JANUS PANNONIUS
TUDOMÁNYEGYETEM
PÉCS

Stachó László

ANALITIKUS EUKLIDESZI GEOMETRIA

Lektorok:
Dr. KINCSES JÁNOS
egyetemi docens, kandidátus

Dr.VARGA ÁRPÁD
egyetemi adjunktus

TARTALOM

Bevezetés

Síkbeli Descartes koordináták és izometriák

Descartes koordinátázási axiómája 1
Descartes koordinátarendszerek kapcsolata 2
Izometriák 7
Eltolások 8
Forgatások 9
Cos-tétel, félegyenesek 11
Tükrözések 14

Többdimenziós koordinátázások és trigonometria

Descartes koordináták magasabb dimenziókban 17
Műveletek $\mathbb{R}^N$-ben 19
Schwarz egyenlőtlenség 21
Háromszög-egyenlőtlenség 22
Egyenes szakaszok 22
Szögek és a skalárszorzat 23
Sin-tétel 25
A háromszög szögösszege 26
Egyenesek 28
Pont-egyenes távolság 30
A háromszög területe 31

Másodrendű görbék és felületek

Algebrai síkgörbék 36
A másodrendű síkgörbék osztályozása 36
Többdimenziós másodrendű felületek 39
Másodrendű görbék két invariánsa 40
Kúpszeletek 42
Apolloniosz gömbök 45
Fókuszpontok 46
Kúpszelet poláris alakja 47

Vektorstruktúrák E^{N} fölött

Euklidesi vektorok 49
Ponthoz kötött vektoralgebrák 50
Paralelogrammák 53
Szabad vektorok 55
Eltolások 58
Párhuzamosság 61

E^3 metrikus geometriája

Vektori szorzat $\mathbb{R}^3$-ban 65
D-rsz. konstrukciója E^3-ban 67
Alterek 70
Alterek távolsága, szöge 74
Tetraéder térfogata 78
Hármas szorzat $\mathbb{R}^3$-ban 80
Szabad vektorok vektori szorzata, jobbkéz-probléma 81

Bevezetés

Mai matematikai gondolkodásunk alapjait kétségkívül **Euklides*** 13 könyvből álló **Elemek** című műve rakta le, amely az i.e. VI-IV. évszázadok intenzív görög matematikai kutatásainak eredményeit foglalta össze. Anélkül, hogy tudna róla, e könyvek tartalmának jelentős részét a legtöbb középiskolás ismeri geometriai tanulmányaiból. Az Elemek látszólag első sorban tényleg a geometriával foglalkozik. Valójában megjelenik benne az a kijelentés, hogy mindennek a **számok** az alapjai. A messze legizgalmasabb probléma pedig a görögök számára az volt, miként lehet a geometria objektumait a számok nyelvére lefordítani. A mából visszatekintve azt lehet mondani, hogy feltalálták a geometria és a valós számok elméletének, sőt az egész matematikának a közös logikai alapját, az axiómatikus tárgyalásmódot, ami az eredeti probléma megoldásánál lényegesen nagyobb vívmány, ugyanakkor az eredeti problémát teljes mélységében csak kb. 2000 évvel később sikerült csak tisztáznia **Descartes**nak a koordinátarendszer fogalmának világos megadásával. A síkbeli alakzatok leírására Euklides rendező alakzatokként az **egyenesek**et vezette be egy bonyolult axiómatika segítségével, amely garantálta olyan számértékű függvények bevezethetőségét, mint a **távolságok** ill. **szögek**. Lényegében az $\mathbb{R}$ számegyenes algebrai és topológiai tulajdonságait is axiómatizálta az egyedül álló egyenes leírásával. Ami ezután jön az Elemekben az egyenesek egymáshoz viszonyított elhelyezkedésével kapcsolatban, az több eltérő általánosításokhoz vezető tárgyalásmódra ad lehetőséget. Ha a távolságot és a szöget tekintjük alapfogalmaknak, akkor a **metrikus** Euklidesi geometriát kapjuk, ha pedig csak az egyenesek közti rendezési axiómákból indulunk ki, az **affin** geometriához jutunk, amely a valós számokkal való lazább kapcsolata miatt lineáris algebrai irányokban jól általánosítható. Mindezen geometriák a párhuzamosság axiómáján alapulnak (az **S** síkon $\forall\, L$ egyenes $\subset S\ \forall\, p \in S \setminus L\ \exists!\, M$ egyenes $\subset S\ p \in M$ és $L \cap M = \emptyset$). A párhuzamossági axióma tagadására épülő geometriák más technikájú tárgyalást igényelnek, mint az itt következő lineáris algebrai indíttatású analitikus geometria. Ezzel szemben a **projektív** geometria jól tárgyalható a kiépítendő matematikai apparátussal.

Célunk az Euklidesi geometria három említett ágának **analitikus**, azaz koordinátageometriai leírása. Alapul vesszük a valós számok $\mathbb{R}, +, \cdot, >$ strukturáját (a szokásos axiómái megtalálhatók a legtöbb bevezető analízis tankönyvben). Ezzel

---

*A görög eredetinek az Eukleidész alak felel meg inkább, de ez a latinosított forma az elterjedtebb a szakirodalomban. Ha szakkifejezésben használjuk, az "euklidesi" jelzőt nagy kezdőbetűvel fogjuk írni (pl. Euklidesi geometria).

szemben nem lesz szükséges az Euklidesi geometria axiómáinak ismerete. (Nem is fogjuk verifikálni, hogy az általunk bevezetett objektumok teljesítik-e azokat. Az érdeklődő olvasó maga technikai nehézségek nélkül megpróbálkozhat vele.) Elvileg tehát minden geometriai előismeret nélkül felfogható e könyv. Az intelligens olvasásához azonban nagyon hasznos lehet a klasszikus középiskolai (intuitív) geometriai és trigonometriai anyag szilárd tudása.