Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984) 185—201

AFFIN PROJEKCIÓK VÉGTELEN SZORZATAI NUMERIKUS SZEMPONTBÓL*

STACHÓ LÁSZLÓ

Szeged

A cikk a lineáris funkcionál egyenletrendszerek megoldására szolgáló *Kaczmarz típusú eljárások* viselkedésével foglalkozik *Hilbert térben*, a megoldással nem rendelkező rendszerekre való különös tekintettel. A klasszikus esetben, véges dimenziós egyenletrendszernél, éles becslést nyújt a *randomizált Kaczmarz iterációk* konvergencia-sebességére.

1. Bevezetés

Amikor az elektronikus számítógépek megjelenése lehetővé tette a kézi számolással már kezelhetetlenül nagy

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \tag{1.1}$$

lineáris egyenletrendszerek effektív megoldását, a futtatási tapasztalatok kezdettől fogva igen negatívnak bizonyultak a klasszikus algebrai megoldási módszereket illetően. NEUMANN JÁNOS, W. BERGMANN és D. MONTGOMERY [11] már 1946-ban külön munkát szenteltek az (1.1) típusú egyenletrendszerek akkor ismert numerikus megoldási eljárásainak a vizsgálatára, és kimutatták az eliminációs módszerek igen erős instabilitását: A kerekítési hibák 20 ismeretlentől kezdve már használhatatlanná tehetik a *Gauss-eliminációt.* A figyelem ettől kezdve az iterációs eljárásokra irányult, mégpedig elsősorban az (1.1) olyan speciális eseteire, amelyeknél az (a_{ij}) mátrixra súlyos korlátozó feltételek (pl. főátló-dominancia) teljesülnek. A jelen dolgozat célja az (1.1) rendszernek a *Kaczmarz projekcióiból* alkotott konvex kombinációk (nem feltétlenül stacionárius) iterálásával való megoldási módszereinek a vizsgálata és ezek néhány általánosítása végtelen dimenzióra.

$\mathbf{R}^n$-nel jelölve az $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ alakú valós n-esek vektorterét az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ skaláris szorzattal ellátva, (1.1) így írható:

$$\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}\rangle = b_k \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{1.2}$$

---

* A dolgozat annak a tanulmánynak egy átdolgozása, amelyet a szerző az *Április 4. Gépipari Művek* (Kiskunfélegyháza, Csanyi u. 2.) számára készített az *Április 4. Gépipari Művek* és a *József Attila Tudomány Egyetem Analízis Tanszéke* között 1980. december 5-én létrejött kutatási-fejlesztési szerződés 3. pontjának keretében.

Vagyis az (1.1) feladat megoldása abból áll, hogy meg kell keresnünk az

$$M_k = \{\mathbf{x}: \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}\rangle = b_k\} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

hipersíkok metszetét. 1937-ben KACZMARZ [10] a következő eljárást javasolta:

Kiindulva tetszőleges $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ pontból, képezzük annak $\mathbf{x}_1$ merőleges vetületét M_1-re. Majd $\mathbf{x}_1$-et vetítjük M_2-re, így kapjuk $\mathbf{x}_2$-t. Ezt M_3-ra vetítjük, stb., — az M_m-re való vetítés után újra M_1-re való vetítéssel folytatjuk az $(\mathbf{x}_i)$ sorozatot. Azaz

$$\mathbf{x}_{i+1} = F_{1+\mathrm{mod}_m i}(\mathbf{x}_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots,), \tag{1.3}$$

ahol $F_1, \ldots, F_m$ rendre az $M_1, \ldots, M_m$ hipersíkokra való merőleges vetítést jelölik. Amennyiben $\bigcap_{k=1}^{m} M_k$ egyetlen pont, akkor az $(\mathbf{x}_i)$ sorozat geometriai rendben konvergál hozzá, az (1.1) egyetlen $\mathbf{x}^*$ megoldásához, tehát valamely $\mathbf{x}_0$-tól függő $q(\mathbf{x}_0) < 1$ konstanssal

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}^*\| \leqq q(\mathbf{x}_0)^i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

(Itt $\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{1/2}$ a $\mathbf{v}$ vektor hossza).

Később [3], [14] a *Kaczmarz eljárással* rokon további geometriai iterációs módszereket publikáltak. Azonban az általunk ismert irodalom nem foglalkozik a konvergencia-rátájuk pontos becslésével. A jelen dolgozat 3. részében kitérünk erre a problémára egy általánosabb szituációban, és — alapvető szempontok szerint — tovább nem javítható becslést adunk az $\mathbf{a}_k$ vektorok néhány paramétere segítségével.

Ez a következő tényeken alapszik: $F_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mu_k(\mathbf{x})\mathbf{a}_k$, ahol $\mu_k(\mathbf{x}) = (b_k - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_k\rangle)/\|\mathbf{a}_k\|^2$. Így ha $\bar{Q}$ jelöli egy Q mennyiségnek a numerikus végrehajtás során kapott értékét, akkor $\bar{F}_k(\mathbf{x}) - F_k(\mathbf{x}) = (\bar{\mu}_k(\mathbf{x}) - \mu_k(\mathbf{x}))\mathbf{a}_k = \delta_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k$ alakú, ahol $\mathbf{u}_k$ az $\mathbf{a}_k$ irányú egységvektort jelöli. Ugyanakkor a 3.7 lemmából könnyen következik, hogy ha pl. $m=n$ és az (1.1) rendszer determinánsa nem nulla, akkor megadható olyan $M(=M(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n))$ korlát, amelyre tetszőleges $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^N$ és $\varepsilon > 0$ mellett az $\{F(\mathbf{x}_0): F \in \Sigma\}$ ponthalmaz átmérője kisebb $M \cdot \varepsilon \cdot (1 + \|\mathbf{x}_0\|)$-nál, ahol Σ az összes $\mathbf{x} \mapsto F_k(\mathbf{x}) + \delta \mathbf{u}_k$ $(k = 1, \ldots, n;\ |\delta| \leqq \varepsilon)$ alakú leképezések által generált félcsoport. Azaz, ha a kerekítési hibát egy ε érték alatt tudjuk tartani az $\mathbf{x}_0$-ból kiinduló *Kaczmarz iteráció* során, akkor a kapott $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \ldots$ sorozat átmérője $M \cdot \varepsilon \cdot (1 + \|\mathbf{x}_0\|)$ alatt marad. (Az M konstans — durván szólva — annál kisebb, minél nagyobb a különböző $\mathbf{u}_k$ vektorok közti minimális szög.)

Az (1.2) probléma felvethető minden változtatás nélkül $\mathbf{R}^n$ helyett tetszőleges *H Hilbert tér* vektoraira (a H-beli skalárszorzatot szintén $\langle\ ,\ \rangle$-vel jelölve). Sőt a végtelen dimenziós kontextus hívja fel a figyelmet az (1.2) alábbi átfogalmazásának fontosságára

$$\mathbf{x} \in M_k \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{1.4}$$

ahol $M_1, \ldots, M_n$ tetszőleges affin alterei H-nak (azaz olyan zárt halmazok, melyek bármely két pontjukkal együtt a rajtuk áthaladó egyenest is tartalmazzák).

Véges dimenziós tér esetén az (1.4) feladat mindig átírható (1.2) alakúra, hiszen egy r dimenziós affin altér $\mathbf{R}^n$-ben mindig előáll $(n-r)$ hipersík metszeteként. Ezzel szemben végtelen dimenzióban mindig vannak olyan affin alterek, amelyek csak végtelen sok hipersík metszeteként jönnek létre. A tisztán geometriai (1.4) feladatkitűzést célszerűbb a következő funkcionális alakban is kimondani:

$$F_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (k = 1, \dots, m), \tag{1.5}$$

ahol F_k az M_k-ra való ortogonális projekció.

A klasszikus mechanika számos hullámegyenlete olyan extrémum feladat, amely ekvivalens valamilyen (1.5) típusú fixpontproblémával végtelen dimenziós *Hilbert térben* [2], [4]. Az operátor-algebrák elmélete is felvetett hasonló kérdéseket: fontos szerepet játszik NEUMANN JÁNOS [13] cikkében az az észrevétel, hogy amennyiben L_1, L_2 alterei H-nak és P_k az L_k-ra való ortogonális projekció ($k=1, 2$), akkor minden $\mathbf{x} \in H$-ra a $P_1\mathbf{x}, P_2P_1\mathbf{x}, P_1P_2P_1\mathbf{x}, \dots$ sorozat konvergál $\mathbf{x}$-nek az $L_1 \cap L_2$-re való $P\mathbf{x}$ merőleges vetületéhez. Figyelemre méltó tény, hogy itt a konvergencia már nem szükségképpen geometriai rendű, szemben a véges dimenziós esettel. Ez a nehézség magyarázza, hogy a *Kaczmarz-tétel* végtelen dimenziós analogonját, amely kimondja, hogy amennyiben $M_1 \cap \dots \cap M_m \neq \emptyset$, akkor minden $\mathbf{x}_0 \in H$-ra az (1.3) pontsorozat konvergál $\mathbf{x}_0$ vetületéhez $M_1 \cap \dots \cap M_m$-re, csak 1958-ban bizonyította be BROWDER [2], HALPERIN [8] majd APOSTOL [1] kissé később más megközelítéssel mély operátorelméleti általánosításokat adtak BROWDER e tételére.

A szerző köszönettel tartozik POGÁNY CSABÁnak, aki a problémakörre felhívta a figyelmét.

2. Problémafelvetés

Az (1.4) problémát az eddigi irodalom szinte kizárólag csupán abban a speciális esetében tárgyalja, amikor $M_1 \cap \dots \cap M_m \neq \emptyset$. A numerikus matematika szempontjából ugyanakkor nagy jelentőségű lenne az (1.4) különböző megoldási algoritmusainak teljes viselkedésvizsgálata éppen az $M_1 \cap \dots \cap M_m = \emptyset$ esetben, mivel még a klasszikus (1.1) feladathoz sem rendelkezünk pillanatnyilag hatékony előrejelző eljárással a megoldás létezésére vonatkozóan. Másrészt az utóbbi időben kibontakozó döntéselmélet gyakran vet fel olyan problémákat, amelyek (1.4) alakra hozhatók, de ahol (szemben pl. a legtöbb fizikai alkalmazással) a megoldás létezése, ill. egyértelműsége a priori nem ismert, esetleg éppen ez a fő kérdés. A döntéselmélet az (1.4) típusú rendszerekhez általánosított megoldás gyanánt megkonstruál olyan φ operátorokat, amelyek az alaptér altér m-eseihez úgy rendelnek vektorokat, hogy $M_1 \cap \dots \cap M_m \neq \emptyset$ esetén az $\mathbf{x} = \varphi(M_1, \dots, M_m)$ választás mindig kielégítse (1.4)-et (vö. [15]). Az ilyen döntés-operátorok iteratív kiszámítási módszereinek (ill. célszerű új operátoroknak) a kidolgozásához lényeges a véges affin altérrendszerekre való merőleges vetítések konvex lineáris kombinációiból alkotott iteratív limeszek vizsgálata.

Ezzel kapcsolatban a következő alapvető kérdések tehetők fel:

1. Adott $\mathbf{x} \in H$ pont mellett hogyan jellemezhető az összes lehetséges

$$F_{i_1}(\mathbf{x}),\ F_{i_2}F_{i_1}(\mathbf{x}),\ F_{i_3}F_{i_2}F_{i_1}(\mathbf{x}), \dots$$

alakú pontsorozatok torlódási pontjaiból alkotott halmaz, ahol $1 \leq i_k \leq m$ ($k=1,2,\dots$) és az (i_k) indexsorozatban az $1, \dots, m$ számok mindegyike végtelen sokszor előfordul?

2. Speciálisan, igaz-e, hogy amennyiben $\{0\} = M_1 \cap \dots \cap M_m$, akkor minden $\mathbf{x} \in H$ kiindulópontra és minden az $1, \dots, m$ számok mindegyikét végtelen sokszor

tartalmazó $i_1, i_2, \ldots$ indexsorozatra

$$F_{i_n} F_{i_{n-1}} \ldots F_{i_1}(\mathbf{x}) \to \mathbf{0} \quad (n \to \infty)?$$

3. Hogyan jellemezhető az összes lehetséges

$$G_1(\mathbf{x}), \quad G_2 G_1(\mathbf{x}), \quad G_3 G_2 G_1(\mathbf{x}), \ldots$$

alakú sorozatok torlódási pontjainak halmaza, ahol $\mathbf{x} \in H$ tetszőleges pont, a $G_1, G_2, \ldots$ leképezések az $F_1, \ldots, F_m$ affin operátorok véges kompozícióiból álló véges konvex lineáris kombinációk úgy, hogy az F_j operátorok mindegyike előfordul végtelen sok G_k kifejezésében és a $\{G_1, G_2, \ldots\}$ család véges sok különböző elemből áll csak.

A numerikus matematika szempontjából különösen érdekesek az alábbi aspektusai az 1, 2, 3 problémáknak:

4. Mik a torlódási pontjai egy 3-beli $G_k \ldots G_1(\mathbf{x})$ $(k=1, 2, \ldots)$ sorozatnak, hogy ha a $G_1, G_2, \ldots$ operátorsorozat periodikus (azaz $G_{k+N} = G_k$ valamely N-re)?

5. A $G_1 = G_2 = \ldots = G$ esetben melyek azok az $\mathbf{x}$ pontok, amelyekre a $G^k(\mathbf{x})$ $(k=1, 2, \ldots)$ sorozat geometriai rendben konvergál, s hogyan becsülhető a konvergencia sebessége ekkor?

6. Ha $\{0\} = M_1 \cap \ldots \cap M_m$ és $H = \mathbf{R}^n$, adható-e 1-nél kisebb közös felső korlát az összes olyan $F_{i_n} \ldots F_{i_2} F_{i_1}$ alakú leképezések lineáris operátor normájára, amelyeknél az $i_1, \ldots, i_n$ indexek között az $1, \ldots, m$ számok mindegyike legalább egyszer előfordul?

A felsorolt kérdések egyikét sem tárgyalta az eddigi szakirodalom a teljes általánosságában. A kimerítő válaszhoz legközelebb 4-nél jutottak, ahol is APOSTOL [1] egy tétele segítségével lényeges haladást (és véges dimenzióra végleges eredményt) sikerült elérni. Figyelemre méltó, hogy technikailag milyen problematikus még annak a plauzibilis ténynek a bizonyítása is, hogy az 1. tárgyát képező torlódási ponthalmaz mindig korlátos, ha $H = \mathbf{R}^n$. A jelen dolgozat — bár más sorrendben — érinti mind a hat kérdést, azonban (első sorban a végtelen dimenziós esetben) számos problémát hagy nyitottan, s újabbakat is felvet. Ezek mindegyike érdemesnek tűnik további elméleti vizsgálatokra. Fő eredményünk a 6. kérdésre adott pozitív válasz, olyan bizonyítással, amely pontos becslést is szolgáltat, s így lehetőséget nyújt 5., ill. 2. teljes megválaszolásához a $H = \mathbf{R}^n$ esetben 1. és 3-mal kapcsolatban azt sikerült megállapítanunk, hogy mely irányokban korlátosak a kérdéses torlódási pont halmazok véges dimenzióban.

3. Affin alterekre való vetítések random iteráltjai $\mathbf{R}^N$-ben

Legyenek $M_1, \ldots, M_m$ rögzített affin alterei $\mathbf{R}^N$-nek. Az M_k-ra való (merőleges) vetítést jelöljük F_k-val. Bevezetjük továbbá a $\mathbf{b}_k = F_k(\mathbf{0})$, $L_k = M_k - \mathbf{b}_k$, $P_k \colon \mathbf{x} \mapsto F_k(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_k$ jelöléseket. Azaz L_k az M_k halmaz $\mathbf{0}$-ba való párhuzamos eltolásából kapott altér, P_k pedig az L_k-ra való ortogonális projekció lineáris operátora.

Tekintsük az $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^N$ vektorok

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{y}^{(2)}, \quad \mathbf{y}^{(1)} \perp L, \; \mathbf{y}^{(2)} \in L, \quad \text{ahol} \quad L = L_1 \cap \ldots \cap L_m$$

direkt felbontását. Vegyük észre, hogy $F_k^{(s)}(\mathbf{x})=(F_k(\mathbf{x}))^{(s)}$-et írva

$$F_k^{(1)}(\mathbf{x}) = F_k(\mathbf{x}^{(1)}) = F_k^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}),\ F_k^{(2)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(2)},\ b_k^{(1)} = \mathbf{b}_k,\ \mathbf{b}_k^{(2)} = \mathbf{0}$$

tetszőleges $k=1, \ldots, m$ és $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^N$ mellett.

Innen azonnal adódik, hogy bármely véges $i_1, \ldots, i_n$ indexsorozatra

$$F_{i_n}F_{i_{n-1}}\ldots F_{i_1}(\mathbf{x}) = F_{i_n}^{(1)}F_{i_{n-1}}^{(1)}\ldots F_{i_1}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)})+\mathbf{x}^{(2)}. \tag{3.1}$$

Így az általánosság lényeges megszorítása nélkül maradhatunk az $F_{i_n}^{(1)}\ldots F_{i_1}^{(1)}$ alakú szorzatok vizsgálatánál, vagy ami ezzel ekvivalens, feltehetjük, hogy

$$L_1\cap\ldots\cap L_m = \{\mathbf{0}\}. \tag{3.2}$$

Az is látszik azonnal, hogy

$$\begin{aligned} F_{i_n}F_{i_{n-1}}\ldots F_{i_1}(\mathbf{x}) &= P_{i_n}(P_{i_{n-1}}+(\ldots+(P_{i_1}\mathbf{x}+\mathbf{b}_{i_1})\ldots)+b_{i_{n-1}})+\mathbf{b}_{i_n} = \\ &= P_{i_n}\ldots P_{i_1}\mathbf{x}+P_{i_n}\ldots P_{i_2}\mathbf{b}_{i_1}+P_{i_n}\ldots P_{i_3}\mathbf{b}_{i_2}+\ldots+P_{i_n}\mathbf{b}_{i_{n-1}}+\mathbf{b}_{i_n} = \\ &= P_{i_n}\ldots P_{i_1}\mathbf{x}+F_{i_n}\ldots F_{i_1}(\mathbf{0}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ezt a fejezetet első sorban az

$$S = \bigcup_{\substack{(i_1, i_2\ldots)\in J \\ \mathbf{x}\in\mathbf{R}^N}} \{\text{az } [F_{i_n}\ldots F_{i_1}(\mathbf{x})]_{n=1}^{\infty} \text{ sorozat torlódási pontjai}\}$$

halmaz vizsgálatának szenteljük, ahol a továbbiakban I azon indexsorozatok családja, amelyek az $1, \ldots, m$ számokból állnak, és ezek mindegyikét végtelen sokszor felveszik.

3.1. Tétel. Minden $(i_1, i_2, \ldots)\in I$ indexsorozatra fennáll (3.2) esetén

$$P_{i_n}\ldots P_{i_1}\to 0 \quad (n\to\infty). \tag{3.4}$$

3.2. Következmény. (3.2) esetén

$$S = \bigcup_{(i_1,\ldots)\in I} \{\text{az } [F_{i_n}\ldots F_{i_1}(\mathbf{0})]_{n=1}^{\infty} \text{ sorozat torlódási pontjai}\}.$$

Bizonyítás. (3.3)-ból azonnal látszik, hogy ha a tétel igaz, akkor $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^N$ és $(i_1, i_2, \ldots)\in I$ esetén az $[F_{i_n}\ldots F_{i_1}(\mathbf{x})]_{n=1}^{\infty}$ torlódási pontjai azonosak az $[F_{i_n}\ldots F_{i_1}(\mathbf{0})]_{n=1}^{\infty}$ sorozatéival, ami bizonyítja (3.2)-t.

A tétel bizonyításához belátjuk a következő, jóval erősebb állítást:

3.3. Tétel. Ha (3.2) áll, akkor létezik olyan $q<1$ konstans, hogy

$$\|P_{j_n}\ldots P_{j_1}\| \leqq q \quad \text{valahányszor} \quad \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, m\}. \tag{3.5}$$

A (3.5) becslés valóban adja (3.4)-et: Ha ugyanis (3.5) teljesül, akkor

$$\|P_{i_k}\ldots P_{i_1}\| \leqq q^{\nu(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3.6}$$

ahol $\nu(k)$ az a legnagyobb r szám, amelyhez választható olyan $0=n_0<n_1<\ldots$ $\ldots<n_r=k$ alakú beosztása az $\{1, \ldots, k\}$ indexsorozatnak, hogy $\{i_j\colon n_{t-1}<j<n_t\}=$ $=\{1, \ldots, m\}$ legyen $t=1, \ldots, r$ mellett. Márpedig $(i_1, i_2, \ldots)\in I$ esetén $\nu(k)\to\infty$ $(k\to\infty)$.

3.3 Bizonyítása m szerinti teljes indukcióval történik.

Az $m=1$ esetben a $q=0$ választás triviálisan megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy tetszőleges $L_1', \ldots, L_{m-1}' \subset \mathbf{R}^N$ alterek mellett $L_1' \cap \ldots \cap L_{m-1}' = \{0\}$ esetén van olyan $q_{m-1}(L_1', \ldots, L_{m-1}') < 1$ szám, hogy

$$\|P_{i_{n'}}' \ldots P_{i_1}'\| \leqq q_{m-1}(L_1', \ldots, L_{m-1}') \quad \text{valahányszor} \quad \{i_1, \ldots, i_{n'}\} = \{1, \ldots, m-1\} \tag{3.7}$$

ahol P_k' az L_k'-ra való merőleges vetítést jelöli.

Legyenek $L_1, \ldots, L_m$ olyan alterei $\mathbf{R}^N$-nek, amelyek metszete az origó, és legyen $j_1, \ldots, j_n$ egy olyan véges indexsorozat, melyre $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, m\}$. Tekintsük az $n' = \max\{k\colon \{j_1, \ldots, j_k\} \neq \{1, \ldots, m\}\}$ indexet. Mivel az L_k-ra való P_k projekció mindig kontrakció,

$$\|P_{j_n} \ldots P_{j_1}\| \leqq \|P_{j_{n'+1}} P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\| \tag{3.8}$$

hiszen $n' < n$ szükségképpen. Mivel $\{j_1, \ldots, j_{n'+1}\} = \{1, \ldots, m\}$ az általánosság megszorítása nélkül vehetjük, hogy $\{j_1, \ldots, j_{n'}\} = \{1, \ldots, m\}$ és $j_{n'+1} = m$. Ezt feltéve, vezessük be az $L' = L_1 \cap \ldots \cap L_{m-1}$, ill. $L_k' = \{\mathbf{x} \in L_k\colon \mathbf{x} \in L'\}$ $(k=1, \ldots, m-1)$ altereket és a rájuk való P', ill. $P_1', \ldots, P_{m-1}'$ projekciókat. Ekkor $0 = P'P_k' = P_k'P'$, $P_k = P' + P_k'$ $(k=1, \ldots, m-1)$ és így

$$P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1} = P' + P_{j_{n'}}' \ldots P_{j_1}'. \tag{3.9}$$

Teljesül továbbá $L_1' \cap \ldots \cap L_{m-1}' = \{0\}$. Tehát (3.7) szerint

$$\|P_{j_{n'}}' \ldots P_{j_1}'\| \leqq q_{m-1}(L_1', \ldots, L_{m-1}') = q < 1.$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ egységvektort, és jelöljük $\mathbf{y}$-nal a $P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}$ vektor vetületét a $P'\mathbf{x}$ és $P_{j_{n'+1}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}$ vektorok által kifeszített 2 dimenziós K altérre. Vegyük észre, hogy $\mathbf{x}' = P'\mathbf{x}$, ill. $\mathbf{x}'' = (1-P')\mathbf{x}$ -et írva,

$$P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x} = \mathbf{x}' + P_{j_{n'}}' \ldots P_{j_1}'\mathbf{x}'', \tag{3.10}$$

és így

$$P_{\mathbf{y}}' = \mathbf{x}' = P'(P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad P_{j_{n'+1}}\mathbf{y} = P_{j_{n'+1}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x} = P_m(P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}).$$

Vagyis $\mathbf{y} - \mathbf{x}' \perp \mathbf{x}$ és $\mathbf{y} - P_m P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x} \perp P_m P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}$. Legyen $\varrho = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}'\|$, $\xi = \|\mathbf{x}'\|$ és vegyünk fel K-ban egy olyan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ortonormált bázist, melyre $\mathbf{x} = \xi\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{y} - \mathbf{x}' = \varrho\mathbf{e}_2$. Jelölje $\mathbf{e}$ a $P_m P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}$ irányába mutató egységvektort. Ekkor nyilván

$$\begin{aligned} \|P_{j_{n'+1}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}\| &= \|P_m\mathbf{y}\| = \langle P_m\mathbf{y}, \mathbf{e}\rangle = \langle \mathbf{y}, P_m\mathbf{e}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}\rangle = \\ &= \langle \xi\mathbf{e}_1 + \varrho\mathbf{e}_2, \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2\rangle = \xi\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_1\rangle + \varrho\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_2\rangle \leqq \\ &\leqq \xi|\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_1\rangle| + \varrho|\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_2\rangle|. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{e}$ egységvektor, $|\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_1\rangle|^2 + |\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_2\rangle|^2 = 1$. Azaz valamely $t \in [0, \pi/2]$-re $|\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_1\rangle| = \cos t$ és $|\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_2\rangle| = \sin t$. A t szögre vonatkozóan a következő (pontos) alsó becsléssel rendelkezünk:

$$\cos t \leqq \sup\{|\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_1\rangle|\colon \|\mathbf{f}\| = 1, \mathbf{f} \in L'\} \leqq \sup\{|\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle|\colon \|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{g}\| = 1, \mathbf{f} \in L', \mathbf{g} \in L_m\}$$

(ugyanis könnyen konstruálható tetszőleges $\mathbf{y} \in L_m$ egységvektorhoz $\mathbf{x}$ úgy, hogy $P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}/\|P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\| = P_m P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x}/\|P_m P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\| = \mathbf{g}$ legyen). Tehát geometriailag interpretálva,

$$t \leqq \alpha_m = \sphericalangle(L_m, L_1 \cap \ldots \cap L_{m-1})$$

ahol

$$\alpha_m = \arccos \sup \{|\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle| : \|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{g}\| = 1,\ \mathbf{f} \in L',\ \mathbf{g} \in L_m\}$$

az L_m és L' alterek által bezárt szög. Mivel most $L_m \cap L' = \{\mathbf{0}\}$, az egységgömb kompaktsága miatt $\alpha_m > 0$. Becsüljük ezután ϱ-t és ξ-t. Q-val jelölve a K-ra való vetítést,

$$\varrho = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}'\| = \|QP_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x} - Q\mathbf{x}'\| = \|Q(P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x} - \mathbf{x}')\| \leqq$$

$$\leqq \|P_{j_{n'}} \ldots P_{j_1}\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = ((3.10) \text{ szerint}) = \|P'_{j_{n'}} \ldots P'_{j_1}\mathbf{x}''\| \leqq$$

$$\leqq \|P'_{j_{n'}} \ldots P'_{j_1}\| \cdot \|\mathbf{x}''\| \leqq q \cdot \|\mathbf{x}''\|.$$

Másfelöl $\xi = \|\mathbf{x}'\|$ és $\|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}''\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 = 1$. Így valamely $s \in [0, \pi/2]$ és $\varepsilon \in [0, q]$ mellett

(3.11) $$\xi = \cos s, \quad \varrho = \varepsilon \cdot \sin s$$

írható. Így $\|P_{j_n} \ldots P_{j_1}\|$ $(\leqq \|P_{j_{n'+1}} \ldots P_{j_1}\|)$-ra a következő felső becslést kapjuk:

$$\|P_{j_n} \ldots P_{j_1}\| \leqq \max \{\cos s \cdot \cos t + \varepsilon \cdot \sin s \cdot \sin t : t \in [\alpha_m, \pi/2],\ s \in [0, \pi/2],\ \varepsilon \in [0, q]\}.$$

Ez tovább nem javítható, hiszen tetszőleges $s \in [0, \pi/2]$, $\varepsilon \in [0, q]$ párhoz nyilván választható olyan $j_1, \ldots, j_n$ indexsorozat és $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, hogy (3.11) teljesüljön. Tehát

$$\|P_{j_n} \ldots P_{j_1}\| \leqq \max \{\cos s \cdot \cos t + q \cdot \sin s \cdot \sin t : \alpha_m \leqq t \leqq \pi/2,\ 0 \leqq \varepsilon \leqq \pi/2\}.$$

Elemi számolás mutatja, hogy itt a jobb oldal értéke mennyi:

$$\|P_{j_n} \ldots P_{j_1}\| \leqq \frac{\cos^2 \alpha_m + q \cdot \sin^2 \alpha_m}{\sqrt{\cos^2 \alpha_m + q^2 \sin^2 \alpha_m}} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \alpha_m \\ q \sin \alpha_m \end{pmatrix}^0, \begin{pmatrix} \cos \alpha_m \\ \sin \alpha_m \end{pmatrix} \right\rangle < 1,$$

ami bizonyítja a tételt. $\left(\text{Itt } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$.

A bizonyítás alapján az alábbi rekurzív formulához jutunk a

$$q_m(L_1, \ldots, L_m) = \sup \{\|P_{j_n} \ldots P_{j_1}\| : \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, m\}\}$$

konstansokkal kapcsolatban:

3.4. KÖVETKEZMÉNY.

$$q_m(L_1, \ldots, L_m) = \max_{k=1, \ldots, m} \frac{\cos^2 \beta_k + \varepsilon_k \sin^2 \beta_k}{\sqrt{\cos^2 \beta_k + \varepsilon_k^2 \cdot \sin^2 \beta_k}},$$

ahol

$$\beta_k = \sphericalangle(L_k, \bigcap_{j \neq k} L_j^k), \quad \varepsilon_k = q_{m-1}(L_1^k, \ldots, L_{k-1}^k, L_{k+1}^k, \ldots, L_m^k)$$

az $L_j^k = \{\mathbf{z} \in L_j : \mathbf{z} \perp \bigcap_{r \neq k, j} L_r\}$ alterek mellett.

3.5 Megjegyzés. Régóta ismeretes az a sejtés, hogy a (3.4) formula (3.1 tétel) végtelen dimenziós *Hilbert tér* esetén is áll, ha a konvergenciát nem az operátornorma szerinti, hanem az erős topológiában vesszük.

A fejezet lezárásaképpen rátérünk az S halmaz korlátossági tulajdonságainak vizsgálatára.

3.6. TÉTEL. Ha $L_1 \cap \ldots \cap L_m = \{\mathbf{0}\}$, akkor az S halmaz korlátos.

Bizonyítás. (3.2) értelmében elegendő belátnunk, hogy a

$$T = \{F_{i_n} \ldots F_{i_1}(\mathbf{0}) \colon\ n = 1, 2, \ldots \quad \text{és} \quad \{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, m\}\}$$

halmaz korlátos. Tudjuk, hogy $\mathbf{R}^N$-ben egy affin altér mindig előáll véges sok hipersík metszeteként, amelyek normálisai páronként merőlegesek egymásra. Ezért T korlátossága következik, ha megmutatjuk, hogy a

$$T' = \{G_{i_n} \ldots G_{i_1}(\mathbf{0}) \colon\ n = 1, 2, \ldots \quad \text{és} \quad \{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, \mu\}\}$$

halmaz korlátos, ha $G_1, \ldots, G_\mu$ adott hipersíkokra való merőleges vetítések $\mathbf{R}^N$-ben. E tény bizonyításának a kulcslépése a következő önmagában is érdekes konstrukció:

3.7. LEMMA. Legyenek $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\mu$ páronként különböző egységvektorok $\mathbf{R}^N$-ben, és jelölje Q_i az $\mathbf{u}_i$-ra merőleges altérre való ortogonális projekciót (azaz $Q_i\mathbf{x} = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$ $i = 1, \ldots, \mu$). Ekkor létezik olyan nem-üres A részhalmaza az $\mathbf{R}^N$ tér B nyitott egységgömbjének és létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$(3.12) \qquad (Q_i A) + (-\varepsilon, \varepsilon) \cdot \mathbf{u}_i (= \{Q_i \mathbf{x} + \xi_i \colon |\xi| < \varepsilon, \mathbf{x} \in A\}) \subset A \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\mu$ vektorok által kifeszített tér maga $\mathbf{R}^N$ (egyébként ugyanis kiegészítjük az $\{\mathbf{u}_i\}_1^\mu$ rendszert további vektorokkal). Legyen ekkor $k = 0, \ldots, N-1$ mellett $\mathcal{U}_k$ az

$$\mathcal{U}_k = \{\{\lambda_1 \mathbf{u}_{j_1} + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_{j_k} \colon \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}\} \colon \mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_k} \ \text{lineárisan függetlenek}\}$$

altércsalád. (Tehát minden $U \in \mathcal{U}_k$ altér k dimenziós.)

Rekurzióval megkonstruálunk egy olyan csökkenő δ_k, ε_k $k = 1, \ldots, N-1$ számpár sorozatot, amelyre az

$$(3.13) \qquad A = \bigcap_{k=1}^{N-1} \bigcap_{U = \mathcal{U}_{N-k}} \{\mathbf{x} \in B \colon \operatorname{dist}(\mathbf{x}, U) < 1 - \delta_k\}$$

választás $\varepsilon = \varepsilon_{N-1}$ mellett megfelel, mint látni fogjuk. (Itt $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, U) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \colon \mathbf{y} \in U\}$ az $\mathbf{x}$ pont távolsága az U altértől.)

Legyen $\delta_1, \varepsilon_1 > 0$ olyan kicsiny, hogy az

$$C(U) = \{\mathbf{x} \in \bar{B} \colon \operatorname{dist}(\mathbf{x}, U) \geqq 1 - \delta_1\}$$

gömbsüvegpárok $U \in \mathcal{U}_{N-1}$ mellett páronként diszjunktak legyenek és teljesüljön

$$\{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_i \rangle \colon \mathbf{y} \in C(U)\} \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \emptyset \quad \text{valahányszor} \quad \mathbf{u}_i \notin U \quad (U \in \mathcal{U}_{N-1}).$$

Miután $\delta_{k-1}, \varepsilon_{k-1}$-et megkonstruáltuk $(k \geqq 2)$, úgy választjuk meg δ_k, ε_k-t, hogy $0 < \delta_k \leqq \delta_{k-1}$, $0 < \varepsilon_k \leqq \varepsilon_{k-1}$ és

$$(3.14) \qquad d(U, \mathbf{u}, \varepsilon_k, \delta_k) \leqq \delta_{k-1}$$

legyen minden $U \in \mathcal{U}_{N-(k-1)}$, $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\mu\}$ és $\mathbf{u} \notin U$ mellett, ahol

$$d(U, \mathbf{u}, \varepsilon, \delta) = 1 - \operatorname{dist}(U + \mathbf{R}\mathbf{u}, \{\mathbf{x} \colon |\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle| \leqq \varepsilon, \operatorname{dist}(\mathbf{x}, U) \leqq 1 - \delta, \|\mathbf{x}\| \leqq 1\}).$$

Igazoljuk, hogy (3.14) teljesíthető. Elegendő belátni, hogy

$$\lim_{\varepsilon, \delta \to 0+} d(U, \mathbf{u}, \varepsilon, \delta) = 0, \tag{3.15}$$

ha U egy tetszőlegesen rögzített $k(2 \leqq k \leqq N-2)$ dimenziós altér és $\mathbf{u}$ egy nem benne fekvő egységvektor.

Legyen U, $\mathbf{u}$ adottak. Jelölje $\mathbf{u}_1$ az $\mathbf{u}$-projekció$_U\mathbf{u}$ vektor irányába mutató egységvektort, és legyen $\mathbf{u}_2$ a projekció$_U\mathbf{u}$ vektor irány egységvektora ha $\mathbf{u} \not\perp U$ (egyébként $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ legyen). Most $\vartheta = \arccos \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 \rangle$ mellett $\mathbf{u} = \cos\vartheta \cdot \mathbf{u}_1 + \sin\vartheta \cdot \mathbf{u}_2$, $\vartheta \in [0, \pi/2)$. Vezessük be továbbá az $U' = \{\mathbf{u}' \in U \colon \|\mathbf{u}'\| = 1,\ \mathbf{u}' \perp \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, ill. $V = \{\mathbf{v} \colon \mathbf{v} \perp \mathbf{u},\ \mathbf{v} \perp U,\ \|\mathbf{v}\| = 1\}$ irányvektor családokat. Vegyük észre, hogy $V \neq \emptyset$ mivel $\dim \{\mathbf{v} \colon \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, U\} = N - (1 + \dim U) = N - (1+k) \geqq 1$.

Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$-re, véve az

$$\mathbf{x} = \eta\mathbf{v} + \xi_1\mathbf{u}_1 + \xi_2\mathbf{u}_2 + \xi'\mathbf{u}, \quad \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{u}' \in U' \quad \xi_2 = 0, \quad \text{ha} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, \quad \eta \geqq 0$$

ortogonális felbontást, kapjuk, hogy

$$\|\mathbf{x}\| = (\eta^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi'^2)^{1/2},$$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}, U) = \|\eta\mathbf{v} + \xi_1\mathbf{u}_1\| = (\eta^2 + \xi_1^2)^{1/2},$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \xi_1 \cos\vartheta + \xi_2 \sin\vartheta.$$

Tehát

$$d(U, \mathbf{u}, \varepsilon, \delta) = 1 - \inf \{\eta \geqq 0 \colon \exists \xi_1, \xi_2, \xi' \quad \eta^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi'^2 \leqq 1,$$
$$\eta^2 + \xi_1^2 \geqq (1-\delta)^2, \ |\xi_1 \cos\vartheta + \xi_2 \sin| \leqq \varepsilon\} =$$
$$= 1 - \inf \{\eta \colon \exists \xi_1, \xi_2 (\eta, \xi_1, \xi_2) \in E(\varepsilon, \delta)\},$$

ahol

$$E(\varepsilon, \delta) = \{(\eta, \xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^3 \colon \eta \geqq 0,\ \eta^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1,\ \eta^2 + \xi_1^2 \geqq (1-\delta)^2,$$
$$|\xi_1 \cos\vartheta + \xi_2 \sin\vartheta| \leqq \varepsilon\}.$$

Nyilván, $1 > \varepsilon, \delta > 0$ esetén $E(\varepsilon, \delta) \neq \emptyset$ és tetszőleges $(\eta, \xi_1, \xi_2) \in E(\varepsilon, \delta)$-ra $1 \geqq (\eta^2 + \xi_1^2) + \xi_2^2 \geqq (1-\delta)^2 + \xi_2^2$, ahonnan

$$\xi_2^2 \leqq 1 - (1-\delta)^2 = \delta^2 + 2\delta,$$

$$|\xi_1| \leqq \frac{\varepsilon + |\xi_2| \sin\vartheta}{\cos\vartheta} \leqq \frac{\varepsilon + (\delta^2 + 2\delta)^{1/2} \sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$

$$\eta^2 \geqq (1-\delta)^2 - \xi_1^2 \geqq (1-\delta)^2 - \left[\frac{\varepsilon + (\delta^2 + 2\delta)^{1/2} \sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right]^2.$$

Így $d(U, \mathbf{u}, \varepsilon, \delta) \leqq 1 - \left[(1-\delta)^2 + \left[\frac{\varepsilon + (\delta^2 + 2\delta)^{1/2} \cdot \sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right]^2\right]^{1/2}$, ami bizonyítja (3.15)-öt.

Verifikáljuk, hogy a (3.13)-ban definiált A halmaz rendelkezik a (3.12) tulajdonsággal:

Tegyük fel (3.12)-vel ellentétben, hogy valamelyik i index mellett volna olyan $\mathbf{a} \in A$ pont és $\varepsilon' \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ szám, hogy $Q_i\mathbf{a} + \varepsilon'\mathbf{u}_i \notin A$. Mivel az A halmaz nyitott, most úgy is választható ε', hogy az

$$\mathbf{x} = Q_i\mathbf{a}+\varepsilon'\mathbf{u}_i$$

pont határpontja legyen A-nak. Most $\|\mathbf{x}\|\leqq 1$ (hiszen $A\subset B$), és $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i\rangle|=|\varepsilon'|\leqq\varepsilon$. Mivel pedig $\mathbf{x}\notin A$, létezik olyan minimális k index és $U\in\mathcal{U}_{N-k}$, hogy $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, U)\geqq 1-\delta_k$.

Vegyük észre, hogy $\mathbf{u}_i\in U$ nem lehet. Ugyanis $\mathbf{u}_i\in U$-ból következne a $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, U)=\operatorname{dist}(Q_i\mathbf{a}+\varepsilon'\mathbf{u}_i, U)=\operatorname{dist}(\mathbf{a}, U)<1-\delta_k$ ellentmondás.

$k=1$ nem lehet, mert $k=1$ esetén $U\in\mathcal{U}_{N-1}$ volna és $\mathbf{x}$ benne feküdne a $C(U)$ gömbsüvegpárban. De ekkor ε_1 definíciója szerint $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i\rangle|>\varepsilon_1\geqq\varepsilon_{N-1}=\varepsilon$ volna, mivel $\mathbf{u}_i\notin U$.

Tehát $\mathbf{u}_i\notin U$ és $k>1$.

Mivel $\mathbf{u}_i\notin U$ és $U\in\mathcal{U}_{N-k}$, az $U^*=\{\mathbf{y}+\lambda\mathbf{u}_i\colon \mathbf{y}\in U, \lambda\in\mathbf{R}\}$ altér $\mathcal{U}_{N-(k-1)}$-be tartozik. Így a k index minimalitása miatt $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, U^*)<1-\delta_{k-1}$. Csakhogy ekkor $d(U, \mathbf{u}_i, \varepsilon_k, \delta_k)\leqq\delta_{k-1}$ is áll az ε_k, δ_k pár definíciója szerint. Innen pedig a $\operatorname{dist}(U^*, \mathbf{x})\geqq\operatorname{dist}(U^*, \{\mathbf{x}'\colon |\langle \mathbf{x}', \mathbf{u}_i\rangle|\leqq\varepsilon_k, \operatorname{dist}(\mathbf{x}', U)\geqq 1-\delta_k, \|\mathbf{x}'\|\leqq 1\})\geqq 1-\delta_{k-1}$ ellentmondásra jutunk.

Ezzel a 3.7 bizonyítása teljes.

3.7-ből a T' halmaz korlátossága azonnal következik: Jelölje $\mathbf{u}_i$ a $H_i=\{G_i(\mathbf{x})\colon \mathbf{x}\in\mathbf{R}^N\}$ hipersík egy normálvektorát ($i=1, \dots, \mu$) és legyen $d=\max_{i=1,\dots,\mu}\operatorname{dist}(\mathbf{0}, H_i)$. Konstruáljuk meg a lemma szerint az A alakzatot és ε-t az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\mu$ egységvektorokhoz, és legyen $A'=\frac{d}{\varepsilon}A\left(=\left\{\frac{d}{\varepsilon}\mathbf{x}\colon \mathbf{x}\in A\right\}\right)$. Ekkor $G_iA'\subset A'$, $i=1, \dots, \mu$. Mivel $\mathbf{0}\in A'\subset\frac{d}{\varepsilon}B$, a T' halmaz része a $\frac{d}{\varepsilon}B$ gömbnek.

A 3.6 tételből már könnyen következik, hogy az $F_1, \dots, F_m$ affin projekciók konvex kombinációiból alkotott random iteráltak torlódási pontjai mind beleesnek az S halmaz konvex burkának a lezártjába.

Legyenek $\tilde F_1, \dots, \tilde F_r$ konvex kombinációi $F_1, \dots, F_m$-nek, nevezetesen

$$\tilde F_i = \sum_{j=1}^{v_i}\lambda_{ij}F_{t_{ij}(k_{ij})}\dots F_{t_{ij}(1)}, \quad (i = 1, \dots, r),$$

ahol $\sum_{j=1}^{v_i}\lambda_{ij} = 1;\ \lambda_{i1}, \dots, \lambda_{iv_i} > 0$ és

$$\bigcup_{i=1}^{r}\bigcup_{j=1}^{v_i}\bigcup_{s=1}^{k_{ij}}\{t_{ij}(s)\} = \{1, \dots, m\}.$$

Legyen ekkor

$$S^* = \bigcup_{\substack{(i_1, i_2, \dots)\in\tilde I\\ \bar{x}\in\mathbf{R}^N}}\{[\tilde F_{i_n}\dots\tilde F_{i_1}(\mathbf{x})]_{n=1}^{\infty} \text{ torlódási pontjai}\}$$

ahol $\tilde I$ azon indexsorozatok családja, amelyek az $1, \dots, r$ számokból állnak és ezért mindegyikét végtelen sokszor felveszik.

3.9. KÖVETKEZMÉNY. $S^*\subset\overline{\operatorname{co}}\,S$.

Bizonyítás. (3.1)-ből azonnal adódik, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $L_1\cap\dots\cap L_m=\{\mathbf{0}\}$. Ezután azt kell megmutatnunk, hogy ha Φ egy tetszőleges valós lineáris funkcionál $\mathbf{R}^N$-en és

$$\gamma = \Big\{\Phi(\mathbf{Z})\colon \mathbf{Z} \in \bigcup_{(i_1,\ldots)\in I} \{[F_{i_n}\ldots F_{i_1}(\mathbf{0})]_{n=1}^{\infty} \text{ torlódási pontjai}\}\Big\}$$

(vö. a 3.2 következménnyel), akkor minden $(i_1, i_2, \ldots)\in \tilde{I}$ sorozatra és $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^N$ pontra fennáll

$$\varlimsup_{n\to\infty} \Phi(\tilde{F}_{i_n}\ldots \tilde{F}_{i_1}(\mathbf{x})) \leqq \gamma. \tag{3.15}$$

Ehhez legyen $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^N$ és $(i_1, \ldots)\in\tilde{I}$ tetszőlegesen rögzítve. Jelöljük μ_n-nel azt a valószínűségi mértéket, amely az $\{1, \ldots, v_{i_n}\}$ halmazon van értelmezve úgy, hogy $\mu_n(\{j\})=\lambda_{i_n j}$ $(j=1, \ldots, v_{i_n})$. Legyen μ a $\mu=\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n$ szorzatmérték. Definíció szerint (l. [7]), a μ mérték tartóhalmaza a $\Pi=\prod_{n=1}^{\infty}\{1, \ldots, v_{i_n}\}$ szorzathalmaz, vagyis az összes olyan $(j_1, j_2, \ldots)$ indexsorozatok halmaza, amelyekre $1\leqq j_n\leqq v_{i_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Ekkor

(3.16)

$$\Phi(\tilde{F}_{i_n}\ldots\tilde{F}_i(\mathbf{x})) = \sum_{j_n=1}^{v_{i_n}}\cdots\sum_{j_1=1}^{v_{i_1}} \lambda_{i_n j_n}\ldots\lambda_{i_1 j_1}\Phi[F_{t_{i_n j_n}(k_{i_n j_n})}\ldots F_{t_{i_1 j_1}(1)}(\mathbf{x})] = \int_{\Pi}\varphi_n d\mu,$$

ahol

$$\varphi(j_1, j_2, \ldots) = \Phi[(F_{t_{i_n j_n}(k_{i_n j_n})}\ldots F_{t_{i_n j_n}(1)})\ldots F_{t_{i_1 j_1}(k_{i_1 j_1})}\ldots F_{t_{i_1 j_1}(1)})(\mathbf{x})].$$

Legyen $J = \{(j_1, j_2, \ldots)\in\Pi\colon t_{i_1 j_1}(1), \ldots, t_{i_1 j_1}(k_{i_1 j_1}),\ t_{i_2 j_2}(1), \ldots, t_{i_2 j_2}(k_{i_2 j_2}), \ldots$-ben az $1, \ldots, m$ számok valamelyike véges sokszor fordul elő$\}$. Vegyük észre, hogy $\mu(J)=0$. A 3.6 tétel szerint így

$$\varlimsup_{n\to\infty}\varphi_n \leqq \gamma \quad \mu\text{-majdnem mindenütt } (\Pi\setminus J \text{ fölött}). \tag{3.17}$$

Másrészt a 3.7 lemma következtében az $\{F_{t_r}\ldots F_{t_1}(\mathbf{x})\colon r=1, 2, \ldots;\ 1\leqq t_1, \ldots, t_r\leqq m\}$ halmaz belefoglalható egy, az F_k leképezések mindegyikére invariáns és $\mathbf{x}$-et is tartalmazó, konvex korlátos halmazba, így korlátos. Vagyis

$$\sup\big\{|\Phi(F_{t_r}, \ldots, F_{t_1}(\mathbf{x}))|\colon r=1, 2, \ldots;\ 1\leqq t_1, \ldots, t_r\leqq m\big\} < \infty.$$

Innen $\sup\limits_{n,(n_1,\ldots)} |\varphi_n(j_1, \ldots,)|<\infty$. Így (3.17) és a jól ismert *Fatou-lemma* (l. [17]) alapján $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_{\Pi}\varphi_n\,d\mu\leqq\int_{\Pi}\gamma\,d\mu=\gamma$, ami (3.15) és (3.16) szerint ekvivalens a bizonyítandóval.

4. Affin kontrakciók stacionárius iterációja Hilbert térben

Az (1.4) probléma megoldására kidolgozott numerikus eljárások [3], [10], [14]-ben a megoldást mindig az $F_1, \ldots, F_m$ affin operátorok segítségével megalkotott újabb $F_1', \ldots, F_{m'}'$ affin kifejezések végtelen szorzataként adják, azaz

$$\lim_{n\to\infty} F'_{1+\mathrm{mod}_{m'}(n)}F'_{1+\mathrm{mod}_{m'}(n-1)}, \ldots, F'_{1+\mathrm{mod}_{m'}(0)}(\mathbf{x})$$

alakban, amennyiben $M_1 \cap \ldots \cap M_m \neq \emptyset$. Bevezetve az $F = F'_{m'} \ldots F'_1$ és $\mathbf{x}_k = F'_k \ldots F'_1(\mathbf{x})$ $(k=1, \ldots, m')$ jelöléseket, az $[F'_{1+\mathrm{mod}_{m'}(n)} \ldots F'_{1+\mathrm{mod}_{m'}(0)}(\mathbf{x})]_{n=1}^{\infty}$ pontsorozat felbontható az $[F^n(\mathbf{x}'_k)]_{n=1}^{\infty}$ $(k=1, \ldots, m')$ sorozatok egyesítésére. Vagyis az említett típusú módszerek általános vizsgálatakor szorítkozhatunk egyetlen affin operátor hatványainak az elemzésére. Könnyen látható, hogy a [3], [10], [14], [15]-beli eljárásokban fellépő F'_k affin operátorok mind kontrakciók.

Ebben a részben H végig egy tetszőlegesen rögzített *Hilbert teret* fog jelölni, F pedig egy $H \to H$ affin operátort; $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, ahol A az F lineáris része $(\mathbf{b} = F(\mathbf{0}))$. Érdeklődésünk az $[F^n(\mathbf{x})]_{n=1}^{\infty}$ alakú pontsorozatok viselkedésére irányul, elsősorban is arra az esetre, amelyben az F operátor affin merőleges vetítések véges konvex kombinációja.

4.1. LEMMA. Ha az F leképezés lineáris része hatvány-korlátos, azaz a $\mu = \sup_n \|A^n\|$ mennyiség véges, akkor az $M = \{\mathbf{x}: [F^n(\mathbf{x})]_{n=1}^{\infty}$ konvergens$\}$ ponthalmaz a H tér egy affin altere; $\mathbf{x} \in M$-re $\lim_{n\to\infty} F^n(\mathbf{x})$ az F fixpontja.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{x} \in M$, akkor $F(\lim_{n\to\infty} F^n(\mathbf{x})) = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} F^n(\mathbf{x})$ az F operátor folytonossága miatt.

Ha tehát $M \neq \emptyset$, akkor F-nek van legalább egy $\mathbf{x}_0 (\in M)$ fixpontja. Elég tehát belátnunk, hogy az $\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0: \mathbf{x} \in M\}$ halmaz H egy (lineáris) altere. Vegyük észre, hogy $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + A\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0$ ahonnan

$$F^n(\mathbf{x}) = A^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.1}$$

Így $M = \mathbf{x}_0 + H_0$, ahol $H_0 = \{\mathbf{z}: [A^n\mathbf{z}]_{n=0}^{\infty}$ konvergens$\}$. Nyilván $\alpha_1\mathbf{z}_1 + \alpha_2\mathbf{z}_2 \in H_0$ valahányszor $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in H_0$ és $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Vagyis csak H_0 zártságát kell megmutatnunk. Tegyük fel, hogy $H_0 \ni \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots \to \mathbf{z}$. Egy alkalmas részsorozatra áttérve vehető, hogy a $\mathbf{h}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{k-1}$ $(\mathbf{z}_0 = \mathbf{0})$ különbségvektorok normájára már $\|\mathbf{h}_k\| \leqq 2^{-k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Tekintsük az $[A^n\mathbf{z}]_{n=0}^{\infty}$ sorozatot. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Rögzítsünk egy olyan N számot, melyre $\sum_{k \geqq N} \mu \cdot 2^{-k} < \varepsilon/2$. Mivel $m, n \to \infty$ mellett $A^n\mathbf{h}_k - A^m\mathbf{h}_k \to \mathbf{0}$, a $k = 1, 2, \ldots, N$ indexek mindegyikéhez létezik ν_k úgy, hogy $\|A^n\mathbf{h}_k - A^m\mathbf{h}_k\| < \varepsilon/(2N)$ valahányszor $n, m > \nu_k$. Ezért

$$\|A^n\mathbf{z} - A^m\mathbf{z}\| \leqq \sum_{k=1}^{N} \|A^n\mathbf{h}_k - A^m\mathbf{h}_k\| + \sum_{k>N} \|A^n - A^m\| \cdot \|\mathbf{h}_k\| \leqq N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \sum_{k>N} 2\mu \cdot 2^{-k} < \varepsilon.$$

Tehát az $[A^n\mathbf{z}]_{n=0}^{\infty}$ sorozat *Cauchy tulajdonságú*, ahonnan $\mathbf{z} \in H_0$.

4.2. KÖVETKEZMÉNY. Létezik (egy és csak) olyan Q lineáris projekció operátor a H_0 altéren, hogy minden $\mathbf{x} \in M$-re $\lim_{n\to\infty} F^n(\mathbf{x}) = (1-Q)\mathbf{x}_0 + Q\mathbf{x}$. Fennáll $QH_0 = \{F$ fixpontjai$\} - \mathbf{x}_0$ és $\|Q\| \leqq \mu$. Speciálisan, ha F kontrakció, akkor a Q operátor ortogonális projekció, azaz $\lim_{n\to\infty} F^n(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}$-nek $\{F$ fixpontjai$\}$-ra való merőleges vetülete$]$ $(\mathbf{x} \in M)$.

Bizonyítás. A $Q: H_0 \ni \mathbf{z} \mapsto \lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{z}$ leképezés linearitása és a $\|Q\| \leqq \mu$, $Q^2 = Q$ relációk nyilvánvalók. Ha speciálisan $\|A\| \leqq 1$, akkor $\|Q\| \leqq 1$. De a *Hilbert térbeli* kontrakciók elméletéből (vö. [18]) jól ismert, hogy egy kontraktív lineáris projekció szükségképpen ortogonális. Végül (4.1) szerint $F^n(\mathbf{x})=A^n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\mathbf{x}_0\to Q(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+$ $+\mathbf{x}_0=(1-Q)\mathbf{x}_0+Q\mathbf{x}$ $(\mathbf{x}\in H)$.

4.3. LEMMA. Ha az F affin operátor kontraktív (azaz $\|A\|\leqq 1$), akkor minden $\mathbf{x}\in H$ mellett

$$\frac{1}{n}F^n(\mathbf{x})\to P^{(1)}\mathbf{b} \quad \text{és} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F^k(\mathbf{x})-F^k(\mathbf{0}))\to P^{(1)}\mathbf{x} \quad (n\to\infty),$$

ahol $P^{(1)}$ jelöli a $\{\mathbf{z}\in H\colon A\mathbf{z}=\mathbf{z}\}$ sajátaltérre való ortogonális projekciót.

Bizonyítás. Az állítás azonnali következménye az ergodikus tételnek (l. [17]) és az $F^n(\mathbf{x})=A^n\mathbf{x}+A^{n-1}\mathbf{b}+A^{n-2}\mathbf{b}+\ldots+A\mathbf{b}+\mathbf{b}$ összefüggésnek.

4.4. PROPOZÍCIÓ. Ha F kontraktív és az $F(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ fixpont-egyenletnek van megoldása, akkor $P^{(1)}\mathbf{b}=\mathbf{0}$ (4.3 jelöléseivel) és bármely $\mathbf{x}\in H$-ra az $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F^k(\mathbf{x})$ $(n=1, 2, \ldots)$ sorozat konvergens és a limesze F-nek egy fixpontja.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\|A\|\leqq 1$ esetén az A operátor önmagába képezi a $H^{(1)}=\{\mathbf{z}\colon A\mathbf{z}=\mathbf{z}\}$ sajátalteret és annak $H^{(0)}$ ortokomplementerét. Így $F(\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0$-ból most $P^{(1)}\mathbf{x}_0=P^{(1)}F(\mathbf{x}_0)=P^{(1)}A\mathbf{x}_0+P^{(1)}\mathbf{b}=P^{(1)}\mathbf{x}_0+P^{(1)}\mathbf{b}$, azaz $P^{(1)}\mathbf{b}=\mathbf{0}$ adódik. (4.1)-et alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A^k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\mathbf{x}_0.$$

Az ergodikus tétel szerint $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A^k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\to P^{(1)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, azaz $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F^k(\mathbf{x})\to$ $\to P^{(1)}\mathbf{x}+P^{(0)}\mathbf{x}_0(n\to\infty)$, ahol $P^{(0)}$ a $H^{(0)}$-ra való merőleges vetítés. Azonban

$$F(P^{(1)}\mathbf{x}+P^{(0)}\mathbf{x}_0) = AP^{(1)}\mathbf{x}+AP^{(0)}\mathbf{x}_0+\mathbf{b} = P^{(1)}\mathbf{x}+A(\mathbf{x}_0-P^{(1)}\mathbf{x}_0)+\mathbf{b} =$$
$$= P^{(1)}\mathbf{x}+F(\mathbf{x}_0)-P^{(1)}\mathbf{x}_0 = P^{(1)}\mathbf{x}+\mathbf{x}_0-P^{(1)}\mathbf{x}_0 = P^{(1)}\mathbf{x}+P^{(0)}\mathbf{x}_0.$$

4.5. Megjegyzés. Ha a H tér véges dimenziós és $P^{(1)}\mathbf{b}=\mathbf{0}$, akkor a *Cramer szabályból* azonnal adódik, hogy az $F(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ fixpont-egyenlet $H^{(0)}$-ban megoldható. Így a 4.4 propozíció sugall egy numerikus eljárást a fixpont megkeresésére. Az ergodikus közepek konvergencia-sebessége azonban csak logaritmikus rendű.

Az előbbiekben kifejtett egyszerű általános meggondolások után most annak a számunkra fontos speciális esetnek a vizsgálatára térünk, amelynél az F operátor véges sok $F_1, \ldots, F_m$ affin merőleges vetítés adott kompozícióinak konvex kombinációja. Ekkor, P_k-val jelölve a továbbiakban az F_k leképezés lineáris részét, az A operátor (F lineáris része) a $P_1, \ldots, P_m$ ortogonális projekciókból alkotott véges szorzatok valamely véges konvex kombinációja. Azaz S-sel jelölve az $F_1, \ldots, F_m$, ill. S'-vel a $P_1, \ldots, P_m$ leképezések által generált kontrakció-félcsoportot, $F\in\operatorname{co} S$ és $A\in\operatorname{co} S'$.

I. HALPERIN [8] és C. APOSTOL [1] munkáira megy vissza a lineáris operátorok következő strukturális tulajdonsága alapvető voltának a felismerése a stacionárius iterációk szempontjából:

4.6. DEFINÍCIÓ. Mondjuk azt, hogy egy H-beli B lineáris kontrakció operátor kvázi-projekció, ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup\{\|\mathbf{x}-B\mathbf{x}\| : \|\mathbf{x}\| \leqq 1, \quad \|\mathbf{x}\|-\|B\mathbf{x}\| \leqq \varepsilon\} = 0. \tag{4.2}$$

4.7. TÉTEL. A co S'-beli operátorok mind kvázi-projekciók.

Bizonyítás. Legyen $\bar{H}$ a H-tér komplexifikációja (azaz $\bar{H}=\{\mathbf{f}+i\mathbf{g}: \mathbf{f}, \mathbf{g}\in H\}$ az $\langle \mathbf{f}+i\mathbf{g}, \mathbf{f}'+i\mathbf{g}'\rangle=\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}'\rangle+i\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}'\rangle-i\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}'\rangle+\langle \mathbf{g}, \mathbf{g}'\rangle$ skalárszorzattal ellátva) és legyen Q a H tér kvázi-projekcióinak a családja. Tetszőleges $\bar{H}$ fölötti lineáris T operátornál jelölje φ_T a

$$\varphi_T(\varepsilon) = \sup\{\|\mathbf{x}-T\mathbf{x}\| : \mathbf{x}\in\bar{H}, \|\mathbf{x}\| \leqq 1, \|\mathbf{x}\|-\|T\mathbf{x}\| \leqq \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

modulus-függvényt. $T\in Q$ pontosan ha $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varphi_T(\varepsilon)=0$.

A tétel azonnal következik az alábbi három lemmából:

4.8. LEMMA. Ha T egy $\bar{H}$-beli pozitív kontrakció, akkor $T\in Q$. Mindig áll ilyenkor $\varphi_T(\varepsilon)\leqq\sqrt{2\varepsilon}$.

4.9. LEMMA. (C. APOSTOL). Ha $T_1, T_2\in Q$, akkor $T_1T_2\in Q$.

4.10. LEMMA. Ha $\lambda_1, \lambda_2\geqq 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ és $T_1, T_2\in Q$, akkor $\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2\in Q$.

A lemmák bizonyításai.

4.8. LEMMA. A spektrál-előállítási tétel (l. [17]) szerint most

$$T = \int_0^1 \lambda dP_\lambda$$

írható valamely $[P_\lambda]_{\lambda\in[0,1]}$ projekció-sereggel. Tegyük fel, hogy $0<\varepsilon<1$, $\|\mathbf{x}\|\leqq 1$ és $\|\mathbf{x}\|-\|T\mathbf{x}\|\leqq\varepsilon$. Ekkor

$$\|\mathbf{x}\|-\|T\mathbf{x}\| = \frac{\|\mathbf{x}\|^2-\|T\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|+\|T\mathbf{x}\|},$$

ahonnan

$$\frac{\|\mathbf{x}\|^2-\|T\mathbf{x}\|^2}{2\|\mathbf{x}\|} \leqq \|\mathbf{x}\|-\|T\mathbf{x}\| \leqq \varepsilon.$$

Jól ismert, hogy

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \int_0^1 d\|P_\lambda\mathbf{x}\|^2, \quad \|T\mathbf{x}\|^2 = \int_0^1 \lambda^2 d\|P_\lambda\mathbf{x}\|^2, \quad \|\mathbf{x}-T\mathbf{x}\|^2 = \int_0^1 (1-\lambda)^2 d\|P_\lambda\mathbf{x}\|^2.$$

Mivel $(1-\lambda)^2\leqq 1-\lambda^2$ minden $\lambda\in[0, 1]$ -re, így

$$\|\mathbf{x}-T\mathbf{x}\|^2 = \int_0^1 (1-\lambda)^2 d\|P_\lambda\mathbf{x}\|^2 \leqq \int_0^1 (1-\lambda^2) d\|P_\lambda\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2-\|T\mathbf{x}\|^2.$$

Vagyis most $\|\mathbf{x}-T\mathbf{x}\|^2\leqq\|\mathbf{x}\|^2-\|T\mathbf{x}\|^2\leqq 2\varepsilon\|\mathbf{x}\|$, azaz $\varphi_T(\varepsilon)\leqq\sqrt{2\varepsilon}$.

4.9. LEMMA. Legyen $\varepsilon \geqq \|\mathbf{x}\| - \|T_1 T_2 \mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{x}\| \leqq 1$. Ekkor $\varepsilon \geqq \|T_2\mathbf{x}\| - \|T_1 T_2 \mathbf{x}\|$ és $\|T_2\mathbf{x}\| \leqq 1$, ill. $\varepsilon \geqq \|\mathbf{x}\| - \|T_2\mathbf{x}\|$.

Innen φ_{T_1} és φ_{T_2} definíciója szerint

$$\|\mathbf{x} - T_1 T_2 \mathbf{x}\| \leqq \|\mathbf{x} - T_2\mathbf{x}\| + \|T_2\mathbf{x} - T_1 T_2 \mathbf{x}\| \leqq \varphi_{T_2}(\varepsilon) + \varphi_{T_1}(\varepsilon),$$

azaz $\varphi_{T_1 T_2} \leqq \varphi_{T_1} + \varphi_{T_2}$.

4.10. LEMMA. Legyen $\|\mathbf{x}\| - \|(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)\mathbf{x}\| \leqq \varepsilon$, $\|\mathbf{x}\| \leqq 1$. Bevezetve az $\varepsilon_k = \|\mathbf{x}\| - \|T_k \mathbf{x}\|$ $(k=1, 2)$ jelölést,

$$\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 = \|\mathbf{x}\| - (\lambda_1 \|T_1\mathbf{x}\| + \lambda_2 \|T_2 \mathbf{x}\|) \leqq \|\mathbf{x}\| - \|(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)\mathbf{x}\| \leqq \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geqq 0$, innen $\varepsilon_k \leqq \varepsilon/\lambda_k$ $(k=1, 2)$. Tehát

$$\|\mathbf{x} - (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)\mathbf{x}\| \leqq \lambda_1 \|\mathbf{x} - T_1 \mathbf{x}\| \leqq \lambda_1 \varphi_{T_1}(\varepsilon_1) + \lambda_2 \varphi_{T_2}(\varepsilon_2) \leqq$$
$$\leqq \lambda_1 \varphi_{T_1}(\varepsilon/\lambda_1) + \lambda_2 \varphi_{T_2}(\varepsilon/\lambda_2).$$

A kváziprojekciók iteráltjaira teljesül a

4.11. TÉTEL. (C. APOSTOL [1]). Ha T egy kvázi-projekciója $\bar{H}$-nak, akkor $P^{(1)}$-gyel jelölve az $\{\mathbf{x} \in \bar{H} : T\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ altérre való ortogonális projekciót,

$$T^n \mathbf{x} \to P^{(1)}\mathbf{x} \quad (n \to \infty) \quad \text{minden} \quad \mathbf{x} \in \bar{H}\text{-ra.}$$

Az F affin operátorra APOSTOL tételéből a következő a konklúziónk:

4.12. TÉTEL. Legyen $A \in \mathrm{co}\, S'$, és tegyük fel, hogy $A \notin \mathrm{co}\, S_1'$ valahányszor S_1 egy olyan leképezés félcsoportot jelöl, amit a $\{P_1, \ldots, P_m\}$ rendszer egy valódi részhalmaza generál. Ekkor létezik olyan M' sűrű lineáris alsokasága az $L^\perp$ altérnek (ahol $L = L_1 \cap \ldots \cap L_m$, $L_k = P_k H$ mint a 3. fejezetben), melynél minden $\mathbf{b} \in M'$-re az $F_\mathbf{b}$: $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ affin operátor iteráltjaival alkotott $[F_\mathbf{b}^n(\mathbf{x}_0)]_{n=1}^\infty$ sorozat konvergens tetszőleges $\mathbf{x}_0$ kezdőpont mellett és limesze az

$$F_\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}, \quad P\mathbf{z} = P\mathbf{x}_0$$

fixpont-egyenletrendszer egyetlen megoldása (itt P az L-re való ortogonális projekciót jelöli).

Bizonyítás. Tekintsük az $F(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ fixpont egyenletet. Ennek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\mathbf{b} \in (1-A)H$. Megmutatjuk, hogy az $(1-A)H$ alsokaság sűrű $L^\perp$-ben:

Tegyük fel, hogy $L \cap (1-A)H \subset \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \perp \mathbf{u}\}$ ahol $\mathbf{u}$ nem-zéró vektor $L^\perp$-ben. Mivel $PP_k = P_k P = P$ $(k=1, \ldots, m)$, fennáll $AP = PA = P$ és $(1-P)A = A(1-P) = A - P = (1-P)A(1-P)$. Így $AL^\perp \subset L^\perp$ és $AL = L$, ahonnan $L^\perp \cap (1-A)H = (1-A)L^\perp = (1-A)(1-P)H = (1-P)(1-A)H$. Tehát $0 = \langle (1-P)(1-A)\mathbf{h}, \mathbf{u} \rangle = \langle (1-A)\mathbf{h}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{h}, (1-A)^* \mathbf{u} \rangle$ minden $\mathbf{h} \in H$ mellett, azaz $A^*\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Csakhogy ekkor $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ is, hiszen $\|A\| \leqq 1$ (vö. [18]). Ez pedig azt jelenti, hogy $A = \sum_j \lambda_j R_j$-t írva, ahol $\lambda_j \geqq 0$, $\sum_j \lambda_j = 1$ és $R_j \in S'$, fennáll $\lambda_j \|R_j \mathbf{u}\| = \lambda_j \|\mathbf{u}\|$ mindegyik j indexre (hiszen $\|R_j \mathbf{u}\| \leqq \|u\|$ mindig). Tekintve, hogy alkalmas $i_{j1}, i_{j2}, \ldots, i_{jn_j}$ indexekkel $R_j =$

$=P_{i_{jn_j}}\dots P_{i_{j1}}$ írható, ez csak úgy lehet, ha $\mathbf{u}\in\bigcap\limits_{k=1} L_{i_{jk}}$ minden j-re. Tehát $\mathbf{u}\in\bigcap\limits_{j}\bigcap\limits_{k=1} L_{i_{jk}}$. Nyilván $A\in\mathrm{co}\,[\bigcap\limits_{j}\{P_{i_{jk}}:\ 1\leqq k\leqq n_j\}$ generátuma$]$. Így a tételbeli feltevés szerint $\bigcup\limits_{j}\{P_{i_{jk}}:\ 1\leqq k\leqq n_j\}=\{P_1,\dots,P_m\}$, azaz $\bigcap\limits_{j}\bigcap\limits_{k=1}^{n_j} L_{i_{jk}}=L$. Vagyis $\mathbf{u}\in L$, ellentmondásban azzal, hogy $\mathbf{u}\in L^\perp$ is.

Következésképpen $\mathbf{b}$ az $L^\perp$ altér egy sűrű lineáris alsokaságából $((1-A)H\cap L^\perp$-ból$)$ tetszőlegesen választható úgy, hogy az $A\mathbf{z}+\mathbf{b}=\mathbf{z}$ fixpont-egyenlet megoldható legyen. Egyben az is látszik, hogy az A leképezés $L^\perp$-en injektív. Így $A\mathbf{z}_1+\mathbf{b}=\mathbf{z}_1$ és $A\mathbf{z}_2+\mathbf{b}=\mathbf{z}_2$ esetén $\mathbf{z}_1=\mathbf{z}_2$ szükségképpen.

Ha $A\mathbf{z}+\mathbf{b}=\mathbf{z}$, akkor $F_b^n(\mathbf{x}_0)=A^n(\mathbf{x}_0-\mathbf{z})+\mathbf{z}$ $(n=1,2,\dots)$. Ekkor $PF_b^n(\mathbf{x}_0)=$ $=PA^n(\mathbf{x}_0-\mathbf{z})+P\mathbf{z}=P(\mathbf{x}_0-\mathbf{z})+P\mathbf{z}=P\mathbf{x}_0$ mindig. Végül a 4.7. és 4.11. tételek mutatják, hogy ilyenkor $F_b^n(\mathbf{x}_0)\to\mathbf{z}$ $(n\to\infty)$.

4.13. KÖVETKEZMÉNY. Ha $\dim H<\infty$, akkor $M'=H$.

4.14. Megjegyzés. Véges dimenzióban az $[F_b^n(\mathbf{x})]_{n=1}^\infty$ sorozatok konvergencia sebességére fennáll

$$\|F_b^n(\mathbf{x})-\lim_{\nu\to\infty}F_b^\nu(\mathbf{x})\| = \big\|A^n(\mathbf{x}-\lim_{\nu\to\infty}F_b^\nu(\mathbf{x}))\big\| = \big\|A^n(1-P)(\mathbf{x}-\lim_{\nu\to\infty}F_b^\nu(\mathbf{x}))\big\| =$$
$$= \big\|(A|L^\perp)^n(\mathbf{x}-\lim_{\nu\to\infty}F_b^\nu(\mathbf{x}))\big\| \leqq \|A|L^\perp\|^n\cdot\big\|\mathbf{x}-\lim_{\nu\to\infty}F_b^\nu(\mathbf{x})\big\| = \mathrm{const}\,(\mathbf{x})\cdot q(\mathbf{x})^n.$$

A 4.12. tétel bizonyításából kiderül, hogy $\mathbf{u}\in L^\perp$ mellett $1=\|\mathbf{u}\|=\|A\mathbf{u}\|$ nem állhat, ha $A\in\mathrm{co}\,S'$. Így az egységgömb kompaktsága miatt $\|A|L^\perp\|=$ $=\sup\{\|A\mathbf{u}\|:\ \mathbf{u}\in L^\perp,\ \|\mathbf{u}\|=1\}<1$ ilyenkor. A 3.4. következmény segítségével $\|A|L^\perp\|$ az alábbi módon becsülhető felülről.

Tekintsük az A operátort az $A=\sum\limits_j\lambda_jR_j$ (ahol $R_j=P_{i_{jn_j}}\dots P_{i_{j1}}$) alakban, és legyen Q_j az $\{z\in L^\perp:\ R_j\mathbf{z}=\mathbf{z}\}$ altérre való ortogonális projekció. A 3.4. következmény pontos becslést ad az $R_j'=(1-Q_j)R_k$ operátorok normájára (mindig $\|R_j'\|<1$). Tegyük fel, hogy innen kaptuk az $\|R_j'\|\leqq q_j(<1)$ egyenlőtlenségeket. Ekkor

(4.3)
$$\|A|L^\perp\| \leqq \max\Big\{\Big\|\sum_j\lambda_j(Q_j\mathbf{u}+\|(1-Q_j)\mathbf{u}\|\,\mathbf{v}_j)\Big\|:\|\mathbf{u}\|\leqq 1,\ \mathbf{u}\in L^\perp,\ Q_j\mathbf{v}_j=0,\ \|v_j\|\leqq q_j\Big\}.$$

Jól ismert (az ún. *beng-beng elv*), hogy itt a maximum $\|\mathbf{v}_j\|=q_j$ mellett vétetik fel. A háromszög-egyenlőtlenség segítségével (4.3) jobb oldala még elég finoman növelhető az egyszerűbb kezelésű

$$(4.4)\qquad \|A|L^\perp\| \leqq \max\Big\{\sum_j\lambda_j\sqrt{\|Q_j\mathbf{u}\|^2+q_j^2\cdot(1-\|Q_j\mathbf{u}\|^2)}:\|\mathbf{u}\|=1,\ \mathbf{u}\in L^\perp\Big\}$$

alakig. (A jobb oldal értéke mindig kisebb 1-nél, mivel $Q_jH\subset L^\perp$ minden j indexre és $\bigcap\limits_j Q_jH=\{\mathbf{0}\}$.

IRODALOM

[1] APOSTOL, C., "Products of contractions in Hilbert space", *Acta Sci. Math.* **33** (1972) 91—94.
[2] BROWDER, F., "On some approximation methods for solutions of Dirichlet problems," *J. Math. Mech.* **7** (1958) 69—70.
[3] CIMMINO, G., "Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari", *Ric. Sci. Progr. Tecn. Naz.* **1** (1938) 326—333.
[4] COURANT, R. und HILBERT, D., *Methoden der Mathematischen Physik* (Springer, Berlin, 1937).
[5] HALMOS, P., *Finite Dimensional Vector Spaces* (Van Nostrand, Princeton, 1958).
[6] HALMOS, P., *Introduction to Hilbert Space* (Chelsea, New York, 1951).
[7] HALMOS, P., *Measure Theory* (Van Nostrand, New York, 1950).
[8] HALPERIN, I., "The product of projection operators", *Acta Sci. Math.* **23** (1962) 96—99.
[9] HESTENS, M. and STIEFEL, E., "Methods of conjugate gradients for solving linear systems", *J. Res. Bur. Standards* **49** (1952) 409—436.
[10] KACZMARZ, S., „Angenäherte Auflösungen von Systemen linearer Gleichungen", *Bull. Intern. Acad. Sci. Polon.* A (1937) 355—357.
[11] BERGMANN, V. and von NEUMANN, J., *Solution of linear systems of high order* (Report for Bureau of Ordnance, Washington, 1946).
[12] von NEUMANN, J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin, 1932).
[13] von NEUMANN, J., "On rings of operators", *Annals of Math.* **50** (1949) 481—485.
[14] POGÁNY, Cs., „Lineáris egyenletrendszerek megoldása geometriai közelítő módszerekkel", *MTA III. Osztálya Közleményei* **17** (1967) 151—160.
[15] POGÁNY, Cs., „Ellentmondó feltételrendszerek kezeléséről II.", *MTA III. Osztálya Közleményei* **23** (1974), 197—202.
[16] RIESZ, F. und SZ.-NAGY, B., „Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes", *Acta Sci. Math.* **10** (1941—43) 202—205.
[17] RIESZ, F.—SZ.-NAGY, B., *Lecons d'analyse fontionnelle* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955).
[18] SZ.-NAGY, B.—FOIAS, C., *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Akadémia, Kiadó, Budapest, 1967).

(Beérkezett: 1983. február 26.)

STACHÓ LÁSZLÓ
JATE BOLYAI INTÉZET
6720 SZEGED, ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

INFINITE PRODUCTS OF AFFINE PROJECTIONS FROM THE NUMERICAL POINT OF VIEW

L. STACHÓ

The behaviour of *Kaczmarz type methods* for solving systems of linear functional equations in *Hilbert space* is investigated when the existence of solutions is not provided. In the classical finite dimensional case a sharp estimate of the convergence rate is given for *random Kaczmarz iterations.*

84-413 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató