1}{1-r_1(r_2+r_3)} = \frac{r_2}{1-r_2(r_1+r_3)} = \frac{r_3}{1-r_3(r_1+r_2)}$. Ezért $r_j \neq 0$ $(j=1,2,3)$ és $\frac{1}{r_1}+r_1 = \frac{1}{r_2}+r_2 = \frac{1}{r_3}+r_3$ $\left(= \frac{1}{\lambda} + \sum_{j=1}^{3} r_j\right)$. Vegyük észre, hogy ebből a $\lambda>0$ feltevés miatt $r_1=r_2=r_3$ következik. (Ugyanis ha ez nem áll, akkor is található $r>0$, amelyre az r_1,r_2,r_3 számok közül valamelyik kettő r -rel, a harmadik pedig $1/r$ -rel egyezik meg. Ilyenkor azonban

$\lambda = \dfrac{1/r}{1-(1/r)(r+r)} < 0$.) Igy $r(\lambda) \equiv r_1(\lambda)$ $(=r_2(\lambda)=r_3(\lambda))$-ra fennáll a $\lambda = \dfrac{r}{1-2r^2}$ $\left(r = \dfrac{-1+\sqrt{1+8\lambda}}{4\lambda}\right)$ reláció. Ezt a tényt ugy interpretálhatjuk, hogy elegendően kis $r > 0$ értékek mellett (nevezetesen, ha $\lambda < \frac{1}{3}$ azaz $r < \frac{\sqrt{17}-3}{4}$) az $F_r \equiv C + \dfrac{r}{1-2r^2} F$ $(\in E)$ és $\Phi_r \equiv$ $\equiv \delta_{e_1+re_2, e_1+re_2, e_1+re_2}$ $(\in E^*)$ pár kielégiti az $\|F_r\| \|\Phi_r\|_* = \langle F_r, \Phi_r\rangle$ relációt. Tehát, mivel $C \in E_o(=E)$, a 3.Következmény (ill. C Tétel d)) szerint

$$(13) \quad \|F_r\|^2 \overline{\langle C, \Phi_r\rangle} + \langle q(F_r, F_r), \Phi_r\rangle = 0 \qquad \left(0 < r < \frac{\sqrt{17}-3}{4} \right)$$

valamilyen $q : E\times E \longrightarrow E$ szimmetrikus bilineáris leképezés mellett.

Itt $\langle C, \Phi_r\rangle = 1$, $\|F_r\| = \|\Phi_r\|_*^{-1} \langle F_r, \Phi_r\rangle = (1+r^2)^{-3/2}(1+3r\dfrac{r}{1-2r^2}) =$ $= (1+r^2)^{-3/2} \dfrac{1+r^2}{1-2r^2} = (1+r^2)^{-3/2}(1-2r^2)^{-1}$ és $\langle q(F_r, F_r), \Phi_r\rangle =$ $= \langle q(C,C), \Phi_r\rangle + 2\dfrac{r}{1-2r^2}\langle q(C,F), \Phi_r\rangle + \left(\dfrac{r}{1-2r^2}\right)^2 \langle q(F,F), \Phi_r\rangle$. Tekintve, hogy tetszőleges rögzitett $V \in E$ esetén az $r \longmapsto \langle V, \Phi_r\rangle$ függvény egy 3-adfoku polinom r -ben, (13) alapján

$$(13') \quad (1+r^2)^{-1}(1-2r^2)^{-2} + p_1(r) + p_2(r)(1-2r^2)^{-1} + p_3(r)(1-2r^2)^{-2} = 0$$

áll valamilyen p_1, p_2, p_3 polinom-triplet mellett. (13') azonban ahhoz az ellentmondáshoz vezet ($(1-2r^2)^2$ -nel való átszorzás után), hogy az $r \longmapsto (1+r^2)^{-1}$ függvény egy polinom.

A következőkben használni fogjuk a $B^* \equiv B(E^*)$,

$K \equiv \{F \in \partial B : \exists! \, \Phi \in \partial B^* \;\; \langle F, \Phi\rangle = 1 \}$,

$K^* \equiv \{\Phi \in \partial B \;:\; \exists F \in K \;\;\; \langle F, \Phi\rangle = 1 \}$ jelöléseket.

<u>15.Lemma.</u> Ha $\dim H_j < \infty$ $(j=1,\ldots,n)$, akkor

$$K^* = \{\delta_{e_1,\ldots,e_n} : e_1 \in \partial B(H_1), \ldots, e_n \in \partial B(H_n)\} .$$

Bizonyitás. Legyen $\dim E < \infty$. Mivel ekkor $\overline{B}$ kompakt, bármely $F \in \partial B$ n-lineáris funkcionálhoz találhatók $e_1 \in \partial B(H_1), \dots, e_n \in \partial B(H_n)$ ugy, hogy $F(e_1,\dots,e_n) = 1$. Tehát $K^* \subset \{\delta_{e_1,\dots,e_n} : e_j \in \partial B(H_j)$ $(j=1,\dots,n)\}$. Másrészt vegyük észre, hogy minden E-unitér operátor a K alakzatot önmagára képezi le, és igy

(14) $\qquad U^* K^* = K^* \qquad \forall U : E \longrightarrow E$ unitér operátor.

Jól-ismert az elemi konvex analizisből, hogy —lévén $\overline{B}$ kompakt — $K^* \neq \emptyset$ (pl. véve egy tetszőleges, az E normafüggvényével ekvivalens sima $\|\ \|_1$ normát, $\{F \in \partial B : \|F\|_1 \leq \|G\|_1 \quad \forall G \in \partial B\} \subset K$). Igy $K^* \neq \emptyset$, azaz valamely $e_1^o \in H_1, \dots, e_n^o \in H_n$ egységvektorokra $\delta_{e_1^o,\dots,e_n^o} \in K^*$. Vagyis (14) szerint $\delta_{U_1 e_1^o,\dots,U_n e_n^o} = (U_1 \otimes \dots \otimes U_n)^* \delta_{e_1^o,\dots,e_n^o} \in K^*$ valahányszor $U_j : H_j \to H_j$ unitér operátor $(j=1,\dots,n)$, ahonnan $\{\delta_{e_1,\dots,e_n} : e_j \in \partial B(H_j)\ \ (j=1,\dots,n)\} \supset K^*$.

16. Lemma. Legyen $\Phi \equiv \delta_{f_1,\dots,f_n}$, $\Psi \equiv \delta_{g_1,\dots,g_n}$ és $\Theta \equiv \delta_{h_1,\dots,h_n}$ ahol $0 \neq f_j, g_j, h_j \in H_j$ $(j=1,\dots,n)$, és tegyük fel, hogy $\Phi + \Psi = \Theta$. Ekkor létezik olyan k index, hogy minden $j \neq k$ mellett $f_j \| g_j$ (azaz f_j és g_j lineárisan függők).

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy $f_k \nparallel g_k$ és $f_m \nparallel h_m$ valamely $k \neq m$ indexpárra. Az általánosság megszoritása nélkül vehető $k=1$, $m=2$. Megmutatjuk, hogy most $h_1 \nparallel f_1$. Valóban, ha $h_1 \| f_1$ volna, akkor véve a $\tilde{g}_1 \equiv g_1 - \|f_1\|^{-2} \langle g_1, f_1 \rangle f_1$ vektort és az $\tilde{E} \equiv \tilde{g}_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_n$ tenzort, fennállna $\langle \tilde{E}, \Phi \rangle = \langle \tilde{E}, \Theta \rangle = 0 \neq \langle \tilde{E}, \Psi \rangle$. Ugyanigy látható $h_2 \nparallel g_2$. Mivel $h_1 \nparallel f_1$, található olyan $u_1 \in H_1$, melyre $f_1 \perp u_1 \not\perp h_1$. Mivel pedig $h_2 \nparallel g_2$, található $u_2 \in H_2$ ugy, hogy $g_2 \perp u_2 \not\perp h_2$. Ekkor azonban a $\tilde{H} \equiv u_1 \otimes u_2 \otimes h_3 \otimes \dots \otimes h_n$ tenzor mellett $\langle \tilde{H}, \Phi \rangle = \langle \tilde{H}, \Psi \rangle = 0 \neq \langle \tilde{H}, \Theta \rangle$, ami lehetetlen.

17. Lemma. Tegyük fel, hogy $r_j \equiv \dim H_j < \infty$ $(j=1,\dots,n)$, és

legyen $U \in \mathcal{L}(E,E)$ ugy rögzitve, hogy $U|_B \in \mathrm{Aut}_0 B$. Ekkor találhatók olyan $U_1 : H_1 \to H_1, \ldots, U_n : H_n \to H_n$ unitér operátorok, hogy $U = U_1 \otimes \cdots \otimes U_n|_B$.

Bizonyitás. Jól-ismert [20] a Lie csoportok elemi elméletéből, hogy az állitást elegendő bebizonyitani az id_E operátor egy alkalmas környezetében fekvő lineáris E-unitér operátorokra.

Ehhez rögzitsük $\varepsilon > 0$ -t ugy, hogy a $\Phi \equiv \delta_{e^1,\ldots,e^n}$, $\tilde{\Phi} \equiv \delta_{\tilde{e}^1,\ldots,\tilde{e}^n}$ $\Psi \equiv \delta_{f^1,\ldots,f^n}$, $\tilde{\Psi} \equiv \delta_{\tilde{f}^1,\ldots,\tilde{f}^n} (\in E^*)$ funkcionálokra fennálljon

(15) $\exists k \quad e^k \perp \tilde{e}^k, \ f^k \perp \tilde{f}^k$ és $\forall j \neq k \quad e^j \| \tilde{e}^j, \ f^j \| \tilde{f}^j$

valahányszor

(16) $\Phi - \tilde{\Phi}, \Psi - \tilde{\Psi} \in K^*, \quad \|\Phi - \tilde{\Phi}\| = \|\Psi - \tilde{\Psi}\| = \sqrt{2}$ és $\|\Phi - \Psi\|, \|\tilde{\Phi} - \tilde{\Psi}\| < \varepsilon$,

(17) $\|e^j\| = \|\tilde{e}^j\| = \|f^j\| = \|\tilde{f}^j\| = 1 \quad (j=1,\ldots,n)$.

Ilyen $\varepsilon > 0$ valóban létezik: Ha ugyanis nem volna, akkor valamely $\Phi_m \equiv \delta_{e^1_m,\ldots,e^n_m}$, $\tilde{\Phi}_m \equiv \delta_{\tilde{e}^1_m,\ldots,\tilde{e}^n_m}$, $\Psi_m \equiv \delta_{f^1_m,\ldots,f^n_m}$, $\tilde{\Psi}_m \equiv$ $\equiv \delta_{\tilde{f}^1_m,\ldots,\tilde{f}^n_m}$ $(m=1,2,\ldots)$ sorozatokra teljesülne (16) ill. (17) $\varepsilon = \frac{1}{m}$ -nél, de nem állna (15) (mindben $\Phi,\Psi,\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}$ helyett rendre $\Phi_m,\Psi_m,\tilde{\Phi}_m,\tilde{\Psi}_m$ -t szerepeltetve). Egy alakalmas $\{m_s\}_s$ index-részsorozatnál $e^j_{m_s} \to e^j$, $\tilde{e}^j_{m_s} \to \tilde{e}^j$, $f^j_{m_s} \to f^j$, $\tilde{f}^j_{m_s} \to \tilde{f}^j$ $(s \to \infty)$ valamely $e^j, \tilde{e}^j, f^j, \tilde{f}^j$ egységvektorok mellett, $(j=1,\ldots,n)$. Ekkor a $\Phi,\tilde{\Phi},\Psi,\tilde{\Psi}$ limeszekre teljesülnek a $\Phi = \Psi$, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi}$, $\|\Phi - \tilde{\Phi}\|, \|\Psi - \tilde{\Psi}\| = \sqrt{2}$ relációk és (15) tagadása. Ugyanakkor $\Phi - \tilde{\Phi}, \Psi - \tilde{\Psi} \in K^*$ is, mert K^* zárt. Igy a 16.Lemma szerint $\exists! k \ \forall j \neq k \ e^j \| \tilde{e}^j$. Mivel $\|\Phi - \tilde{\Phi}\| =$ $= \sqrt{2}$, az előbbi k indexre $\|e^k - \tilde{e}^k\| = \sqrt{2}$, ahonnan $e^k \perp \tilde{e}^k$. Hasonlóan, $\exists \ell \quad f^\ell \perp \tilde{f}^\ell$ és $\forall j \neq \ell \quad f^j \| \tilde{f}^j$. Tekintve, hogy (15) ellentettje áll, $k \neq \ell$. Márpedig a $\Phi = \Psi$, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi}$ relációk megkövetelik, hogy $k = \ell$ legyen.

Tegyük fel, hogy $\|U - id_E\| < \varepsilon$. Vegyünk fel egy $\{e^k : j=1,\ldots,r_k\}$

ortonormált bázist H^k -ban $(k=1,\dots,n)$ és irjuk fel $U^*\delta_{e_1^1,\dots,e_1^n}$-et $U^*\delta_{e_1^1,\dots,e_1^n} = \delta_{f_1^1,\dots,f_1^n}$ alakban (v.ö. 15.Lemma), ahol az f_1^k vektor egy alkalmasan választott, a továbbiakban rögzitett egységvektor H^k -ban $(k=1,\dots,n)$. Az ε küszöb választásából következően tetszőleges $k\in\{1,\dots,n\}$ mellett egyértelmű módon kiegészithető az f_1^k vektor a H^k tér olyan ortonormált $\{f_j^k : j=1,\dots,r_k\}$ bázisává, melynél

$$U^*\delta_{e_1^1,\dots,e_1^{k-1},e_j^k,e_1^{k+1},\dots,e_1^n} = \delta_{f_1^1,\dots,f_1^{k-1},f_j^k,f_1^{k+1},\dots,f_1^n} \quad (j=1,\dots,r_k).$$

Legyen $J_o \equiv \{(1,\dots,1,\underset{k}{j},1,\dots,1) : k=1,\dots,n\ ;\ j=1,\dots,r_k\}$, $J_1 \equiv \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n}\{1,\dots,r_k\}$, és nevezzünk egy $J\subset J_1$ multiindex halmazt tömörnek, ha $\forall i\in J\ \ \forall i'\in J_1\ \ i'\le i \Rightarrow i'\in J$.

Vegyük észre, hogy minden $i\equiv(i_1,\dots,i_n)\in J_1$ multiindexhez létezik egy és csak egy, a továbbiakban κ_i -vel jelölt $\partial\Delta$ -beli komplex szám ugy, hogy

$$(18)\qquad U^*\delta_{e_{i_1}^1,\dots,e_{i_n}^n} = \kappa_i\,\delta_{f_{i_1}^1,\dots,f_{i_n}^n}\ .$$

Valóban: Az ellenkező esetben található lenne olyan minimális (a $\le$ rendezésre nézve) i multiindex, amelyre nem teljesül (18). Ekkor megadhatók $h^k\in\partial B(H_k)$ $(k=1,\dots,n)$ vektorok, melyekre $U^*\delta_{e_{i_1}^1,\dots,e_{i_n}^n} = \delta_{h^1,\dots,h^n}$. Mivel $i\notin J_o$, tetszőleges k -ra található $\tilde{k}\ne k$ ugy, hogy $i_{\tilde{k}}\ne 1$. Tekintsük a $j_\ell \equiv \begin{cases} i_\ell & \text{ha } \ell\ne\tilde{k} \\ 1 & \text{ha } \ell=\tilde{k}\end{cases}$ $(\ell=1,\dots,n)$ formulával definiált $j\in J$ indexet. Az i minimalitása miatt $U^*\delta_{e_{j_1}^1,\dots,e_{j_n}^n} = \delta_{f_{j_1}^1,\dots,f_{j_n}^n}$. Mivel $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{e_{i_1}^1,\dots,e_{i_n}^n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{e_{j_1}^1,\dots,e_{j_n}^n}\in K^*$, az U -ra tett feltevésünk alapján $h^k \| f_{i_k}^k$. Azaz $\exists\alpha_k\in\partial\Delta$ $h^k=\alpha_k f_{i_k}^k$ $(k=1,\dots,n)$.

Legyen ezután J egy olyan maximális tömör részhalmaza J_1 -nek, amelyre $J\supset J_o$ és $\kappa_i = 1$ $\forall i\in J$. (Megjegyzés: $\kappa_i=1$ $\forall i\in J_o$.) Megmutatjuk, hogy $J=J_1$ szükségképpen. Innen és az

U leképezés linearitása miatt (18) -ből azonnal következik a lemma állitása.

Tegyük fel, hogy $J_1 \setminus J \neq \emptyset$. Legyen j egy minimális eleme $J_1 \setminus J$ -nek. Észrevétel : $\forall i \in J_1 \quad j \neq i \leq j \Rightarrow i \in J$, azaz az $J' \equiv J \cup \{j\}$ indexhalmaz is tömör. Igy elég belátni, hogy $\kappa_j = 1$ (ellentétben az eredeti feltevésünkkel).

$\mathcal{J} \equiv \{1,j_1\} \times \cdots \times \{1,j_n\}$ -et irva, fennáll

$$U^* \delta_{e_1^1+e_{j_1}^1,\ldots,e_1^n+e_{j_n}^n} = \sum_{i \in \mathcal{J}} U^* \delta_{e_{i_1}^1,\ldots,e_{i_n}^n} = \sum_{i \in \mathcal{J}} \kappa_i \delta_{f_{i_1}^1,\ldots,f_{i_n}^n} =$$

$$= \kappa_j \delta_{f_{j_1}^1,\ldots,f_{j_n}^n} + \sum_{i \in \mathcal{J}\setminus\{j\}} \delta_{f_{i_1}^1,\ldots,f_{i_n}^n} = (\kappa_j - 1)\delta_{f_{j_1}^1,\ldots,f_{j_n}^n} + \delta_{f_1^1+f_{j_1}^1,\ldots,f_1^n+f_{j_n}^n} .$$

Csakhogy $U^* \delta_{e_1^1+e_{j_1}^1,\ldots,e_1^n+e_{j_n}^n}$ felirható $\delta_{h^1,\ldots,h^n}$ alakban, ahonnan azonnal következik $\kappa_j = 1$.

7.Következmény. Dim $H_j < \infty$ $(j=1,\ldots,n)$ esetén

(19) $$\log^* \mathrm{Aut}\, B = \{ i \cdot \sum_{j=1}^{n} id_{H_1} \otimes \cdots \otimes id_{H_{j-1}} \otimes A_j \otimes id_{H_{j+1}} \otimes \cdots \otimes id_{H_n} : A_1,\ldots,A_n \text{ önadjungáltak} \}$$

Bizonyitás. Mivel tetszőleges $U_j : H_j \to H_j$ unitér operátor felirható $U_j = \exp(iA_j)$ alakban, a 17.Lemma alapján $\log^* \mathrm{Aut}\, B =$

$$= \{ \tfrac{d}{dt}\Big|_0 \exp(itA_1) \otimes \cdots \otimes \exp(itA_n) : A_1,\ldots,A_n \text{ önadjungáltak} \} .$$

8.Tétel. Legyen $n > 2$ és $H_1,\ldots,H_n$ tetszőleges Hilbert terek $(\dim H_j > 1)$. Ekkor az $E \equiv H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ tér B egységgömbjére fennáll (19) , vagyis az Aut B minden eleme egy E-unitér operátor megszoritása B -re. Minden E-unitér F operátorhoz található olyan π permutációja az $\{1,\ldots,n\}$ indexhalmaznak és olyan $U_k : H_k \to H_{\pi(k)}$ szürjektiv lineáris izometriák $(k=1,\ldots,n)$, hogy

$$F(L) = [(f_1,\ldots,f_n) \mapsto L(U_1^{-1} f_{\pi(1)},\ldots,U_n^{-1} f_{\pi(n)})] \quad \forall L \in E .$$

Bizonyitás. Legyenek $A \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$ és $e_1^* \in \partial B(H_1),\ldots, e_n^* \in \partial B(H_n)$ tetszőlegesen rögzitve, és képezzük az $\tilde{A} \equiv A - \langle A(e_1^* \otimes \cdots \otimes e_n^*), \delta_{e_1^*,\ldots,e_n^*} \rangle \cdot id_E$ operátort. Mivel $i \cdot id_E \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$, a 3.Következmény szerint

$\tilde{A} \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$. Megjegyezzük még, hogy $\tilde{A}(e_1^* \otimes \cdots \otimes e_n^*) = 0$. Tekintsük ezután a $\mathcal{P} \equiv \{P_1 \otimes \cdots \otimes P_n : P_k$ ortogonális H_k-projekció, $\dim P_k H_k < \infty$, $e_k^* \in P_k H_k$ $(k=1,\dots,n)\}$ leképezéscsaládot. Mindegyik $P \equiv P_1 \otimes \cdots \otimes P_n \in \mathcal{P}$ leképezés az E tér kontraktiv lineáris projekciója a $(P_1 H_1) \otimes \cdots \otimes (P_n H_n)$ alterére. Tehát a projekciós elv szerint $P\tilde{A}|_{PE} \in \log^* \mathrm{Aut}\, B(PE)$ $\forall P \in \mathcal{P}$. Igy a 7. Következmény alapján minden $P \in \mathcal{P}$-re található pontosan egy olyan $A_1^P \in \{$önadj. H_1-op.$\}, \dots, A_n^P \in \{$önadj. H_n-op.$\}$, hogy

$$A_k^P H_k \subset P_k H_k \quad (\text{azaz } P_k A_k^P P_k = A_k^P) \quad \text{és} \quad (A_k^P e_k^* | e_k^*) = 0 \quad (k=1,\dots,n),$$

$$P\tilde{A}P = \sum_{k=1}^{n} i \cdot \mathrm{id}_{H_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{H_{k-1}} \otimes A_k^P \otimes \mathrm{id}_{H_{k+1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{H_n}.$$

Vezessük be ezután a következő $\leq$ rendezést $\mathcal{P}$-n: $P \equiv P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ és $Q \equiv Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_n$ esetén legyen $P \leq Q \overset{def}{\Longleftrightarrow} P_k H_k \subset Q_k H_k$ (azaz $P_k \leq Q_k$) $\forall k \in \{1,\dots,n\}$. A $P \leq Q \Longrightarrow P\tilde{A}P = PQ\tilde{A}QP$ relációból azonnal látható

$$(20) \qquad A_k^P = P_k A_k^Q P_k \quad (k=1,\dots,n) \quad \text{valahányszor } P \leq Q \quad (P,Q \in \mathcal{P}).$$

Vegyük észre, hogy bármely rögzitett k indexnél ill. $P \in \mathcal{P}$-nél $|(A_k^P e|f)| = |\langle (PA)(e_1^* \otimes \cdots \otimes e_{k-1}^* \otimes e \otimes e_{k+1}^* \otimes \cdots \otimes e_n^*), \delta_{e_1^*,\dots,e_{k-1}^*,f,e_{k+1}^*,\dots,e_n^*} \rangle| \leq \|P\tilde{A}\| \cdot \|e_1^* \otimes \cdots \otimes e \otimes \cdots \otimes e_n^*\| \cdot \|\delta_{e_1^*,\dots,f,\dots,e_n^*}\| = \|P\tilde{A}\| \leq \|\tilde{A}\|$ $\forall e,f \in \partial B(H_k)$, azaz

$$(21) \qquad \|A_k^P\| \leq \|\tilde{A}\| \qquad (k=1,\dots,n) \qquad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Mivel nyilván $\forall P,Q \in \mathcal{P}$ $\exists R \in \mathcal{P}$ $P,Q \leq R$, és mert (20) ill. (21) szerint $P \leq Q$-ra mindig $|(A_k^Q e|f) - (A_k^P e|f)| = |(A_k^Q(e - P_k e)|f) + (A_k^Q P_k e | f - P_k f)| \leq \|\tilde{A}\| (\|e - P_k e\| + \|f - P_k f\|)$ $\forall e,f \in \partial B(H_k)$ $k=1,\dots,n$, az

$$a_k(e,f) \equiv \lim_{P \in \mathcal{P}} (A_k^P e|f) \qquad (e,f \in H_k\,;\ k=1,\dots,n)$$

definiciók értelmesek és korlátos szimmetrikus sesquilineáris funkcionálokat határoznak meg. Igy léteznek $A_1 : H_1 \longrightarrow H_1, \dots, A_n : H_n \longrightarrow H_n$ önadjungált operátorok, melyekre $a_k(e,f) = (A_k e|f)$ és innen $(A_k^P e|f) = (A_k^P(P_k e)|P_k f) = (A_k P_k e|P_k f) = (P_k A_k P_k e|f)$ $\forall e,f \in H_k$

azaz $A_k^P = P_k A_k P_k$ $(P \in \mathcal{P}\ ;\ k=1,\dots,n)$. Most tetszőleges $L \in E$, $e_1 \in H_1, \dots, e_n \in H_n$ mellett $P_k \equiv \mathrm{proj}_{\mathrm{Span}\{e_k, A_k e_k, e_k^*\}}$ $(k=1,\dots,n)$ vételével fennáll $\tilde{A}L(e_1,\dots,e_n) = \tilde{A}L(P_1 e_1,\dots,P_n e_n) = P\tilde{A}L(e_1,\dots,e_n) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} L(e_1,\dots,e_{k-1},A_k^P e_k,e_{k+1},\dots,e_n) = \sum_{k=1}^{n} L(e_1,\dots,P_k A_k P_k e_k,\dots,e_n) =$$

$= \sum_{k=1}^{n} L(e_1,\dots,A_k e_k,\dots,e_n)$. Vagyis $AL(e_1,\dots,e_n) = \sum_{k=1}^{n} L(e_1,\dots,B_k e_k,\dots,e_n)$ irható, ahol $B_j \equiv A_j$ $j=1,\dots,n-1$ és $B_n \equiv A_n + \langle A(e_1^* \otimes \dots \otimes e_n), \delta_{e_1^*,\dots,e_n^*} \rangle \mathrm{id}_E$, ami bizonyitja (19) -et.

A tétel második állitásának bizonyitásához legyen F egy tetszőlegesen adott E-unitér operátor, és vezessük be a $\mathcal{P}_k \equiv \{P_1 \otimes \dots \otimes P_n :$ P_k ortogonális H_k-projekció, $\forall j \neq k$ $P_j = \mathrm{id}_{H_j}\}$ $(k=1,\dots,n)$ leképezéscsaládokat. Láttuk, hogy $i\mathcal{P}_k \subset \log^* \mathrm{Aut}\, B$, és igy bármely $P \in \mathcal{P}_k$-nál a $Q \equiv FPF^{-1}$ leképezésre is $iQ \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$ és $Q^2 = Q$ (mivel $P^2 \equiv P$) , ami (19) alapján csak ugy lehet, ha létezik $\ell_k(P)$ index, melyre $Q \in \mathcal{P}_{\ell_k(P)}$ $(k=1,\dots,n)$.

Legyen $k \in \{1,\dots,n\}$ rögzitve. Megmutatjuk, hogy $\ell_k(P_1) = \ell_k(P_2)$ $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}_k \setminus \{\mathrm{id}_E\}$. Valóban: $\ell_k(P_1) \neq \ell_k(P_2)$ esetén a $Q_j \equiv FR_jF^{-1}$ $(j=1,2)$ operátorokra $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$ (azaz $[Q_1,Q_2] = 0$) , ahonnan $[R_1,R_2] = 0$ állna. Vegyük észre, hogy $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}_k \setminus \{\mathrm{id}_E\}$ $\exists P_3 \in \mathcal{P}_k$ $[P_1,P_3],[P_2,P_3] \neq 0$,(azaz $R_1 \equiv P_j$ és $R_3 \equiv P_3$ $j=1,2$ vételével) $\ell_k(P_j) = \ell_k(P_3)$ $j=1,2$.

Eszerint (tekintve, hogy a $P \mapsto FPF^{-1}$ leképezés inverze $P \mapsto F^{-1}PF$), található olyan π indexpermutáció, hogy

$$(22) \qquad F\mathcal{P}_k F^{-1} = \mathcal{P}_{\pi(k)} \quad (k=1,\dots,n) .$$

Mivel bármely Hilbert tér operátoralgebrájában az ortogonális projekciók véges lineáris kombinációi sürün helyezkednek el, innen rögtön következik, hogy találhatók olyan $S_k : \mathcal{L}(H_k,H_k) \to \mathcal{L}(H_{\pi(k)},H_{\pi(k)})$ szürjektiv lineáris izometriák, amelyekre

$F(id_{H_1}\otimes\cdots\otimes id_{H_{k-1}}\otimes A_k\otimes id_{H_{k+1}}\otimes\cdots\otimes id_{H_n})F^{-1} = id_{H_1}\otimes\cdots\otimes id_{H_{\pi(k)-1}}\otimes S_k(A_k)\otimes id_{H_{\pi(k)+1}}\otimes\cdots\otimes id_{H_n}$ $(A_k\in\mathcal{L}(H_k,H_k)\quad k=1,\ldots,n)$. A (22) relációk miatt az S_k leképezések ortogonális projekcióknak ortogonális projekciókat feleltetnek meg, ezért egyben $*$-izomorfizmusok is az $\mathcal{L}(H_k,H_k)$ és $\mathcal{L}(H_{\pi(k)},H_{\pi(k)})$ operátor C^*-algebrák között. Jól-ismert, hogy így

$$S_k : A_k \longmapsto U_k A_k U_k^{-1}$$

irható valamely $U_k : H_k \longrightarrow H_{\pi(k)}$ szürjektiv lineáris izometria mellett $(k=1,\ldots,n)$. Vagyis tetszőleges $A \equiv A_1\otimes\cdots\otimes A_n$ alaku (ahol $A_k\in\mathcal{L}(H_k,H_k)$ $k=1,\ldots,n$) lineáris $E\rightarrow E$ operátorra, σ-val jelölve a π permutáció inverzét,

$$(FAF^{-1})(L) = [(f_1,\ldots,f_n)\longmapsto L(U_{\sigma(1)}A_{\sigma(1)}U_{\sigma(1)}^{-1}f_1,\ldots,U_{\sigma(n)}A_{\sigma(n)}U_{\sigma(n)}^{-1}f_n) \qquad \forall L\in E .$$

Ez azt jelenti, hogy $FAF^{-1} = UAU^{-1}$ $\forall A\in\mathcal{L}(E,E)$ az

$$U(L) \equiv [(f_1,\ldots,f_n)\longmapsto L(U_1^{-1}f_{\pi(1)},\ldots,U_n^{-1}f_{\pi(n)})] \qquad (L\in E)$$

definicióval megadott U E-unitér operátorra. Ez azonban könnyen látható módon csak ugy lehet, ha $F = e^{i\vartheta}U$ valamilyen $\vartheta\in\mathbb{R}$ mellett, ami bizonyitja a tételt.

A minimális atomos Banach hálók biholomorf egységgömb-automorfizmusai

Egy E Banach hálót minimális atomos Banach hálónak (a továbbiakban röviden csak min.B-hálónak) nevezünk, ha E-t normában kifeszitik az 1-dimenziós ideáljai.

Jelöljön ettől kezdve a dolgozat végéig E egy rögzitett min.B-hálót. Egy ismert egyszerü reprezentációtétel [33, 143.old. Ex.7(b)] következtében az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy egy (a továbbiakban rögzitett) absztrakt X halmaz mellett E egy olyan részhálója az $\{X\longrightarrow\mathbb{C}$ függvények$\}$ hálónak, amelyre

(23) $\quad 1_x\in E$ és $\|1_x\| = 1 \quad \forall x\in X$

(24) $\quad \mathrm{Span}\,\{1_x : x\in X\} = E$.

Megjegyezzük, hogy ekkor

$$(24') \quad wf \in E \quad \text{sőt} \quad wf = \lim_{Y\ \text{véges} \subset X} wl_Y f \qquad \forall f \in E,\ w: X \to \overline{\Lambda}\ .$$ [12)]

A rövidség kedvéért $B \equiv B(E)$ -t fogunk irni és az $[E \ni f \mapsto f(x)]$ funkcionált l_x^* -szel fogjuk végig jelölni.

A következőkben fő célunk az $\operatorname{Aut} B$ transzformációcsoport pontos strukturális leirása lesz.

Aut B lineáris része

7.Definició. $x,y \in X$ -re legyen $x \sim y \overset{def}{\iff} \exists \ell$ lineáris $\in \log^* \operatorname{Aut} B$ $\langle \ell l_x, l_y^* \rangle \neq 0$.

18.Lemma. (i) $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $\forall f,g \in E$

$$f-g \in l_{\{x,y\}}E \quad \text{és} \quad \sum_{z=x,y} |f(z)|^2 = \sum_{z=x,y} |g(z)|^2 \Rightarrow \|f\| = \|g\| .$$

(ii) A $\sim$ reláció egy ekvivalencia, sőt $x_1 \sim \cdots \sim x_n$ esetén $\forall f,g \in E$

$$f-g \in l_{\{x_1,\ldots,x_n\}}E \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^n |f(x_j)|^2 = \sum_{j=1}^n |g(x_j)|^2 \Rightarrow \|f\| = \|g\| .$$

Bizonyitás. (i) Legyen $Y \equiv \{y_1,\ldots,y_n\}$ egy tetszőleges véges részhalmaza X -nek és ℓ lineáris $\in \log^* \operatorname{Aut} B$. Irjunk $\alpha_{jk} \equiv$ $\equiv \langle \ell(l_{y_j}), l_{y_k}^* \rangle$ -ot $(j,k=1,\ldots,n)$ és tegyük fel, hogy $\alpha_{12} \neq 0$ (azaz $y_1 \sim y_2$). Mivel a $P \equiv [f \mapsto l_Y f]$ leképezés egy ideál-projekciója E -nek $\sum_{j=1}^n \mathbb{C} l_{y_j}$ -re, a projekciós elv szerint $\tilde{\ell} \equiv P\ell|_{PE} \in \log^* \operatorname{Aut} PB$.

---

12) Bizonyitás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. (24) szerint létezik Z véges $\subset X$ és $g \in l_Z E$ ugy, hogy $\|f-g\| < \varepsilon/2$. Most $Z \subset$ $\subset Y_1, Y_2$ véges $\subset X$ esetén $\|f-g\| \geq |f - l_Z f| \geq |w(f-l_Z f)| \geq |w(l_{Y_1 \cup Y_2} \cdot f - l_{Y_j} \cdot f)|$ ahonnan $\frac{\varepsilon}{2} \geq \|f-g\| > \|wl_{Y_1 \cup Y_2} \cdot f - wl_{Y_j} \cdot f\|$ $(j=1,2)$, azaz a háromszögegyenlőtlenségből $\varepsilon \geq \|wl_{Y_1} \cdot f - wl_{Y_2} \cdot f\|$. Tehát $\{wl_Y f\}_{Y\ \text{véges}}$ egy általánositott Cauchy sorozat E -ben. Igy valamely $h \in E$ -re $wl_Y f \to h$. De $\forall x$ $h(x) = \langle h, l_x^* \rangle = \lim_Y \langle wl_Y f, l_x^* \rangle = w(x) f(x)$, ahol $l_x^* \equiv [E \ni g \mapsto g(x)] \in E^*$.

Vagyis a 3.Következmény alapján

(25) $\mathrm{Re}\langle\tilde{\ell}(f),\Phi\rangle=0 \Leftarrow \langle f,\Phi\rangle=\|f\|\cdot\|\Phi\|_*$ $\quad \forall f\in PE,\quad \Phi\in(PE)^*$.

Vezessük be a $p(\rho_1,\dots,\rho_n)\equiv\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j 1_{y_j}\|$ függvényt $\mathbb{R}_+^n$ -on és legyen $C\equiv\{\rho\in\mathbb{R}_+^n : \mathrm{grad}|_\rho p$ nem létezik$\}$. Mivel p egy növő pozitiv homogén konvex függvény, a C halmaz egy 0 mértékü kup. Rögzitsünk tetszőleges $\rho\in\mathbb{R}_+^n\setminus C$, $\vartheta\in\mathbb{R}^n$ vektorokat és legyen $\pi\equiv\mathrm{grad}|_\rho p$ $f_0\equiv\sum_{j=1}^{n}\rho_j e^{i\vartheta_j}1_{y_j}$, $\Phi\equiv\sum_{j=1}^{n}\rho_j e^{-i\vartheta_j}1_{y_j}^*$. Mivel a p függvény növő, $\pi_1,\dots,\pi_n\ge 0$. Mivel p pozitiv homogén konvex, $\sum_{j=1}^{n}\pi_j\rho_j = p(\rho_1,\dots,\rho_n)$ azaz $\langle f_0,\Phi\rangle=\|f_0\|$, másrészt tetszőleges $f\in PE$ -re

$$|\langle f,\Phi\rangle|=|\sum_{j=1}^{n}\pi_j e^{-i\vartheta_j}f(y_j)|\le\sum_{j=1}^{n}\pi_j|f(y_j)|\le p(|f(y_1)|,\dots,|f(y_n)|)=\|f\|$$

azaz $\|\Phi\|_*=1$. Igy (25) alkalmazható f_0 -ra és Φ -re. Innen

(25') $$\mathrm{Re}\langle\ell(\sum_{j=1}^{n}\rho_j e^{i\vartheta_j}1_{y_j}),\ \sum_{j=1}^{n}\pi_j e^{-i\vartheta_j}1_{y_j}^*\rangle=0\ .$$

Minthogy a ϑ vektort tetszőlegesen vehettük fel $\mathbb{R}^n$ -ben, (25') -vel ekvivalens

(26) $\mathrm{Re}[\sum_j\rho_j\pi_j\alpha_{jj}+\sum_{j<k}(\rho_j\pi_k\alpha_{jk}+\rho_k\pi_j\overline{\alpha_{kj}})z_j z_k^{-1}$ valahányszor $|z_1|=\dots=|z_n|=1$.

Ez csak ugy lehet, ha maga a Re operáció mögötti racionális polinom is eltünik, tehát ha speciálisan $\rho_1\pi_2\alpha_{12}+\rho_2\pi_1\overline{\alpha_{21}}=0$. Vagyis kaptuk a következő differenciál-egyenletet

(27) $$\rho_1\frac{\partial p}{\partial\rho_2}\alpha_{12}+\rho_2\frac{\partial p}{\partial\rho_1}\overline{\alpha_{21}}=0 \qquad (\rho\in\mathbb{R}_+^n\setminus C)\ .$$

Minthogy $\rho_2=\|\rho_2 1_{y_2}\|\le\|\sum_j\rho_j 1_{y_j}\|=p(\rho)$ $\forall\rho\in\mathbb{R}_+^n$, létezik $\rho\in\mathbb{R}_+^n\setminus C$ melyre $\frac{\partial p}{\partial\rho_2}>0$. Ezért $\alpha_{21}\ne 0$, sőt $\overline{\alpha_{21}}/\alpha_{12}\le 0$ azaz $\overline{\alpha_{21}}/\alpha_{12}=$ $=-|\alpha_{21}|/|\alpha_{12}|$.

Legyen $(\rho_3,\dots,\rho_n)\in\mathbb{R}_+^{n-2}$ -ra $\varphi_{\rho_3,\dots,\rho_n}(t)\equiv p(|\alpha_{12}|\cos t,|\alpha_{21}|\sin t,$ $\rho_3,\dots,\rho_n)$. Mivel a C alakzat egy 0 mértékü kup $\mathbb{R}_+^n$ -ban, (27) szerint

(28) $\varphi'_{\rho_3,\ldots,\rho_n}(t)=0$ m.m. $t\in(0,\pi/2)$ és m.m. $(\rho_3,\ldots,\rho_n)\in\mathbb{R}_+^{n-2}$.

A p függvény konvexitásából következik, hogy p lokálisan Lipschitz tulajdonságu $\mathbb{R}_+^n$ belsejében. Ezért (28) szerint és mert p folytonos

(28') $\varphi_{\rho_3,\ldots,\rho_n}(t)=\varphi_{\rho_3,\ldots,\rho_n}(0)$ $\forall t\in[0,\pi/2]$, $(\rho_3,\ldots,\rho_n)\in\mathbb{R}_+^{n-2}$.

De igy $|\alpha_{12}|=\varphi_{0,\ldots,0}(\pi/2)=|\alpha_{21}|$, ahonnan $p(\rho)=|\alpha_{12}|^{-1}(\rho_1^2+\rho_2^2)^{1/2}\cdot$ $\cdot\varphi_{\rho_3,\ldots,\rho_n}(\arccos\frac{\rho_1}{(\rho_1^2+\rho_2^2)^{1/2}})=|\alpha_{12}|^{-1}(\rho_1^2+\rho_2^2)^{1/2}\varphi_{\rho_3,\ldots,\rho_n}(0)=$ $=p(\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2},0,\rho_3,\ldots,\rho_n)$.

Legyen most $f,g\in E$ olyan, hogy $f-g\in 1_{\{y_1,y_2\}}E$ és $\sum_{j=1}^2|f(y_j)|^2=$ $=\sum_{j=1}^2|g(y_j)|^2$. Ekkor $\|1_Yf\|=p((\sum_{j=1}^2|f(y_j)|^2)^{1/2},0,|f(y_3)|,\ldots,|f(y_n)|)=$ $=\|1_Yg\|$. Tekintve, hogy az Y halmaz X tetszőleges részhalmaza lehet, (24') alapján ($w\equiv 1_X$ mellett) $\|f\|=\|g\|$.

Forditva: Tegyük fel, hogy $\forall f,g\in E$ $f-g\in 1_{\{y_1,y_2\}}E$ és $\sum_{j=1}^2|f(y_j)|^2=\sum_{j=1}^2|g(y_j)|^2\Rightarrow\|f\|=\|g\|$. Ekkor az $U^t\equiv[f\mapsto 1_{X\setminus\{y_1,y_2\}}f+$ $+(\cos t\cdot f(y_1)+\sin t\cdot f(y_2))1_{y_1}+(-\sin t f(y_1)+\cos t\cdot f(y_2))1_{y_2}]$ $(t\in\mathbb{R})$ formulával definiált leképezések egy egyparaméteres E-unitér operátorcsoportot alkotnak. Innen $\ell\equiv\frac{d}{dt}\Big|_0U^t=[f\mapsto f(y_2)1_{y_1}-f(y_1)1_{y_2}]\in$ $\in\log^*\mathrm{Aut}\,B$.

(ii) bizonyitása: Mondjuk, hogy $f\overset{Y}{\sim}g$ ha Y véges $\subset X$, $f,g\in E$, $f-g\in 1_YE$ és $\sum_{y\in Y}|f(y)|^2=\sum_{y\in Y}|g(y)|^2$. Triviális, hogy az $\overset{Y}{\sim}$ relációk mind ekvivalenciák. Legyen $N\equiv\{m:\exists x_1\sim\cdots\sim x_m\ \exists f,g\in E\ f\overset{\{x_1,\ldots,x_m\}}{\sim}g,\ \|f\|\neq\|g\|\}$. Tegyük fel, hogy $N\neq\emptyset$ és legyen $n\equiv\min N$. A már belátott (i) állitásból következik, hogy $n>2$. Rögzitsünk egy olyan $Y\equiv\{y_1,\ldots,y_n\}$ halmazt és $f_1,f_2\in E$ függvényeket, hogy $f_1\overset{Y}{\sim}f_2$, $y_1\sim\cdots\sim y_n$ de $\|f_1\|\neq\|f_2\|$. Tekintsük a) $g_j\equiv 1_{(X\setminus Y)\cup\{y_1\}}f_j+$

$+\left(\sum_{k=2}^{n}|f_j(y_k)|^2\right)^{1/2} 1_{y_2}$ $(j=1,2)$ függvényeket. Vegyük észre, hogy $f_j \sim^{\{y_1,\dots,y_n\}} g_j$ és igy $\|f_j\|=\|g_j\|$ $(j=1,2)$. Csakhogy $g_1 \sim^{\{y_1,y_2\}} g_2$, és ezért (i) szerint $\|g_1\|=\|g_2\|$ áll ellentmondásban az $\|f_1\|\neq\|f_2\|$ feltevéssel. Tehát $N=\emptyset$. Igy $y_1\sim y_2\sim y_3$ esetén $\forall f,g\in E$ $f\sim^{\{y_1,y_2,y_3\}}$ $\sim^{\{y_1,y_2,y_3\}} g \Rightarrow f\sim^{\{y_1,y_3\}} g$, azaz (i) szerint $y_1\sim y_3$ áll.

8. Következmény. A lemma bizonyitása közben kiderült, hogy $\langle \ell(1_{y_1}),1^*_{y_2}\rangle = -\overline{\langle \ell(1_{y_2}),1^*_{y_1}\rangle}$ valahányszor $y_1,y_2\in X$ és $\ell\in$ $\in \log^*\mathrm{Aut}\, B$.

8. Definició. A továbbiakban a $\sim$ reláció ekvivalenciaosztályaiból alkotott partícióját az X halmaznak $\{S_i : i\in J\}$ -vel fogjuk jelölni. Minden $i\in J$ -re az $1_{S_i}E$ $(=\{f\in E : \mathrm{supp}\, f\subset S_i\})$ projekciós ideálját E -nek H_i -vel fogjuk jelölni.

5. Propozició. a) Ha $f,g\in E$ véges tartóju függvények és $\|f|_{S_i}\|_{\ell^2} = \|g|_{S_i}\|_{\ell^2}$ $\forall i\in J$, akkor $\|f\|=\|g\|$.

b) Minden $i\in J$ -re H_i egy Hilbert tér (azaz rajta a $\|\ \|$ norma teljesiti a parallelogramma-azonosságot). Nevezetesen $H_i =$ $=\{g : \mathrm{supp}(g)\subset S_i,\ \sum_{x\in S_i}|g(x)|^2<\infty\}$ és $\|f\|=\|f\|_{\ell^2}$ $\forall f\in H_i$.

c) Ha $f,g\in E$ és $\|f|_{S_i}\|=\|g|_{S_i}\|$ $\forall i\in J$, akkor $\|f\|=\|g\|$.

d) Ha $f\in E$, $g: X\to\mathbb{C}$ és $\forall i\in J$ $\|f|_{S_i}\|_{\ell^2}=\|g|_{S_i}\|_{\ell^2}$, akkor $g\in E$.

e) Tegyük fel, hogy $\ell\in\mathcal{L}(E,E)$. Ekkor $\ell\in\log^*\mathrm{Aut}\, B$ pontosan akkor, ha létezik olyan $\{\ell_i : i\in J\}$ család lineáris leképezésekből, melyre $\forall j\in J$ $i\cdot\ell_j\in\{$önadjungált $H_j\to H_j$ operátorok$\}$, $\sup_{j\in J}\|\ell_j\|<\infty$ és $\ell=\bigoplus_{j\in J}\ell_j$.

Bizonyitás. a) Közvetlen következménye a 18. Lemma (ii) állitásának. b) Legyen $f\in H_i$ és $x_0\in E$ tetszőlegesen rögzitve. a) szerint $\forall Y$ véges $\subset X$ $\|1_Y f\|=\left\|\left(\sum_{y\in Y}|f(y)|^2\right)^{1/2}1_{x_0}\right\|=\left(\sum_{y\in Y}|f(y)|^2\right)^{1/2}$. Igy

(24') szerint $\infty > \|f\| = \|f\|_{\ell^2}$. Ha pedig a $g : X \to \mathbb{C}$ függvény S_i -beli tartóju és $\|g\|_{\ell^2} < \infty$, akkor a) alapján $\forall Y_1, Y_2$ véges $\subset X$ $\|1_{Y_1} f - 1_{Y_2} f\| = \|1_{Y_1} f - 1_{Y_2} f\|_{\ell^2} = \|1_{Y_1 \Delta Y_2} f\|$, tehát az $\{1_Y f\}_Y$ véges általánositott sorozat Cauchy tulajdonságu, amiből $f \in E$.

c) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzitett. (24') szerint található olyan Y véges $\subset X$, hogy $\forall Z \supset Y$ $\|f - 1_Z f\|, \|g - 1_Z g\| < \varepsilon$. Mivel a $\mathfrak{I} \equiv \{i \in \mathfrak{J} : Y \cap S_i \neq \emptyset\}$ indexhalmaz véges, megadható olyan $\{Z_i : i \in \mathfrak{I}\}$ halmazcsalád, melyre $Y \cap S_i \subset Z_i$ véges $\subset S_i$ $(i \in \mathfrak{I})$ és $\sum_{i \in \mathfrak{I}} \|1_{S_i} f - 1_{Z_i} f\|_{\ell^2} < \varepsilon$.
Tekintsük most az $f_\varepsilon \equiv \sum_{i \in \mathfrak{I}} \|1_{Z_i} f\|_{\ell^2} 1_{x_i}$ ill. $g_\varepsilon \equiv \sum_{i \in \mathfrak{I}} \|1_{Z_i} g\|_{\ell^2} 1_{x_i}$ függvényeket, ahol x_i az S_i halmaz egy tetszőlegesen rögzitett pontja $(i \in \mathfrak{I})$. $Z \equiv \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} Z_i$ -t irva láthatjuk, hogy $\|f_\varepsilon\| = \|1_Z f\|$, $\|g_\varepsilon\| = \|1_Z g\|$, $\|f - 1_Z f\| < \varepsilon$ és $\|g - 1_Z g\| < \varepsilon$. A háromszög egyenlőtlenség szerint $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\| \le \sum_{i \in \mathfrak{I}} |\|1_{Z_i} f\|_{\ell^2} - \|1_{Z_i} g\|_{\ell^2}| = [$mivel $\|1_{S_i} f\|_{\ell^2} = \|1_{S_i} g\|_{\ell^2}$ $\forall i]$
$= \sum_{i \in \mathfrak{I}} (\|1_{Z_i} f\|_{\ell^2} - \|1_{S_i} f\|_{\ell^2} + \|1_{S_i} g\|_{\ell^2} - \|1_{Z_i} g\|_{\ell^2}) \le \sum_{i \in \mathfrak{I}} (\|1_{S_i} f - 1_{Z_i} f\|_{\ell^2} +$
$+ \|1_{S_i} g - 1_{Z_i} g\|_{\ell^2}) < 2\varepsilon$. Igy $|\|f\| - \|g\|| \le \|f - 1_Z f\| + |\|1_Z f\| - \|1_Z g\|| + \|g - 1_Z g\| <$
$< 2\varepsilon + |\|f_\varepsilon\| - \|g_\varepsilon\|| \le 2\varepsilon + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\| \le 4\varepsilon$.

d) (24') szerint minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz kiválasztható olyan Z_n véges $\subset X$ halmaz, hogy $\|f - 1_{Z_n} f\| < \frac{1}{n}$. Az általánosság megszoritása nélkül vehető $Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots$. Legyen ekkor $\mathfrak{J}_n \equiv \{i \in \mathfrak{J} : Z_n \cap S_i \neq \emptyset\}$ és $g_n \equiv \sum_{i \in \mathfrak{J}_n} 1_{S_i} g$ $(n \in \mathbb{N})$. Az $\mathfrak{J}_n$ halmazok végessége és a (már belátott) b) állitás következtében $g_n \in E$ $n \in \mathbb{N}$. Ha $n > m$, akkor $\|g_n - g_m\| = \|\sum_{i \in \mathfrak{J}_n \setminus \mathfrak{J}_m} 1_{S_i} g\| = [$c) szerint$] = \|\sum_{i \in \mathfrak{J}_n \setminus \mathfrak{J}_m} 1_{S_i} f\| \le [$mivel $|\sum_{i \in \mathfrak{J}_n \setminus \mathfrak{J}_m} 1_{S_i} f| \le |f - \sum_{i \in \mathfrak{J}_m} 1_{S_i} f| \le |f - 1_{Z_m} f|] \le \|f - 1_{Z_m} f\| < \frac{1}{m}$. Vagyis a $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy sorozat E -ben. Minden $x \in X$ -re $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x)$, ahonnan $g = \lim_{n \to \infty} g_n$.

e) Legyen először $\ell \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$. Ha $j, k \in \mathfrak{J}$, $j \neq k$ és $x \in S_j$, $y \in S_k$, akkor az S_i osztályok definiciója ill. a 18.Lemma a) állitása szerint mindig $\langle \ell(1_x), 1_y^* \rangle = 0$. Ez mutatja, hogy $\ell(H_j) \subset H_j$ $\forall j \in J$. Tehát $\ell_j \equiv \ell|_{H_j}$ ($j \in J$) mellett nyilván $\|\ell_j\| \leq \|\ell\|$ és $\ell = \bigoplus_{j \in J} \ell_j$. A 8.Következmény szerint pedig $\ell_j \in i\{$önadjungált H_j-operátorok$\}$ $\forall j \in J$.

A fordított állítás azonnal adódik b)-ből, hiszen ekkor $\exp(\ell) = \bigoplus_{j \in J} \exp(\ell_j)$ és itt minden $j \in J$ -re az $\exp(\ell_j)$ operátor a feltevés alapján H_j-unitér.

9.Következmény. Létezik olyan J_0 részhalmaza az J indexhalmaznak, hogy az $E_0 \equiv \mathbb{C} \cdot \mathrm{Aut}\, B\{0\}$ altérre (v.ö. C Tétel), $X_0 \equiv \bigcup_{i \in J_0} S_i$ -t irva, $E_0 = 1_{X_0} E$.

Bizonyitás. Legyen $Z \equiv \{x \in X : \exists c \in E_0 \;\; c(x) \neq 0\}$. Nyilván $E_0 \subset 1_Z E$. Másrészt ha $x \in Z$, $c \in E_0$ és $c(x) \neq 0$, akkor $\ell \equiv [E \ni f \mapsto i f(x) 1_x]$-et irva e) szerint $\forall t \in \mathbb{R}$ $1_{X \setminus \{x\}} c + e^{it} c(x) 1_x = \exp(t\ell) c \in E_0$, és igy $1_x = \frac{1}{ic(x)} \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(t\ell) c \in E_0$. Mivel az E tér egy min.B-háló, innen $E_0 \supset \mathrm{Span}\{1_x : x \in Z\} = 1_Z E$, azaz $E_0 = 1_Z E$. Tegyük fel most, hogy $x \in Z$, $c \in E_0$, $c(x) \neq 0$ és $x \in S_i$. Legyen $y \in S_i \setminus \{x\}$ és $\ell_1 \equiv [f \mapsto i f(x) 1_y + i f(y) 1_x]$. Mint az előbb, $c_1 \equiv \ell_1(c) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(t\ell_1) c \in E_0$, hiszen e) szerint $\ell_1 \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$. Csakhogy $c_1(y) = ic(x) \neq 0$, vagyis $y \in S_i$. Tehát $S_i \subset Z$.

log Aut B quadratikus része

9.Definició. A továbbiakban végig használni fogjuk a 9.Következményben bevezetett E_0, X_0, és J_0 jelöléseket. Ha $c \in E_0$, akkor q_c fogja jelölni azt (a C Tétel szerint egyedül létező) $E \times E \to E$ szimmetrikus bilineáris formát, amelyre $[f \mapsto c + q_c(f,f)] \in \log^* \mathrm{Aut}\, B$.

Emlékeztetünk rá (ld. C Tétel), hogy a $c \mapsto q_c$ leképezés folytonos és konjugált-lineáris. Minthogy a véges tartóju függvények sűrűn helyezkednek el E -ben, igy a 9.Következmény szerint elegendő már csak a $\langle q_{1_{x_1}}(1_{x_2}, 1_{x_3}), 1_{x_4}^* \rangle$ ($x_1 \in X_0, x_2, x_3, x_4 \in X$) értékeket meghatározni $\log^* \mathrm{Aut}\, B$ teljes leirásához. Ez utóbbi véghezviteléhez jelent lényeges segitséget a projekciós elv.

19.Lemma. Legyen $x_1,\dots,x_n \in X$, $x_1 \in X_o$ és $\beta_{jk}^{\ell} \equiv \langle q_{1_{x_1}}(1_{x_j},1_{x_k}),1^*_{x_\ell}\rangle$.
Ekkor

(i) $\beta_{jk}^{\ell} = 0$ ha $\{1,\ell\} \neq \{j,k\}$

(ii) $\beta_{11}^{1} = -1$

(iii) $\beta_{12}^{2} \in [-1,0]$, és $1_{\{x_1,x_2\}}B = \{\zeta_1 1_{x_1}+\zeta_2 1_{x_2} : |\zeta_1|^2+|\zeta_2|^{-1/\beta_{12}^2} \le 1\}$ ha $\beta_{12}^{2}\neq 0$, és $1_{\{x_1,x_2\}}B = \{\zeta_1 1_{x}+\zeta_1 1_{x} : \max\{|\zeta_1|,|\zeta_2|\} < 1\}$ ha $\beta_{12}^{2}=0$

(iv) $\beta_{12}^{2}=-1/2$ ha $x_1 \sim x_2 \neq x_1$ és $\beta_{12}^{2}=0$ ha $x_1 \not\sim x_2 \in X_o$

(v) ha $x_1,\dots,x_n \in X_o$ és $x_i \not\sim x_j$ valahányszor $i\neq j$, akkor
$$\|\zeta_1 1_{x_1}+\dots+\zeta_n 1_{x_n}\| = \max_{i=1,\dots,n} |\zeta_i| \qquad (\zeta_1,\dots,\zeta_n \in \mathbb{C}) .$$

Bizonyitás. (i) Tekintsük a $P \equiv [f \mapsto 1_{\{x_1,\dots,x_n\}}f]$ ideál-projekciót. Mivel az ideál-projekciók mindig kontraktivak, a projekciós elv szerint $[f \mapsto 1_{x_1}+Pq_{1_{x_1}}(f,f)] \in \log^*\mathrm{Aut}\, PB$. A 3.Következményt alkalmazva PB -re,
$$0 = \|f\|^2\overline{\langle 1_{x_1},\Phi\rangle}+\langle Pq_{1_{x_1}}(f,f),\Phi\rangle \qquad \|\Phi\|_*\|f\|=\langle f,\Phi\rangle \quad \forall f \in PE ,\ \Phi \in (PE)^* .$$
Bevezetve ugyanazt a $p : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ függvényt és $C \subset \mathbb{R}^n_+$ halmazt, mint a 18.Lemma bizonyitásában,
$$(29) \quad 0 = p(\rho_1,\dots,\rho_n)^2\overline{\langle 1_{x_1}, \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial \rho_j} e^{-i\vartheta_j} 1^*_{x_j}\rangle} + $$
$$+\langle q_{1_{x_1}}(\sum_{j=1}^n \rho_j e^{i\vartheta_j} 1_{x_j}, \sum_{k=1}^n \rho_k e^{i\vartheta_k} 1_{x_k}), \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial p}{\partial \rho} e^{-i\vartheta_\ell} 1^*_{x_\ell}\rangle$$
$\forall \rho \in \mathbb{R}^n_+ \setminus C \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}^n$. Vagyis
$$(29') \quad p^2 \frac{\partial p}{\partial \rho_1} e^{i\vartheta_1} + \sum_{j,k,\ell=1}^n \beta_{jk}^{\ell}\rho_j\rho_k\frac{\partial p}{\partial \rho_\ell} e^{i(\vartheta_j+\vartheta_k-\vartheta_\ell)} = 0 \quad (\rho \notin C,\ \vartheta \in \mathbb{R}^n) .$$
Tehát (rögzitett $\rho \in \mathbb{R}^n_+ \setminus C$ -nél) a $p^2\frac{\partial p}{\partial \rho_1}z_1+\sum_{j,k,\ell=1}^n \beta_{jk}^{\ell}\rho_j\rho_k\frac{\partial p}{\partial \rho_\ell}z_j z_k z_\ell^{-1}$ racionális polinom eltünik $\partial_0\Delta$ fölött, azaz a különböző homogén tagjai 0 -k. Igy csak a β_{1k}^{1} $(=\beta_{k1}^{1})$ alaku kifejezések különbözhetnek 0 -tól.

(ii) azonnal jön (29') -ből $n=1$ mellett, mert ilyenkor $p(\rho_1)=\rho_1$.

(iii) és (iv) bizonyitásához vegyük az $n=2$ esetet. (29') és (ii) felhasználásával ekkor

$$(29'') \qquad (p^2-\rho_1^2)\frac{\partial p}{\partial \rho_1} + 2\rho_1\rho_2\frac{\partial p}{2\partial \rho_2}\,\beta_{12}^2 = 0 \qquad (\rho \in \mathbb{R}_+^2 \setminus C) .$$

Mivel $p(0,\rho) = p(\rho,0) = \rho \;\; \forall \rho \geq 0$ és mert a p függvény növő és konvex, $\forall \rho \in [0,1) \;\; \exists!\, t \geq 0 \;\; p(\rho,t)=1$. Tehát egyértelműen definiálja a $t : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt a $p(\rho,t(\rho)) = 1$ formula. Vegyük észre, hogy t egy csökkenő konkáv függvény és $t(0) = 0$. Az implicit függvény tétel szerint $t'(\rho_1) = -\frac{\partial p/\partial \rho_1}{\partial p/\partial \rho_2}$ valahányszor $(\rho_1,t(\rho_1)) \notin$ $\notin C$. Vagyis mivel C egy 0 mértékü kup $\mathbb{R}_+^2$ -ban, (29'') implikálja, hogy

$$(30) \qquad t'(\rho)(1-\rho^2) = 2\rho t(\rho)\beta_{12}^2 \qquad \text{m.m.} \quad \rho \in (0,1) .$$

Mivel $t \leq 0$, fennáll $\beta_{12}^2 \leq 0$. Ha pedig $\beta_{12}^2 = 0$, akkor $t(\rho) =$ $= t(0) = 1 \quad \forall \rho \in [0,1)$. Ez utóbbi esetben $p(\rho_1,\rho_2) \leq 1 \Longleftrightarrow \rho_1 < 1$ és $\rho_2 \leq t(\rho_1) = 1$ vagy $\rho_1 = 1$ és $\rho_2 \leq 1$, azaz $p(\rho_1,\rho_2) =$ $= \max\{\rho_1,\rho_2\}$.

Ha $\beta_{12}^2 < 0$, akkor $t(\rho) = (1-\rho^2)^{-\beta_{12}^2}$ a (30) egyenlet megoldása a $t(0) = 1$ feltétel mellett. Azaz $K \equiv \{(\rho_1,\rho_2) : p(\rho_1,\rho_2) \leq 1\}$ -et irva

$$(31) \qquad K = \{(\rho_1,\rho_2) : \rho_1^2 + \rho_2^{-1/\beta_{12}^2} \leq 1\} .$$

Minthogy a K alakzat konvex a p függvény konvexsége miatt, $\beta_{12}^2 \geq$ ≥ -1 , ami bizonyitja teljesen (iii) -t.

(iv) bizonyitása : Ha $x_1 \sim x_2 \neq x_1$, akkor $p(\rho_1,\rho_2)=(\rho_1^2+\rho_2^2)^{1/2}$ (v.ö. 5.Propozició b)). Vagyis (31) szerint $\beta_{12}^2 = -\frac{1}{2}$ ilyenkor.

Tegyük fel másrészről, hogy $x_1 \not\sim x_2 \in X_0$ és $\beta_{12}^2 \neq 0$. Mivel $x_2 \in X_0$, az összes előbbi gondolatmenet véghezvihető x_1 és x_2 cseréjével. Azaz (iii) szerint áll

$$1_{\{x_1,x_2\}}^{B} = \{\zeta_1 1_{x_1} + \zeta_2 1_{x_2} : |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^{-1/\langle q_{1_{x_1}}(1_{x_1},1_{x_2}),1^*_{x_2}\rangle} \leq 1\} =$$
$$= \{\zeta_1 1_x + \zeta_2 1_x : |\zeta_2|^2 + |\zeta_1|^{-1/\langle q_{1_{x_2}}(1_{x_2},1_{x_1}),1^*_{x_1}\rangle} \leq 1\} .$$

Ez csak ugy lehetséges, ha $\beta_{12}^2 = -\frac{1}{2} = \langle q_{1_{x_2}}(1_{x_2},1_{x_1}),1^*_{x_1}\rangle$, tehát $p(\rho_1,\rho_2) = (\rho_1^2+\rho_2^2)^{1/2}$. Ha S_i az x_1 ekvivalenciaosztálya ($\sim$-ra nézve), akkor tetszőleges $f \in H_i$ -re az 5.Propozició c) szerint $\|f+\rho 1_{x_2}\| = \| \|f\|_{\ell^2} \cdot 1_{x_1} + \rho 1_{x_2}\| = p(\|f\|_{\ell^2},\rho) = \|f+\rho 1_{x_2}\|_{\ell^2}$, ahonnan $x_2 \in S_i$ és igy $x_1 \sim x_2$ következik. A kapott ellentmondás bizonyitja (iv) -et.

(v) Legyenek $y_1,\dots,y_n \in X_o$ páronként nem $\sim$-ekvivalensek. Most tetszőleges rögzitett $f,c \in 1_{\{y,\dots,y\}}^{E}$ -re

$$q_c(f,f) = \sum_{m=1}^{n} \overline{c(y_m)}\, q_{1_{x_m}}(f,f) = \sum_{m=1}^{n} \overline{c(y_m)} \sum_{j,k,\ell=1}^{n} f(y_j) f(y_k) \langle q_{1_{y_m}}(1_{y_j},1_{y_k}), 1^*_{y_\ell}\rangle 1_{y_\ell} .$$

Ebből (i) és (iii) -nek $x_1 \equiv y_m$ $x_k \equiv y_k$ $x_j \equiv y_j$ -re való alkalmazásával

$$q_c(f,f) = -\sum_{m=1}^{n} \overline{c(y_m)}\, f(y_m)^2 1 \quad = -\bar{c} f^2 .$$

Ezért a $\{\frac{d}{dt} f_t = c - q_c(f_t,f_t)$, $f_o = 0\}$ kezdetiérték probléma megoldása $f_t = \tanh(ct)$. Innen $\{\sum_{m=1}^{n} \varrho_m 1_y : \rho_1,\dots,\rho_n \in [0,1)\} \subset$ $\subset \{\exp[f \mapsto c + q_c(f,f)](0) : c \in 1_{\{y_1,\dots,y_n\}}^{E}\} \subset \mathrm{Aut}\, B\{0\} \subset B$. Ekkor $\max_{m=1,\dots,n} \rho_m \leq \|\sum_{m=1}^{n} \rho_m 1_{y_m}\| \leq 1$ valahányszor $\rho_1,\dots,\rho_n \in [0,1]$, következésképpen $\|\sum_{m=1}^{n} \rho_m 1_{y_m}\| = 1$ valahányszor $\max_{m=1,\dots,n} |\rho_m| = 1$, ahonnan $\|\sum_{j=1}^{n} \zeta_j 1_{y_j}\| = \max_{j=1,\dots,n} |\zeta_j|$. Qu.e.d.

A lemma (i) állitásából és a q_c bilineáris leképezések szimmetriájából azonnal következik, hogy bevezetve a

$$w_{x_1}(x_2) \equiv \begin{cases} -1/2 & \text{ha } x_1 = x_2 \\ \langle q_{1_{x_1}}(1_{x_1},1_{x_2}),1^*_{x_2}\rangle & \text{ha } x_1 \neq x_2 \end{cases} \qquad (x_1 \in X_o,\ x_2 \in X)$$

függvényeket, fennáll

$$q_{1_x}(1_x,1_x) = 2w_x(x)1_x \qquad \forall x \in X_o$$

$$q_{1_x}(1_x,1_y) = w_x(y)1_y \qquad \text{ha} \quad x\in X_o \ , \ y\in X\setminus\{x\}$$

$$q_{1_x}(1_y,1_z) = 0 \qquad \text{ha} \quad x\notin\{y,z\} \ , \ x\in X_o \ .$$

Innen

$$(32) \qquad q_{1_x}(f,g) = f(x)w_x g + g(x)w_x f \qquad (x\in X_o)$$

valahányszor az $f : X \to \mathbb{C}$ függvény véges tartóju. Sőt (iii) és (24') miatt (32) áll minden $f\in E$ -re.

A továbbiakban a tömörebb formulázás érdekében $f\in E$ és $i\in J$ esetén $f^{(i)}$ -t irunk az $1_{S_i}f$ függvény helyett.

20.Lemma. (i) $w_x^{(i)} = -\frac{1}{2}1_{S_i}$ valahányszor $x\in S_i$ $(i\in J_o)$

(ii) $w_x^{(i)} = 0$ valahányszor $x\notin S_i$ $(i\in J_o)$

(iii) Létezik (egyértelmüen) egy $(\gamma_{ij})_{i\in J_o, j\in J\setminus J_o}$ mátrix $[0,1]$-beli számokból ugy, hogy $w_x^{(j)} = -\gamma_{ij}1_{S_j}$ valahányszor $x\in S_i\subset X_o$ és $j\in J\setminus J_o$.

Bizonyitás. (i) és (ii) benne van a 19.Lemma (iv) pontjában.

(iii) Legyen $x,x'\in S_i$ és $y,y'\in S_j$, ahol $i\in J_o$,$j\notin J_o$. Az 5.Propozició e) állitásából következik, hogy létezik olyan E-unitér U operátor, melyre $1_{x'} = U1_x$ és $1_{y'} = U1_y$. A Lie csoportok elemi elméletéből jól-ismert, hogy minden $v\in \log^*\mathrm{Aut}\ B$ -re $UvU^{-1}\in$ $\in \log^*\mathrm{Aut}\ B$. Speciálisan $[f\mapsto U(1_x+q_{1_x}(U^{-1}f,U^{-1}f)]\in \log^*\mathrm{Aut}\ B$, ahonnan $q_{1_{x'}}(f,f) = q_{U1_x}(f,f) = q_{1_x}(U^{-1}f,U^{-1}f)$. Ezért

$$\langle q_{1_{x'}}(1_{x'},1_{y'}),1_{y'}^*\rangle = \langle Uq_{1_x}(U^{-1}1_{x'},U^{-1}1_{y'}),1_{y'}\rangle = \langle Uq_{1_x}(1_x,1_y),1_{y'}^*\rangle =$$

$= \langle q_{1_x}(1_x,1_y),1_y^*\rangle$ mivel ha $U = \bigoplus_{i\in J} U_i$ az 5.Propozicióbeli felbontása U -nak és $f\in E$, akkor $\langle Uf,1_{x'}\rangle = (U_i f^{(i)}|1_x) = (f^{(i)}|U_i^{-1}1_{x'}) =$ $= (f^{(i)}|1_x)$.

10.Definició. A $(\gamma_{ij})_{i\in J_o, j\in J\setminus J_o}$ jelölést ettől kezdve lefoglaljuk a 20.Lemma (iii) -ben bevezetett mátrix számára.

10.Következmény. Tetszőleges véges tartóju $c \in E_0$ és $f \in E$ -re

(33) $$q_c(f,f) = -\sum_{i\in J_0}(f^{(i)}|c^{(i)})f^{(i)} - 2\sum_{j\in J\setminus J_0}[\sum_{i\in J_0}\gamma_{ij}(f^{(i)}|c^{(i)})]f^{(j)}$$

Bizonyitás. A 20.Lemma és (32) segitségével látható, hogy ha $c \in E_0$ és $f \in E$ véges tartójuak, akkor $q_c(f,f) = -\sum_{x\in X_0}\overline{c(x)}q_{1_x}(f,f) =$ $= \sum_{i\in J_0}\sum_{x\in S_i} 2\overline{c(x)}f(x)\left[-\frac{1}{2}\cdot f^{(i)} - \sum_{j\notin J_0}\gamma_{ij}f^{(j)}\right]$.

Hogy (33) -at kiterjeszthessük minden $c \in E_0$ és $f \in E$ -re, szükségünk van a következő észrevételre :

21.Lemma. $E_0 = \bigoplus_{i\in J_0}^{c_0} H_i$, azaz egy $c : X \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor tartozik E_0 -ba ha $\forall i\in J$ $\|c^{(i)}\|_{\ell^2} < \infty$ és $\forall \varepsilon>0$ $\{i\in J_0 : \|c^{(i)}\|_{\ell^2} \geq \varepsilon\}$ véges $\subset J_0$ (ez utóbbi esetben $\|c\| = \sup_{i\in J_0}\|c^{(i)}\|_{\ell^2}$).

Bizonyitás. Legyen $c \in E_0$ véges tartóju és $\{i_1,\dots,i_n\} \equiv$ $\equiv \{i\in J_0 : \|c^{(i)}\|_{\ell^2} \neq 0\}$. Rögzitsünk egy-egy x_m elemet mindegyik S_{i_m} halmazból $(m=1,\dots,n)$. Most az 5.Propozició e) ill. 19.Lemma (v) szerint $\|c\| = \|\sum_{m=1}^{n}\|c^{(i_m)}\|_{\ell^2}\cdot 1_{x_m}\| = \max_{m=1,\dots,n}\|c^{(i_m)}\|_{\ell^2} =$ $= \sup_{i\in J_0}\|c^{(i)}\|_{\ell^2}$. Az állitás többi része abból a feltevésből jön, hogy a véges tartóju $X \to \mathbb{C}$ függvények sürün vannak E -ben.

22.Lemma. $\sup_{j\in J\setminus J_0}\sum_{i\in J_0}\gamma_{ij} < \|q\| (\equiv \sup_{c\in B\cap E_0}\|q_c\| = \sup_{\substack{c\in B\cap E_0\\ f,g\in B}}\|q_c(f,g)\|$).

Bizonyitás. Legyen $j\in J\setminus J_0$, $i_1,\dots,i_n \in J_0$ továbbá legyen $y \in$ $\in S_j$ és $x_1 \in S_{i_1},\dots, x_n \in S_{i_n}$. Tekintsük a $c \equiv \sum_{m=1}^{n} 1_{x_m}$ ill. $f \equiv$ $\equiv 1_y + \sum_{m=1}^{n} 1_{x_m}$. A 21.Lemmából következik, hogy $\|c\| = 1$ és $\|f\| \leq 2$. (33) szerint $\langle q_c(f,f), 1_y^*\rangle = \sum_{m=1}^{n}\gamma_{i_m j}$. Ugyanakkor $|\langle q_c(f,f), 1_y^*\rangle| \leq$ $\leq \|q\|\cdot\|c\|\cdot\|f\|^2\|1_y^*\|_* = \|q\|$. Vagyis $\forall\, \mathfrak{I}$ véges $\subset J_0$ $\sum_{i\in\mathfrak{I}}\gamma_{ij} \leq \|q\|$.

11.Következmény. (33) fennáll minden $c \in E_0$ és $f \in E$ -re.

Bizonyitás. Az előző két lemma mutatja, hogy (33) jobb oldala mindig értelmes. Vegyük észre, hogy a $\Omega : E_o \times E \ni (c,f) \mapsto$ [(33) jobb oldala] leképezés c -ben valós-lineáris, f -ben pedig valós-quadratikus. $\|c\|$, $\|f\| \le 1$ esetén $\|\Omega(c,f)\| \le \| \sum_{i\in J_0} (f^{(i)}|c^{(i)})f^{(i)}\| +$
$+ 2\| \sum_{j\notin J_0} \sum_{i\in J_0} \gamma_{ij}(f^{(i)}|c^{(i)})f^{(j)}\| \le \sup_{i\in J_0} \|f^{(i)}\|_{\ell^2}\cdot\|c^{(i)}\|_{\ell^2} +$
$+ 2\| \sum_{j\notin J_0} (\sup_{k\notin J_0} \sum_{i\in J_0} \gamma_{ik}\|f^{(i)}\|_{\ell^2}\cdot\|c^{(i)}\|_{\ell^2})\cdot f^{(j)}\| \le \|f\|^2\|c\| + \|\,\|q\|\cdot\|f\|\cdot\|c\|\cdot f\,\| \le$
$\le \|f\|^2\|c\|(1+\|q\|)$. Tehát a $\Omega : E_o \times E \to E$ leképezés folytonos. Másrészt a $\Omega(c,f) = q_c(f,f)$ reláció fennállását egy $E_o \times E$ -ben sürü halmazon a 10.Következményből már tudjuk.

Ezzel már teljesen ismerjük $\log^*\mathrm{Aut}\,B$ -t. Az $\exp[\bar{B} \ni f \mapsto$ $\mapsto c \pm q_c(f,f)]$ alaku mezők explicite könnyen megadhatók : (33) szerint a $\frac{d}{dt} f_t = c + q_c(f_t,f_t)$ egyenlet equivalens a

$$(34')\qquad \frac{d}{dt} f_t^{(i)} = c^{(i)} - (f_t^{(i)}|c^{(i)})f_t^{(i)} \qquad (i\in J_o)$$

$$(34'')\qquad \frac{d}{dt} f_t^{(j)} = -2\sum_{i\in J_0} \gamma_{ij}(f_t^{(i)}|c^{(i)})f_t^{(j)} \qquad (j\in J\setminus J_o)$$

rendszerrel. Ha $c^{(i)}$ -t felirjuk $c^{(i)} = \rho_i c_o^{(i)}$ alakban, ahol $\rho_i \ge$ ≥ 0 és $\|c_o^{(i)}\|_{\ell^2} = 1$, továbbá ha $f_o^{(i)} = \zeta_i c_o^{(i)} + f_\perp^{(i)}$, ahol $f_\perp^{(i)} \perp c_o^{(i)}$ $(i\in J_o)$, akkor (34') megoldása[13] tetszőleges adott $f_o \in$ $\in \bar{B}$ -nál

$$(35')\qquad f_t^{(i)} = M_{\rho_i t}(\zeta_i)c_o^{(i)} + M^\perp_{\rho_i t}(\zeta_i)f_\perp^{(i)} \qquad (i\in J_o)$$

ahol $\tau\in\mathbb{R}$ és $\zeta\in\bar{\Delta}$ mellett

$$(36)\qquad M_\tau(\zeta) \equiv \frac{\zeta + \tanh\tau}{1+\bar{\zeta}\tanh\tau} \quad \text{és} \quad M_\tau^\perp(\zeta) \equiv \frac{\sqrt{1-(\tanh\tau)^2}}{1+\bar{\zeta}\cdot\tanh\tau}.$$

(35') -t (34'') -be behelyettesitve kapjuk, hogy

---

[13] Tekintve a maximális összefüggő értelmezési tartományu megoldás unicitását, erről egyszerü behelyettesitéssel meggyőződhetünk. Heurisztikus számitások ld. [37].

$$\frac{d}{dt} f_t^{(j)} = [-2 \sum_{i\in J_0} \gamma_{ij}\rho_i M_{\rho_i t}(\zeta_i)] f_t^{(j)} \qquad (j\in J\setminus J_0) .$$

Ennek megoldása

$$(35'') \quad f_t^{(j)} = \exp\Big[-2 \sum_{i\in J_0} \gamma_{ij}\rho_i \int_0^1 M_{\rho_i \tau}(\zeta_i) d\tau\Big] f_t^{(j)} =$$

$$= [\prod_{i\in J_0} M_{\rho_i t}^{\frac{1}{}}(\zeta_i)^{2\gamma_{ij}}] f_t^{(j)} \qquad (j\in J\setminus J_0) .$$

Hogy (35'') -ben a jobb oldali formulák értelmesek, a 22.Lemma garantálja.

Szerencsés módon, a 21.Lemma és (35') szerint

$$\mathrm{Aut}\,\overline{B}\{0\} = \mathrm{Aut}\,B\{0\} = B\cap E_0 =$$

$$= \{ \sum_{i\in J_0} \lambda_i c_i : \lambda_i \in [0,1],\ c_i \in \partial B(H_i)\ \ \forall i\in J_0 \text{ és } [J_0\ni i\mapsto \lambda_i]\in c_0(J_0)\} =$$

$$= \{ \sum_{i\in J_0} M_{\rho_i}(0) c_i : \rho_i \in \mathbb{R}_+,\ c_i \in \partial B(H_i)\ \ \forall i\in J_0 \text{ és } [J_0\ni i\mapsto \rho_i]\in c_0(J_0)\} =$$

$$= \{\exp[f\longmapsto c+q_c(f,f)](0) : c\in E_0\} .$$

Carathéodory egy klasszikus tétele[14] kimondja, hogy ha E egy Banach tér, $F\in \mathrm{Aut}\,B(E)$ és $F(0) = 0$, akkor az F leképezés szükségképpen lineáris. Ha tehát $F\in \mathrm{Aut}\,B$ és a $c\in E_0$ függvényt ugy választjuk, hogy a $G\equiv \exp[\overline{B}\ni f\mapsto -c+q_{-c}(f,f)]$ $(=(\exp[\overline{B}\ni f\mapsto c+q_c(f,f)])^{-1})$ automorfizmusra $G(0) = F^{-1}(0)$ legyen, akkor $F(G(0)) = 0$ és igy az $U\equiv F\circ G$ automorfizmus lineáris, azaz F felirható az $F = U \exp[f\mapsto c+q_c(f,f)]$ alakban alkalmas $U\in \mathrm{Aut}^0\overline{B}$ mellett. A (35') formulából azt is láthatjuk, hogy ehhez a c függvény választása egyértelmü. Ezzel a következő leirásához jutottunk az $\mathrm{Aut}\,B$ transzformációcsoportnak :

<u>9.Tétel.</u> Jelöljön E egy minimális atomos Banach hálót. Az E teret kifesziti páronként háló-ortogonális Hilbert-féle projekciós ideáljainak egy olyan $\{H_i : i\in J\}$ családja, amelyre

---

[14] Eredeti formájában 2 dimenzióra ld.[1]. A végtelen dimenzióra való kiterjeszthetősége folklór ,ld. pl. [48] (implicite előfordul pl. [13],[14],[16],[27],[45],[49]-ben).

a) $\mathrm{Aut}_o\overline{B}(E)$ lineáris tagjai $B(H_i)$-t önmagára vetitik minden $i\in\mathcal{J}$-re

b) és viszont: ha mindegyik $i\in\mathcal{J}$ indexre U_i egy H_i-unitér operátor, akkor $\bigoplus_{i\in\mathcal{J}} U_i|_{B(E)} \in \mathrm{Aut}_o B(E)$.

Található továbbá egy olyan $[0,1]$-beli számokból álló $(\gamma_{ij})_{i,j\in\mathcal{J}}$ mátrix és olyan $\mathcal{J}_o\subset\mathcal{J}$, hogy

c) E_o $(\equiv \complement\, \mathrm{Aut}\, B(E)\{0\}) = \bigoplus_{i\in\mathcal{J}_o}^{c_o} H_i$

d) $\forall i,j\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{J}_o$ $\gamma_{ij}=0$, $\forall i\in\mathcal{J}_o$ $\gamma_{ii}=\frac{1}{2}$ és $\forall i,j\in\mathcal{J}_o$ $i\neq j \Rightarrow \gamma_{ij}=0$

e) Egy $F:\overline{B}(E)\longrightarrow E$ leképezés pontosan akkor tartozik $\mathrm{Aut}_o\overline{B}(E)$-be, ha P_i-vel jelölve a H_i-re való ideál-projekcióját E-nek,

(37') $P_iF(f) = U_i[M_{\rho_i}((P_if|c_i^o))c_i^o + M_{\rho_i}^{\perp}((P_if|c_i^o))\cdot(P_if-(P_if|c_i^o)c_i^o)]$ $\forall i\in\mathcal{J}_o$

(37'') $P_jF(f) = \left[\exp\int_0^1 \sum_{i\in\mathcal{J}_o} \gamma_{ij}\rho_i M_{\rho_i\tau}((P_if|c_i^o))d\tau\right]U_jP_j(f)$ $\forall j\in\mathcal{J}\setminus\mathcal{J}_o$

irható alkalmas H_j-unitér U_j operátorok $(j\in\mathcal{J})$, $c_i^o\in\partial B(H_i)$ $(i\in\mathcal{J}_o)$ egységvektorok és végtelenben eltünő $[\mathcal{J}_o\ni i\longmapsto\rho_i]$ $\mathbb{R}_+$-értékü függvény mellett (M_{ρ_i} ill. $M_{\rho_i}^{\perp}$ a (36) által definiált Möbius ill. co-Möbius transzformációk).

<u>12.Következmény.</u> (A fixpont probléma megoldása min.B-hálókra) Pontosan akkor rendelkezik minden $F\in\mathrm{Aut}\,\overline{B}(E)$ fixponttal, hogyha az E_o altér véges sok páronként háló-ortogonális Hilbert-féle projekciós ideál direkt összege.

<u>Bizonyitás.</u> Tegyük fel, hogy a c)-ben bevezetett $\mathcal{J}_o$ indexhalmaz végtelen. Ekkor legyenek $i_1,i_2,\ldots$ páronként különböző indexek $\mathcal{J}_o$-ból és minden $n\in\mathbb{N}$-re c_n egy rögzitett egységvektor H_{i_n}-ből. Most a tétel szerint az

$$F:\overline{B}(E)\ni f\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} M_{\frac{1}{n}}((P_{i_n}f|c_n))c_n + M_{\frac{1}{n}}^{\perp}((P_{i_n}f|c_n))\cdot(P_{i_n}f-(P_{i_n}f|c_n)c_n)$$

leképezésdefinició értelmes, és $F\in\mathrm{Aut}_o\overline{B}(E)$. Ugyanakkor az $F(f)=f$ relációból (36)-ot használva kapjuk, hogy $(P_{i_n}f|c_n) = \pm 1$ $(n\in\mathbb{N})$, ami ellentmond c) -nek.

Ha az J_o véges, akkor minden $G \in \mathrm{Aut}\, \bar{B}(E)$ gyengén folytonos E_o felett. (Bizonyitás: e) ill. a C Tétel a) pontja szerint $G = L \circ F$ áll valamely E-unitér L lineáris operátor és (37'), (37'')-ben leirt alaku F leképezés mellett. Az $[f \mapsto (P_i f | c_i^o)]$ függvények gyenge folytonosságából, az J_o indexhalmaz végességéből és c) -ből azonnal adódik, hogy $\forall i \in J_o$ $[f \mapsto P_i F(f)]$ gyengén folytonos. Azonban $F|_{B(E_o)} = \sum_{i \in J_o} P_i F|_{B(E_o)}$, és általában is, a folytonos lineáris Banach tér operátorok egyben gyengén folytonosak.) Az E_o altér definiciója szerint $\forall G \in \mathrm{Aut}\, \bar{B}(E)$ $G(\bar{B}(E_o)) = \bar{B}(E_o)$. Mivel pedig $\bar{B}(E_o)$ homeomorf képe a $\times_{i \in J_o} B(H_i)$ alakzatnak (hiszen $E_o = \bigoplus_{i \in J_o}^{c_o} H_i$ és itt J_o véges), és mert egy Hilbert tér zárt egységgömbje mindig gyengén kompakt, a $\bar{B}(E_o)$ egységgömb gyengén kompakt. Igy a Tyihonov-Schauder fixponttétel biztositja, hogy $\forall G \in \mathrm{Aut}\, \bar{B}(E)$ $\exists f \in \bar{B}(E_o)$ $G(f) = f$.

Irodalomjegyzék

[1] C. CARATHÉODORY, Über das Schwarzschen Lemma bei analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann., 97 (1926), 76-98.

[2] C. CARATHÉODORY, Über die Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische Funktionen von zwei Veränderlichen vermittelt werden, Abh. Math. Seminar Hamburg, 6 (1928), 97-145.

[3] E. CARTAN, Sur les domains bornés homogénes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Seminar Hamburg, 11 (1935), 116-162.

[4] J. DIEUDONNE, Foundations of modern analysis, Pure and Appl. Math. vol. 10, Academic Press, New York, 1969.

[5] N. DUNFORD - J.T. SCHWARTZ, Linear operators, Interscience, New York, 1958.

[6] C.J. EARLE - R.S. HAMILTON, A fixed point theorem for holomorphic mappings, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 61-65. MR 42#918.

[7] T. FRANZONI, The group of biholomorphic automorphisms in certain J -algebras, preprint, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.

[8] T. FRANZONI, On the biholomorphic automorphism group of infinite dimensional Cartan components, preprint, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.

[9] M. FRÉCHET, Une définition fonctionnelle des polynomes, Nouv. Ann. Math., (4) 9 (1909), 145-162.

[10] L. GILLMAN - M. JERISON, Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, Princeton, 1960.

[11] R. GÂTEAUX, Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques, Bull. Soc. Math. France, 50 (1922) 1-21.

[12] S. GREENFIELD - N. WALLACH, Automorphism groups of bounded domains in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 166 (1972) 45-57.

[13] L.A. HARRIS, Schwarz's lemma in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 62 (1969), 1014-1017.

[14] L.A. HARRIS, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, Proceedings of Infinite Dimensional Holomorphy, Lecture Notes in Math. vol. 364, Springer, New York, 1973, 13-40.

[15] L.A. HARRIS, Banach Algebras with Involution and Möbius Transformations, Journal of Funct. Anal., 11 (1972), 1-16.

[16] T.L. HAYDEN - T.J. SUFFRIDGE, Biholomorphic maps in Hilbert space have a fixed point, Pacific J. Math., 38 (1971), 419--422. MR 46 # 4288.

[17] T.L. HAYDEN - T.J. SUFFRIDGE, Fixed points of holomorphic maps in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 60 (1976), 95-105.

[18] M. HERVÉ, Analytic continuation on Banach spaces, Several Complex Variables II., Lecture Notes in Math. vol. 185, Springer, Berlin, 1971, 63-75.

[19] E. HILLE - R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semigroups, Rev. Edition, Colloq. Publ. vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.

[20] G. HOCHSCHILD, The Structure of Lie Groups, Holden-Day, Inc. San Francisco, 1966.

[21] I. JOÓ, Pointwise periodic automorphisms of compact topological F-spaces are periodic, (Elementary proof for a theorem of L.L. Stachó), megjelenés alatt

[22] S. KAKUTANI, Topological properties of the unit sphere in Hilbert space, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943), 269-271.

[23] W. KAUP,

[24] W. KAUP, Über das Randverhalten von holomorphen Automorphismen beschrankter Gebiete, Manuscripta Math. 3 (1970), 257-270. MR 43 3502

[25] W. KAUP, Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifelds. Math. Ann., 228 (1979), 39-64.

[26] W. KAUP - Y. MATSUSHIMA - T. OCHIAI, On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains, Amer. J. Math., 92 (1970), 475-498.

[27] W. KAUP - H. UPMEIER, Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc., 58 (1976), 129-133.

[28] H. KLINGEN, Über die analytischen Abbildungen verallgemeinerter Einheitskreise auf sich, Math. Ann. 132 (1956), 134-144.

[29] S. KOBAYASHI, Hiperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, New York, 1970.

[30] D. MAHARAM. On homogeneous measure algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 28 (1942), 108-111. MR 4 #12

[31] I.I. PJATECKII-SAPIRO, Regions of the type upper half plane in the theory of functions of several complex variables, Amer. Math. Soc. Translations, series 2, 31 (1963), 53-61.

[32] M.A. RIEFFEL, A characterization of commutative group algebras and measure algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 116 (1965), 32-65.

[33] H. SCHAEFFER, Banach Lattices and Positive Operators, Grundl. d. Math. Wiss. 215, Springer, Berlin, 1974.

[34] C.L. SIEGEL, Analytic Functions of Several Complex Variables, Lecture Note at the Institute for Advanced Study, Princeton N. J. 1948-49.

[35] L.L. STACHÓ, On the existence of fixed points for holomorphic automorphisms, megjelenés alatt, Annali di Matematica Pura ed Applicata.

[36] L.L. STACHÓ, A short proof that the biholomorphic automorphisms of the unit ball in certain L^p spaces are linear, Acta Sci. Math. 41 (1979), 381-383.

[37] L.L. STACHÓ, Holomorphic maps and fixed points, Ph. D. Thesis, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979/80.

[38] L.L. STACHÓ, A projection principle concerning the biholomorphic automorphisms of Banach manifolds, megjelenés alatt.

[39] T.J. SUFFRIDGE, The principle of subordinations applied to functions of several variables, Pacific J. Math., 33 (1970), 241-248.

[40] T.J. SUFFRIDGE, Starlike and convex maps in Banach spaces, Pacific J. Math., 46 (1973), 575-589.

[41] T. SUNADA, On bounded Reinhardt domains, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 119-123. MR 54#3007.

[42] A.E. TAYLOR, Analysis in complex Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 652-669.

[43] P. THULLEN, Zu den Abbildungen durch analytische Functionen mehrerer komplexer Veranderlichen. Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern, Math. Ann., 104 (1931), 244-259; 373-376.

[44] H. UPMEIER - W. KAUP - R. BRAUN, A holomorphic characterization of Jordan C -algebras, Math. Z. 161 (1978), no. 3, 277-290. MR 58 #12390.

[45] E. VESENTINI, Variations on a Theme of Carathéodory, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (4) 6 (1979), 39-68.

[46] E. VESENTINI, Automorphisms of the unit ball, megjelenés alatt, Proceedings of Seminars on Several Complex Variables.

[47] E. VESENTINI, cikk előkészületben.

[48] E. VESENTINI - T. FRANZONI, Holomorphic maps and invariant distances, North Holland, Amsterdam - New York, 1980.

[49] J.P. VIGUÉ, Sur le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe, C. R. Acad. Sci. Paris A 282 (1976), 111-114.

[50] J.P. VIGUÉ, Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., (4) 9 (1976), 203-282.

[51] J.P. VIGUÉ, Les domaines bornés analytiques d'un espace de Banach complexe et les systéms triples de Jordan, Math. Ann. 229 (1977), no.3 , 223-231. MR 56 # 5958.

[52] N. WIENER, The operational calculus. Math. Ann., 95 (1926), 557-584.

[53] M.A. ZORN, Gateaux differentiability and essential boundedness, Duke Math. J., 12 (1945), 579-583.