JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM

Stachó László

LINEÁRIS ALGEBRA

JANUS PANNONIUS TUDOMÁNY EGYETEM

Stachó László

LINEÁRIS ALGEBRA

Ez a jegyzet az MKM 7273 sz. projekt támogatásával készült

PÉCS, 1995

Lektorok:

Dr. KINCSES JÁNOS
egyetemi docens, kandidátus

Dr. VARGA ÁRPÁD
egyetemi adjunktus

BORNUS
Nyomdaipari Szolgáltató Kft.
Pécs, Damjanich u. 30.

TARTALOM

MULTILINEARITÁS, TENZOROK

ALTERNÁLÓ FORMÁK, DETERMINÁNSOK

KARAKTERISZTIKUS POLINOM, JORDAN NORMÁLFORMA

ASSZOCIATÍV ALGEBRÁK

ALGEBRAI OPERÁTOROK

ORTONORMÁLT RENDSZEREK

OPERÁTOROK EUKLIDESZI TEREKEN

Előszó

Lineáris algebrát mindenkinek érdemes tanulnia, aki természettudományos vagy műszaki ill. gazdasági pályára készül. Túlmenően a lineáris egyenletrendszerek lépten-nyomon előforduló gyakorlati alkalmazásain, ez a tantárgy az egyik leghatásosabb eszköze a matematikai szemlélet kialakításának is. Alapfogalmai és motivációi közel állnak hétköznapi szemléletünkhöz, de technikai alapmódszerei egyszerűbbek, mint a differenciál-integrál kalkuluséi.

Ez a jegyzet a pécsi Janus Pannonius Tudomány Egyetem Természettudományi Karának hallgatói számára tartott előadásom alapján készült, és igyekszik támogatni mindenek előtt az

analitikus Euklideszi- affin- és projektív geometria előadásokat,

többváltozós analízis és differenciál geometria vektor- és tenzor analízisét,

fizikus és kémikus hallgatók kvantum mechanikai képzését,

numerikus matematika lineáris módszereit tárgyaló előadásokat,

Lie algebrai kurzusokat.

Szemben az eddig elterjedt monografikus írásmóddal, amely esetében a szélsőségesen vertikális építkezés miatt egy rész kihagyása a későbbiek megértését gyakorlatilag lehetetlenné teszi, nagymértékben független fejezetek megírására törekedtem. Figyelemre méltó tény, hogy ez a lineáris algebra szokásos anyaga mellett szinte teljesen ismétlésmentesen lehetséges. Így a jegyzet alapján több kurzus is tartható, igen eltérő jelleggel:

Az egyenletrendszerekkel foglalkozó fejezet után az út három felé is ágazhat.

1) 2-3 féléves előadáshoz vehető az eredeti sorrend;
opcionálisan kihagyható fejezetek az tenzorszámítás ill. az asszociatív algebrák és algebrai operátorok fejezetei.

2) 1-2 féléves előadáshoz célszerű a vektorterek, lineáris funkcionálok, mátrixok ill. determinánsok fejezeteiből csak a rangszám tételre és a Cramer szabályhoz vezető alfejezeteket venni, utána a karakterisztikus polinom fejezetét és a valós ill. komplex vektortereket belső szorzattal tárgyaló két utolsó fejezetet.

3) Lehetséges egy merőben más megközelítés is a jegyzettel. Ez elsősorban az alkalmazásorientált hallgatók (mérnökök, kísérleti fizikusok, vegyészek, közgazdászok) számára lehet érdekes. A vektorterek és lineáris leképezések alaptulajdonságait tárgyaló néhány alfejezet után még akár a lineáris függetlenség fogalma nélkül is vehető a valós-komplex vektortereket ortonormált rendszerekkel tárgyaló utolsó két fejezet. Majd a bázis és a multilineáris funkcionál fogalmát bevezető három alfejezet után a determináns és a Cramer szabály ill. a karakterisztikus polinom fejezete következhet (ortogonális rendszerek szerinti mátrixokkal, a Jordan normálforma előttig). Az általános bázisok szerinti mátrixszámítás (opcionálisan tenzorszámítás) zárhatja ezt a fajta kurzust.

A praktikus előnyök mellett van ennek a tárgyalásmódnak elméleti jelentősége is: kiderül az olvasó számára, mi az igazi kontextusa az egyes tételeknek (pl. a mátrixok rangszám tételéhez nem kell determináns, vagy pl. az algebra alaptétele ekvivalens a sajátérték-probléma megoldhatóságával, vagy pl. a valós kvadratikus alakok főtengely-tétele a valós számok rendezési tulajdonságain alapul – ezeknek a szempontoknak a legtöbb oktatási anyag kevés figyelmet szentel). Az egyes alfejezetekben **Emlékeztető** alpontok utalnak a felhasznált egyéb eredményekre.

Aki eredeti problémával találkozik, amely nem oldható meg egy ismert algoritmusba való közvetlen behelyettesítéssel, annak a fogalmi szinten való megközelítés lényegesen több esélyt ad, még akkor is, ha a reprezentációs objektumokat látszólag könnyebben lehet áttekinteni:

Hilbert jókat nevetett Bornon és Heisenbergen, és a göttingai elméleti fizikusokon; amikor ugyanis ezek felfedezték a mátrixmechanikát, természetesen ugyanolyan nehézségekkel találták magukat szemben, mint bárki más, aki mátrixokkal akar manipulálni és velük komoly problémákat megoldani. Hilberthez fordultak segítségért; Hilbert azt mondta nekik, hogy mátrixokkal kizárólag akkor volt dolga, amikor azok mint egy differenciálegyenlet peremértékével kapcsolatos sajátértékek melléktermékeként felbukkantak. Törődjenek inkább azokkal a differenciálegyenletekkel, amelyekhez ezek a mátrixok tartoznak, valószínűleg messzebb jutnak. A fizikusok azt gondolták, hogy ez egy idétlen ötlet, és Hilbert nem fogta fel, hogy miről van szó. Később sokszor élcelődött velük, rámutatva, hogy felfedezhették volna a Schrödinger- egyenletet hat hónappal korábban, ha egy kicsit jobban figyelnek arra, amit mond.

E.U. CONDON: 60 years of Quantum Physics

Ha általában nem is ennyire nehéz a helyzet, az olvasónak célszerű emlékeznie erre az idézetre, mielőtt reprezentációkhoz nyúl. Valójában ekkor is a koordinátarendszerek megválasztása a döntő fontosságú. Több elméleti problémát ezért (rangszám tétel, főtengely tételek, Jordan normál forma) ilyen szempontból fogunk tárgyalni. Különös jelentőséget tulajdonítottam a fogalmi szintről (vektorterek, lineáris és multilineáris leképezések) a reprezentációk szintjére (mátrixok, tenzorok) való áttérés folyamatának. Ehhez olyan átmeneti fogalmakat vezettem be, mint pl. a vektorrendszerek egymással való osztása (ha $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$ vektorok és pontosan egy olyan lineáris leképezés van, amelyre $e_j \mapsto f_j$ ($j = 1, \ldots, n$), akkor ezt $(f_1, \ldots, f_n) : (e_1, \ldots, e_n)$ jelöli), vagy pl. az A leképezés E, F koordinátarendszerek szerinti $F'AE$ mátrixa. Egy ilyen köztes fogalom, a determináló forma (olyan n-változós, változóiban lineáris számértékű függvény egy n-dimenziós téren, amely pontosan akkor 0, ha a változói lineárisan függő rendszert alkotnak) vezet a Cramer szabály igen egyszerű magyarázatához.

A tételek elsősorban a fogalmi szinten jelennek meg. Az ezzel járó absztraktságot konstruktív bizonyítások ellensúlyozzák, amelyek szoros kapcsolatban vannak gyakorlatban használt numerikus eljárásokkal. Így pl. a Householder elimináció itt az egyik fő eszköze az Euklideszi terek tárgyalásának. Még a Jordan normálformának is van konstruktív megközelítése az algebrai operátorokról szóló fejezetben (ahol a Chevalley-féle kínai maradék tételen alapuló módszert módosítva a spektrál-projekciókat explicit interpolációs formulákkal adjuk meg).

A jegyzet előismeretek nélkül is olvasható, annak ellenére, hogy az analízis eszközeit használja a valós és komplex terek esetében. Ez utóbbiakat szigorúan elkülönítve ismerteti (emlékeztető alpontokban, megjegyzésekben és példákban), és az olvasó számára illusztrációja lehet az analízis és algebra interferenciájának.