4. **Gnedenko B. V.** Sur la distribution limite du terme maximum d'nne série aleatoire // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 423–453.
5. **Гнеденко Б. В., Гнеденко Д. Б.** О распределениях Лапласа и логическом как предельных в теории вероятностей // Сердика. 1982. Т. 8. С. 229–234.
6. **Золотарев В. М.** Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
7. **Панчева Е.** Характеризация класса ML-законов при нелинейной нормировке // Теория вероятн. и ее примен. 1985. Т. XXX, вып. 4. С. 601, 602. ISSN 0040–361X.
8. **Панчева Е.** Общие предельные теоремы для максимума независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1986. Т. XXXI, вып. 4. С. 730–744. ISSN 0040–361X.
9. **Шиганов И. С.** Об аналогиях при исследовании устойчивости в различных схемах преобразования случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. XXVIII, вып. 4. С. 818–819. ISSN 0040–361X.
10. **Cohen I. P.** Convergence rates for the ultimate and penultimate approximation in extreme-value theory // Adv. Appl. Probab. 1982. V. 14. P. 833–854.
11. **Falk M.** Rates of uniform convergence of extreme order statistics // Ann. Inst. Statist. Math. 1986. V. 38. Part. A. P. 245–262.
12. **Pancheva E.** Limit theorems for extreme order statistics under non-linear normalization // Lecture Notes Math. 1985. B. 1151. S. 284–309.
13. **Resnick S. I.** Uniform rates of convergence to extreme value distributions // Technical report. Colorado State Univ. 1985.
14. **Smith R. L.** Uniform rates of convergence in extreme value theory // Adv. Appl. Probab. 1982. V. 14. P. 600–622.
15. **Weinstein S. B.** Theory and application of some classical and generalized asymptotic distributions of extreme value // IEEE. Trans. Inf. Theor. 1973. V. 19. P. 148–154.
16. **Zolotarev V. M., Rachev S. T.** Rate of convergence in limit theorems for the max-scheme // Lecture Notes Math. 1985. B. 1155. S. 415–442.

Поступило в редакцию
15.02.1989

Каунасский политехнический
институт

EKSTREMALIŲJŲ NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SKIRSTINIŲ KONVERGAVIMAS

A. Aksomaitis

(*Reziumė*)

Sakykime, kad $\{X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}, n\geq 1\}$ – nepriklausomų atsitiktinių dydžių serijų seka. Pažymėkime

$$Z_n=\max(X_{nj},\ j=\overline{1,\ k_n}),\quad Z_{N_n}=\max(X_{nj},\ j=\overline{1,\ N_n}).$$

Čia $\{N_n, n\geq 1\}$ – sveikareikšmių teigiamų atsitiktinių dydžių, nepriklausančių nuo $\{X_{nj}, j\geq 1\}$, seka. Rastas netolygusis konvergavimo greičio įvertis $|P(Z_{N_n}<x)-\Psi(x)|$, kai dydžiai $\{X_{nj}, j\geq 1\}$ yra vienodai pasiskirstę, ir įvertis $|P(Z_n<x)-H(x)|$, kai dydžiai nevienodai pasiskirstę. Įrodyta maksimumo perkėlimo ribinė teorema nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių serijų sekų maksimumo schemai.

ON CONVERGENCE OF DISTRIBUTIONS OF THE EXTREMES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

A. Aksomaitis

(*Summary*)

Let $\{X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}, n\geq 1\}$ be an array of independent random variables. Denote

$$Z_n=\max(X_{nj},\ j=\overline{1,\ k_n}),\quad Z_{N_n}=\max(X_{nj},\ j=\overline{1,\ N_n}).$$

...f positive random integers independent of $\{X_{nj}, j\geq 1\}$...

УДК 519.21

О ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{FL}$-СТАТИСТИКИ. I

Р. Зитикис

Настоящая работа посвящена исследованию гладкости функции распределения $\mathcal{FL}$-статистики (линейной комбинации функций от порядковых статистик). Исследования проводятся при помощи изучения характеристической функции $\mathcal{FL}$-статистики вне окрестности нуля. Для этой цели развивается метод, предложенный В. Ю. Бенткусом в работе [1]. В качестве примеров рассматриваются $\mathcal{L}$-, ω- и некоторые другие статистики.

§ 1. Введение, результаты, обозначения

Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_n$ – независимые равномерно на интервале (0, 1) распределенные случайные величины, $h_{jn}(x)$, $j=1, 2, \ldots, n$, – определенные на интервале (0, 1) борелевские функции. Тогда $\mathcal{FL}$-статистикой будем называть случайную величину

$$L_n := \sum_{j=1}^{n} h_{jn}(U_{j:n}) + R_n, \tag{1.1}$$

где $U_{1:n}\leqq U_{2:n}\leqq \ldots \leqq U_{n:n}$ – упорядочение случайных величин $U_1, U_2, \ldots, U_n$, а R_n – некоторая неслучайная постоянная.

Пример 1.1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые копии случайной величины X с функцией распределения $F(x) := \mathbf{P}(X<x)$. Далее пусть $R_n:=0$ и для всех $j=1, 2, \ldots, n$ функции $h_{jn}(x):=F^{-1}(x)/\sqrt{n}$, где $F^{-1}(x):=\sup\{y: F(y)\leqq x\}$, $x\in(0, 1)$. Тогда функция распределения $\mathcal{FL}$-статистики L_n будет совпадать с функцией распределения случайной величины

$$S_n := (X_1+X_2+\ldots+X_n)/\sqrt{n}.$$

Отметим, что гладкость функции распределения $\mathbf{P}(S_n<x)$ рассматривалась (может быть в неявном виде) в работах по локальным предельным теоремам (см., например, [2], [3] и библиографию из этих работ).

Пример 1.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые копии случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, $X_{1:n}\leqq X_{2:n}\leqq \ldots \leqq X_{n:n}$ – упорядочение случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогда случайная величина

$$L_n := \sum_{j=1}^{n} c_{jn} X_{j:n},$$

ной величины l_n совпадает с распределением случайной величины L_n, где $h_{jn}(x):=c_{jn}F^{-1}(x)$ для всех $x\in(0,\ 1)$ и $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Приведем некоторые частные случаи $\mathcal{L}$-статистики.

a) Пусть $c_{jn}:=1/n$ для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Тогда $\mathcal{L}$-статистика l_n имеет вид

$$M_n:=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

и называется эмпирическим средним.

b) Пусть $c_{jn}:=2\,(2j-n-1)/\{n\,(n-1)\}$ для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Тогда

$$l_n=\frac{2}{n\,(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(2j-n-1)\,X_{j:n}$$

и, оказывается, совпадает со статистикой Джини (см. [4], с. 263)

$$G_n:=\frac{2}{n\,(n-1)}\sum_{1\leq i<j\leq n}|X_i-X_j|.$$

c) Пусть $p\in(0,\ 1)$ – некоторое число, $c_{jn}=1$, если $j=np$ или $j=[np]+1$ в зависимости от того $np=[np]$ или $np\neq[np]$ соответственно. Для всех остальных j числа $c_{jn}=0$. Тогда $\mathcal{L}$-статистика l_n имеет вид

$$\chi_n(p):=\begin{cases}X_{np:n}, & \text{если}\quad np=[np],\\ X_{[np]+1:n}, & \text{если}\quad np\neq[np],\end{cases}$$

и называется эмпирическим p-м квантилем (см., например, [4], с. 88). Через $[x]$ обозначается целая часть числа $x\in\mathbf{R}$.

d) Пусть $\alpha\in(0,\ 1/2)$. Тогда, очевидно, статистики (см. [4], с. 264)

$$T_n(\alpha):=\frac{1}{n-2\,[n\alpha]}\sum_{j=[n\alpha]+1}^{n-[n\alpha]}X_{j:n},$$

$$W_n(\alpha):=\frac{1}{n}\left([n\alpha]\,X_{[n\alpha]+1:n}+\sum_{j=[n\alpha]+1}^{n-[n\alpha]}X_{j:n}+[n\alpha]\,X_{n-[n\alpha]:n}\right)$$

тоже являются частными случаями $\mathcal{L}$-статистики.

Пример 1.3. Пусть $R_n:=0$ и для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ функции $h_{jn}(x):=\{x-j/(n+1)\}^2\,(n+1)/n$ $\forall x\in(0,\ 1)$. Тогда $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистика L_n имеет вид

$$D_n^2:=\frac{n+1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(U_{j:n}-\frac{j}{n+1}\right)^2$$

и называется статистикой Дурбина – Нотта (см., например, [14], с. 192).

Пример 1.4. Пусть $R_n:=1/(12n)$ и для всех $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ функции $h_{jn}(x):=\ldots 1)/(2n)\}^2$ $\forall x\in(0,\ 1)$. Тогда $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистика L_n имеет вид

и, оказывается, совпадает со статистикой Крамера – Мизеса

$$\omega_n^2:=n\int_{(0,\ 1)}\{F_n(x)-x\}^2\,dx.$$

Здесь $F_n(x):=(1/n)\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\,(U_i<x)$ – эмпирическая функция распределения. Формулу (1.2) называют представлением Андерсона – Дарлинга для статистики ω^2 (см. [5], [6], с. 21). Гладкость функции распределения статистики ω^2 рассматривалась в работах [7], [1].

Пример 1.5. Пусть $F_n(x):=(1/n)\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}\,(U_i<x)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по случайным величинам $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$, число $\mathcal{P}$ – целое положительное, борелевская функция $q:(0,\ 1)\to[0,\ +\infty]$ такая, что

$$\int_{(0,\ 1)}x^{2\mathcal{P}}\,(1-x)^{2\mathcal{P}}\,q(x)\,dx<+\infty.$$

Тогда корректно определена случайная величина

$$\omega_n^{2\mathcal{P}}(q):=n^{\mathcal{P}}\int_{(0,\ 1)}\{F_n(x)-x\}^{2\mathcal{P}}\,q(x)\,dx,$$

называемая ω-статистикой. В частности, при $\mathcal{P}=1$ и $q(x)\equiv1$ имеем статистику Крамера – Мизеса, а при $\mathcal{P}=1$ и $q(x)=1/\{x\,(1-x)\}$ – статистику Андерсона – Дарлинга. Нетрудно показать (см. теорему 3.3), что ω-статистика является $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистикой.

Сформулируем некоторые результаты о гладкости функций распределения рассмотренных выше статистик. Более точные результаты и подробные комментарии содержатся в § 3. Случай общих $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистик рассматривается в § 2 и 3.

Функцию $f:(a,\ b)\to[-\infty,\ +\infty]$, $(a,\ b)\subseteq\mathbf{R}$, будем называть кусочно-гладкой (кусочно-непрерывной и т. д.), если существует конечное разбиение $a=:x_0<x_1<\ldots<x_{I-1}<x_I:=b$ интервала $(a,\ b)$ такое, что на каждом открытом интервале $(x_{i-1},\ x_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ I$, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема (непрерывна и т. д.).

Будем говорить, что функция $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ принадлежит классу C^δ, если $g(x)$ имеет $[\delta]$ ($[x]$ – целая часть числа $x\in\mathbf{R}$) непрерывных производных и, кроме того, производная порядка $[\delta]$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\delta-[\delta]$. В частности, $C:=C^0$ обозначает класс непрерывных ограниченных функций.

Будем говорить, что $g(x)$ принадлежит классу $C^{<\delta}$, если $g(x)$ принадлежит классу C^α при любом $\alpha<\delta$. Символ $C^{<0}$ будет обозначать класс ограниченных (не обязательно непрерывных) функций.

Теорема 1.1. *Пусть случайная величина X имеет плотность $p(x)$, которая*

1) ограничена и кусочно-непрерывна, и для некоторых конечных постоянных $\delta\geq0$ и $L\geq0$ выполняются условия:

3) $\int\limits_{\mathbf{R}} |p(x+h)-p(x)|\,dx \leqq |h|\,L$

для достаточно малых h.

Тогда функция распределения

$$\mathbf{P}\left(l_n := \sum_{j=1}^{n} c_{jn} X_{j:n} < x\right)$$

принадлежит классу $C^{<\# I_n}$ ($\# A$ обозначает число элементов в множестве A), где I_n такое множество, что $|c_{jn}+c_{j+1,n}+\ldots+c_{kn}|>0$ для всех $j\in I_n$ и всех $k=j, \ldots, \max\{l: l\in I_n\}$.

В частности, если дополнительно потребуем $\{j: c_{jn}\neq 0\}\neq\varnothing$, то $\mathbf{P}(l_n<x)$ всегда будет принадлежать классу $C^{<1}$. В случае $\{j: c_{jn}\neq 0\}=\varnothing$ очевидно, $\mathbf{P}(l_n<x)$ является разрывной функцией со скачком высоты 1 в точке 0.

Из теоремы 1.1 немедленно вытекает

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 1.1. Тогда*

a) $\mathbf{P}(S_n<x)$, $\mathbf{P}(M_n<x)\in C^{<n}$

для всех $n=1, 2, \ldots$;

b) $\mathbf{P}(G_n<x)\in C^{<[n/2]}$

для всех $n=1, 2, \ldots$;

c) $\mathbf{P}\left(\chi_n(p)<x\right)\in C^{<1}$

для всех $n=1, 2, \ldots$ и $p\in(0, 1)$;

d) $\mathbf{P}\left(T_n(\alpha)<x\right)$, $\mathbf{P}\left(W_n(\alpha)<x\right)\in C^{<(n-2[n\alpha])}$

для всех $n=1, 2, \ldots$ и $\alpha\in(0, 1/2)$.

Замечание 1.1. Теорема 1.1, т. е. дифференцируемость функции распределения $\mathcal{L}$-статистики, доказывается при помощи изучения характеристической функции $\left(\text{т. е. доказывается сходимость интеграла } \int\limits_{\mathbf{R}} |t|^{\gamma-1}\,|\mathbf{E}\exp\{itl_n\}|\,dt\right)$. Оценка характеристической функции (и ее производных) содержится в § 2 (см., например, теорему 2.1) или в более приспособленном для $\mathcal{L}$-статистики варианте — в § 3 (см. пример 3.1). Как нетрудно видеть (см. теорему 3.1), условия на плотность в теореме 1.1 можно ослабить.

Теорема 1.2. *Пусть весовая функция $q(x)$ кусочно-гладкая и кусочно-монотонная. Кроме того, для некоторого $R>0$ выполняется $q(x)\geqq R$ $\forall x\in[0, 1]$. Тогда функция распределения $\mathbf{P}\left(\omega_n^{2\mathcal{P}}(q)<x\right)$ принадлежит классу $C^{<(n/(2\mathcal{P}))}$. В частности, функции распределения статистик Крамера–Мизеса и Андерсона–Дарлинга (см. пример 1.5) имеют $[(n-1)/2]$ ограниченных непрерывных производных и производная порядка $[(n-1)/2]$ удовлетворяет условию Липшица с любым показателем*

$\alpha<n/2-[(n-1)/2]$.

... кусочной моно-

функции $q(x)$ (см. замечание 3.4). Более полно эти вопросы обсуждаются в § 3 (см. пример 3.2).

Некоторые обозначения и терминология. Через $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$ будем обозначать соответственно множества целых положительных и вещественных чисел, $\mathbf{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство Евклида. Знак „$:=$" будет обозначать „по определению". Вместо sup и inf будем употреблять символы $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Для конечного множества A через $\# A$ обозначим число элементов этого множества. Кроме того, нам будет удобно пользоваться следующими обозначениями: $\#\varnothing := 0$,

$$\int\limits_{\varnothing} \ldots := 0, \quad \sum_{\varnothing} \ldots := 0, \quad \prod_{\varnothing} \ldots := 1, \quad \bigvee_{\varnothing} \ldots := 0, \quad \bigwedge_{\varnothing} \ldots := +\infty.$$

Множество $(A, B) := \{x: A<x<B\}$ всегда будем называть интервалом, а $[A, B] := \{x: A\leqq x\leqq B\}$ — отрезком. Как следствие вышесказанного, будем иметь, например, что $\int\limits_{(A,\, B)} \ldots = 0$ при $A\geqq B$. Кроме этих обозначений будем употреблять следующие: $[x]$ — целая часть числа $x\in\mathbf{R}$, $\mathbb{1}(u)$ — индикаторная функция, которая равна 1 или 0, если условие u выполнено или нет соответственно. И наконец, будем писать $\alpha(h)\leqq\beta$ $(h\to 0)$, если хотим сказать, что $\alpha(h)\leqq\beta$ выполняется в некоторой (непустой) окрестности нуля.

§ 2. Оценка одного многомерного осциллирующего интеграла

Пусть $\{k_j, j=1, 2, \ldots, n\}$ — набор неотрицательных целых чисел, p_j и H_j для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ — борелевские функции из $\mathbf{R}$ в $[-\infty, +\infty]$.

Настоящий параграф посвящен оценке многомерного осциллирующего интеграла

$$W_t := \int\limits_{-\infty<x_1<\ldots<x_n<+\infty} \prod_{j=1}^{n} \left\{p_j(x_j)\,H_j^{k_j}(x_j)\exp\left(itH_j(x_j)\right)\right\} dx_n\ldots dx_1,$$

учитывая параметр t и кратность интеграла.

Сначала рассмотрим связь между этим интегралом и рассматриваемыми нами задачами об $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистике.

Итак, если мы желаем исследовать гладкость функции распределения, мы это можем делать рассматривая характеристическую функцию. Более того, если мы хотим изучать скорость сходимости в локальной предельной теореме или конструировать асимптотические разложения в этой теореме, то одним из возможных путей тоже является исследование характеристической функции. Поэтому естественной является задача об оценке характеристической функции и ее производных $\mathcal{F}\mathcal{L}$-статистики. Для этой цели и рассматривается интеграл W_t.

Более подробно, пусть $s\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}} |h_{jn}(x)|^s\,dx$ сходится для любого $j=1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^s \mathbf{E}\exp\{itL_n\} = i^s\,\mathbf{E}\,L_n^s\exp\{itL_n\} =$$

(разбиваем куб $[0, 1]^n$ на $n!$ частей)

$$= i^s \exp\{itR_n\}\, n! \int\limits_{0<x_1<\ldots<x_n<1} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n} h_{jn}(x_j) + R_n \right\}^s \exp\left\{ it \sum_{j=1}^{n} h_{jn}(x_j) \right\} dx_n \ldots dx_1 =$$

$$= i^s \exp\{itR_n\}\, n! \sum C_s(k_0, \ldots, k_n)\, R_n W_t^{\mathcal{F}\mathcal{L}}, \tag{2.1}$$

где суммирование ведется по всем наборам $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ таким, что $k_0, k_1, \ldots, k_n \geqq 0$ и $k_0+k_1+\ldots+k_n=s$. Интеграл

$$W_t^{\mathcal{F}\mathcal{L}} := \int\limits_{0<x_1<\ldots<x_n<1} \prod_{j=1}^{n} \left\{ h_{jn}^{k_j}(x_j) \exp\left(ith_{jn}(x_j)\right) \right\} dx_n \ldots dx_1.$$

Нетрудно убедиться, что в случае $\mathcal{L}$-статистики (см. пример 1.2) интеграл $W_t^{\mathcal{F}\mathcal{L}}$ в (2.1) при существовании плотности случайной величины X можно заменить интегралом

$$W_t^{\mathcal{L}} := \int\limits_{-\infty<x_1<\ldots<x_n<+\infty} \prod_{j=1}^{n} \{p(x_j)(c_{jn}x_j)^{k_j} \exp(itc_{jn}x_j)\}\, dx_n \ldots dx_1$$

($p(x)$ – плотность случайной величины X).

Интеграл $W_t^{\mathcal{L}}$, как и интеграл $W_t^{\mathcal{F}\mathcal{L}}$, является частным случаем интеграла W_t.

Теорема 2.1 (алгорифм построения оценки интеграла W_t). *Пусть s, $s \geqq k_1+\ldots+k_n$, – некоторое число, выполнено условие*

i) $$\rho := \bigvee_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{R}} |p_j(x)|\, dx < +\infty,$$

$$\mu := \bigvee_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbf{R}} |p_j(x)|\, |H_j(x)|^s\, dx < +\infty.$$

Кроме того, пусть I – некоторое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $j_0 := \bigwedge_{x \in I} \{x\}$, $j_1 := \bigvee_{x \in I} \{x\}$. Через Ω обозначим некоторый интервал такой, что для всех $j_0 \leqq j \leqq j_1$ имели

$$\{x : p_j(x) \neq 0\} \subseteqq \Omega$$

(в частности, может случиться, что $\Omega = \mathbf{R}$).

Предположим, что существует некоторое конечное разбиение

$$\bigwedge_{x\in\Omega} \{x\} =: x_0 < x_1 < \ldots < x_{V-1} < x_V := \bigvee_{x\in\Omega} \{x\}$$

интервала Ω такое, что

ii) на интервалах (x_{v-1}, x_v), $v=1, 2, \ldots, V$, функции $p_j(x)$, $j_0 \leqq j \leqq j_1$, непрерывны, а $H_j(x)$, $j_0 \leqq j \leqq j_1$, один раз непрерывно дифференцируемы;

iii) для некоторой функции $\xi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, каждого $v=1, 2, \ldots, V$ и всех $\varepsilon \in (0, +\infty)$ выполняются условия:

p1) для некоторой функции $\Theta : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$\bigvee_{j\in I} \int\limits_{\mathbf{R} \setminus (-\xi(\varepsilon),\, \xi(\varepsilon))} |p_j(x)|\, dx \leqq \Theta(\varepsilon);$$

p2) для некоторой функции $\Xi : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$\bigvee_{j\in I} \int\limits_{\partial\Omega_v} |p_j(x)|\, dx \leqq \Xi(\varepsilon),$$

где

$$\partial\Omega_v := (x_{v-1}, x_v) \cap \{(x_{v-1}, x_{v-1}+\varepsilon) \cup (x_v - \varepsilon, x_v)\} \cap \left(-\xi(\varepsilon), \xi(\varepsilon)\right);$$

p3) для некоторой функции $\pi : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$\bigvee_{j_0\leqq j\leqq j_1} \bigvee_{x\in\mathring{\Omega}_v} |p_j(x)| \leqq \pi(\varepsilon)$$

(здесь и ниже $\mathring{\Omega}_v := (x_{v-1}+\varepsilon, x_v - \varepsilon) \cap \left(-\xi(\varepsilon), \xi(\varepsilon)\right)$);

p4) для некоторой функции $\Upsilon : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$\bigvee_{j_0\leqq j\leqq j_1} \int\limits_{\Omega_v} |p_j(x+h) - p_j(x)|\, dx \leqq |h|\, \Upsilon(\varepsilon)\ (h \to 0);$$

h1) для некоторой функции $\Lambda : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$\bigvee_{j_0\leqq j\leqq j_1} \bigvee_{x\in\mathring{\Omega}_v} |H_j(x)| \leqq \Lambda(\varepsilon);$$

h2) для некоторой функции $\lambda : (0, +\infty) \to (0, +\infty]$

$$\bigwedge_{I\ni j\leqq k\leqq j_1} \bigwedge_{x\in\mathring{\Omega}_v} |H_j'(x) + \ldots + H_k'(x)| \geqq \lambda(\varepsilon);$$

h3) для некоторой функции $\Gamma : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$$\bigvee_{I\ni j\leqq k\leqq j_1} \int\limits_{\mathring{\Omega}_v} \left| 1 \Big/ \sum_{l=j}^{k} H_l'(x+h) - 1 \Big/ \sum_{l=j}^{k} H_l'(x) \right| dx \leqq |h|\, \Gamma(\varepsilon)\ (h \to 0).$$

Тогда для всех $|t| \geqq 1$ и $T>0$ справедлива оценка

$$|W_t| \leqq 4^n A^{\# I} (1 \vee \rho)^n (1 \vee \mu)^{1\,(s>0)}\, \alpha(T)^s / \beta(t, T)^{\# J}, \tag{2.2}$$

где

$$A := V\{4 + \Upsilon(T) + \lambda(T)\Gamma(T) + 2s\},$$

$$\alpha(T) := 1 \vee \Lambda(T) \vee \{\Theta(T) + \Xi(T)\}^{-1},$$

$$\beta(t, T) := \frac{|t| \wedge |t| \lambda(T)}{1 \vee \pi(T)} \wedge \frac{1}{\Theta(T) + \Xi(T)}.$$

Доказательство теоремы 2.1 (и всех остальных утверждений) приведено во второй части статьи.

Замечание 2.1. Нетрудно видеть, что при определенных условиях на функции $p_j(x)$, $j_0 \leqq j \leqq j_1$, из $p3$ будет следовать $p4$, причем с функцией $\Upsilon(\varepsilon) \approx \pi(\varepsilon)$. Аналогичная ситуация и с условиями $h2$ и $h3$, а именно, при определенных условиях из $h2$ будет следовать $h3$, причем с функцией $\Gamma(\varepsilon) \approx 1/\lambda(\varepsilon)$.

Замечание 2.2. Остановимся более подробно на условии $h2$. Часто предполагается (см., например [10] – [13]), что существует целое неотрицательное l такое, что для любого $x \in \Omega$ (= область интегрирования в осциллирующем интеграле) выполняются условия типа $|f^{(l)}(x)| \geqq A$, и если так, то интеграл, скажем $\int\limits_{\Omega} \exp\{itf(x)\}\,dx$, можно оценить через $c(A, l)|t|^{-1/l}$. Нам кажется, что условия типа $h2$ предпочтительнее этих условий. Объясняется это тем, что условия типа $h2$ не требуют знаний о производных функции более высокого порядка, чем 1, что, во-первых, позволяет рассматривать более сложные функции, а во-вторых, облегчает проверку. С другой стороны, условия типа $h2$ и типа $|f^{(l)}(x)| \geqq A$ близки по своему смыслу – учитывают стационарные точки, т. е. точки, в которых несколько первых производных обращается в 0, или, другими словами, учитывают точки, вклад которых в интеграл наибольший.

Замечание 2.3. Исследованию многомерных интегралов вида

$$\int\limits_{\Omega \subseteqq \mathbf{R}^n} f(x) \exp\{itS(x)\}\,dx$$

посвящено много работ (см., например, [9] – [12] и содержащуюся там библиографию). Результаты этих работ прояснили качественную картину поведения интеграла W_t. К сожалению, результаты этих работ не оказались достаточными для наших целей. Специфика интеграла W_t позволила более глубоко его изучить.

К исследованиям по многомерным осциллирующим интегралам можно отнести и некоторые результаты работ [14], [1], [8].

Замечание 2.4. Одномерные осциллирующие интегралы

$$\int\limits_{(a, b)} f(x) \exp\{itS(x)\}\,dx,$$

§ 3. Примеры

Пример 3.1 ($\mathcal{L}$-статистика, определение см. в примере 1.2). Предположим, что существует плотность случайной величины X, и в этом случае переформулируем теорему 2.1 для интеграла $W_t^{\mathcal{L}}$.

Теорема 3.1. *Пусть s, $s \geqq k_1 + \ldots + k_n$, — некоторое число и выполнено условие*

*a*1) $\mu := \mathbf{E}|X|^s = \int\limits_{\mathbf{R}} |x|^s p(x)\,dx < +\infty.$

Кроме того, пусть существует конечное разбиение $-\infty =: x_0 < x_1 < \ldots < x_{V_n - 1} < x_{V_n} := +\infty$ вещественной прямой $\mathbf{R}$ такое, что для некоторой функции $\xi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, каждого $v = 1, 2, \ldots, V_n$ и всех $\varepsilon \in (0, +\infty)$ выполняются условия:

*a*2) *плотность $p(x)$ непрерывна на интервале (x_{v-1}, x_v);*

*a*3) *для некоторой функции $\Theta : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$*

$$\mathbf{P}(|X| > \xi(\varepsilon)) = \int\limits_{\mathbf{R} \setminus (-\xi(\varepsilon), \xi(\varepsilon))} p(x)\,dx \leqq \Theta(\varepsilon);$$

*a*4) *для некоторой функции $\Xi : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$*

$$\mathbf{P}\Big(X \in \{(x_{v-1}, x_{v-1} + \varepsilon) \cup (x_v - \varepsilon, x_v)\} \cap \cap (-\xi(\varepsilon), \xi(\varepsilon)) \cap (x_{v-1}, x_v)\Big) \leqq \Xi(\varepsilon);$$

*a*5) *для некоторой функции $\pi : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$*

$$\vee |p(x)| \leqq \pi(\varepsilon),$$

где max *берется по всем*

$$x \in (x_{v-1} + \varepsilon, x_v - \varepsilon) \cap (-\xi(\varepsilon), \xi(\varepsilon));$$

*a*6) *для некоторой постоянной $L \geqq 0$*

$$\int\limits_{(x_{v-1}+\varepsilon,\, x_v-\varepsilon) \cap (-\xi(\varepsilon),\, \xi(\varepsilon))} |p(x+h) - p(x)|\,dx \leqq |h| L \ (h \to 0).$$

Тогда для всех $|t| \geqq 1$ и $T > 0$ справедлива оценка

$$|W_t^{\mathcal{L}}| \leqq 4^n A_n^{\# I_n} (1 \vee \mu)^{\mathbf{1}(s>0)} \alpha_n(T)^s / \beta_n(t, T)^{\# I_n},$$

где

$$A_n := V_n(4 + L + 2s),$$

$$\alpha_n(T) := 1 \vee C_n \xi(T) \vee \{\Theta(T) + \Xi(T)\}^{-1},$$

$$\beta_n(t, T) := \frac{|t| \wedge |t| \lambda_n}{1 \vee \pi(T)} \wedge \{\Theta(T) + \Xi(T)\}^{-1},$$

обозначено наибольшее число среди $|c_{jn}|$, когда j пробегает все числа между $\wedge\{l: l\in I_n\}$ и $\vee\{l: l\in I_n\}$.

Приведем одно простое следствие теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть s, $s\geqq k_1+\ldots+k_n$, — некоторое число и выполнены условия:*

1) *плотность $p(x)$ случайной величины X ограничена и кусочно-непрерывна, т. е. существует постоянная K такая, что $p(x)\leqq K$ $\forall x\in\mathbf{R}$ и существует разбиение числовой прямой $\mathbf{R}$ на V интервалов, в которых плотность $p(x)$ непрерывна;*

2) *для некоторой постоянной $L\geqq 0$*

$$\int_{\mathbf{R}} |p(x+h)-p(x)|\,dx\leqq |h|\,L\ (h\to 0);$$

3) *для некоторого $\delta>0$ такого, что $\delta\geqq s$ интеграл*

$$\mu:=\mathbf{E}|X|^{\delta}=\int_{\mathbf{R}}|x|^{\delta}p(x)\,dx$$

существует.

Тогда для всех $|t|\geqq 1$ и $T>0$

$$|W_t^{\mathcal{L}}|\leqq 4^n\{V(4+L+2s)/(1\vee K)\}^{\# I_n}(1\vee\mu)^{1\,(s>0)}\times$$
$$\times\left\{1\vee C_n\xi(T)\vee\left(\mu\xi(T)^{-\delta}+2KT\right)^{-1}\right\}^s/$$
$$/\left\{|t|\wedge\lambda_n|t|\wedge\left(\mu\xi(T)^{-\delta}+2KT\right)^{-1}\right\}^{\# I_n}, \tag{3.1}$$

где множество I_n, числа λ_n и C_n определены в формулировке теоремы 3.1, а $\xi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ — любая функция.

В частности, из следствия 3.1 и формулы (2.1) вытекает

Следствие 3.2. *Пусть s — целое неотрицательное число и выполнены условия 1)–3) следствия 3.1. Тогда при всех $|t|\geqq 1$*

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s\mathbf{E}\exp\{itl_n\}\right|\leqq$$
$$\leqq n!\,(n+1)^s\,4^n\{V(4+L+2s)/(1\vee K)\}^{\# I_n}(1\vee\mu)^{1\,(s>0)}\times$$
$$\times\{1\vee C_n|t|^{-1+1/\delta}\vee(\mu+2K)^{-1}\}^s\{1\wedge\lambda_n\wedge(\mu+2K)^{-1}\}^{-\# I_n}|t|^{s-\# I_n} \tag{3.2}$$

(I_n, λ_n, C_n определены в формулировке теоремы 3.1).

Замечание 3.1. Оценка (3.2) показывает степенное убывание характеристической функции $\mathcal{L}$-статистики вне окрестности нуля. Такие оценки характеристической функции и ее производных позволяют, в частности, изучать скорость сходимости, а также конструировать асимптотические разложения в локальной предельной теореме.

Из предыдущего утверждения немедленно вытекает

Следствие 3.3. *Если существует момент $\mathbf{E}|X|^{\delta}$ при некотором $\delta>0$ и условия 1), 2) следствия 3.1 выполнены, то*

$$\mathbf{P}(l_n<x)\in C^{<\# I_n}, \tag{3.3}$$

где множество I_n определено в теореме 3.1.

Пример 3.2 (ω-статистика, определение см. в примере 1.4). Переформулируем теорему 2.1 в случае интеграла $W_t^{\mathcal{FL}}$.

Теорема 3.2. *Пусть s, $s\geqq k_1+\ldots+k_n$, — некоторое число и выполнено условие*

$$b1)\ \mu_n:=\bigvee_{j=1}^{n}\int_{(0,\,1)}|h_{jn}(x)|^s\,dx<+\infty.$$

Кроме того, пусть I_n — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $j_{0n}:=\bigwedge_{l\in I_n}\{l\}$, $j_{1n}:=\bigvee_{l\in I_n}\{l\}$ и существует некоторое конечное разбиение

$$0=:x_0<x_1<\ldots<x_{V_n-1}<x_{V_n}:=1$$

интервала $(0,1)$ такое, что

b2) функции $h_{jn}(x)$ для любого $j_{0n}\leqq j\leqq j_{1n}$ один раз непрерывно дифференцируемы на интервалах

$$(x_{v-1},\,x_v),\quad v=1,2,\ldots,V_n;$$

b3) для некоторой функции $\Lambda_n:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$

$$\bigvee_{j_{0n}\leqq j\leqq j_{1n}}\ \bigvee_{x\in(x_{v-1}+\varepsilon,\,x_v-\varepsilon)}|h_{jn}(x)|\leqq\Lambda_n(\varepsilon);$$

b4) для некоторой функции $\lambda_n:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$

$$\bigwedge_{I_n\ni j\leqq k\leqq j_{1n}}\ \bigwedge_{x\in(x_{v-1}+\varepsilon,\,x_v-\varepsilon)}\left|\sum_{l=j}^{k}h'_{ln}(x)\right|\geqq\lambda_n(\varepsilon);$$

b5) для некоторой постоянной $\gamma_n\geqq 0$

$$\bigvee_{I_n\ni j\leqq k\leqq j_{1n}}\ \int_{(x_{v-1}+\varepsilon,\,x_v-\varepsilon)}\left|1\Big/\sum_{l=j}^{k}h'_{ln}(x+h)-1\Big/\sum_{l=j}^{k}h'_{ln}(x)\right|dx\leqq$$
$$\leqq|h|\,\gamma_n/\lambda_n(\varepsilon)\ (h\to 0).$$

Тогда для всех $|t|\geqq 1$ и $T>0$ справедлива оценка

$$|W_t^{\mathcal{FL}}|\leqq A_n^{\# I_n}(1\vee\mu_n)^{1\,(s>0)}\,4^n\alpha_n(T)^s/\beta_n(t,T)^{\# I_n},$$

где

$$A_n:=V_n(4+\gamma_n+2s),$$
$$\alpha_n(T):=1\vee\Lambda_n(T)\vee(1/T),$$
$$\beta_n(t,T):=|t|\wedge|t|\lambda_n(T)\wedge(1/T).$$

Теорема 3.3. *ω-статистика является $\mathcal{FL}$-статистикой. Более подробно*

$$\omega_n^{2\,p}(q)=\sum_{j=1}^{n}Q_{jn}(U_{j:n})+R_n, \tag{3.4}$$

где

$$Q_{jn}(x) := n^{\mathscr{P}} \int\limits_{(x,\ 1/2)} \left\{ \left(\frac{j}{n}-t\right)^{2\mathscr{P}} - \left(\frac{j-1}{n}-t\right)^{2\mathscr{P}} \right\} q(t)\,dt -$$

$$-n^{\mathscr{P}} \int\limits_{(1/2,\ x)} \left\{ \left(\frac{j}{n}-t\right)^{2\mathscr{P}} - \left(\frac{j-1}{n}-t\right)^{2\mathscr{P}} \right\} q(t)\,dt \ \ \forall x \in (0,\ 1),$$

$$R_n := n^{\mathscr{P}} \int\limits_{(0,\ 1/2)} t^{2\mathscr{P}} q(t)\,dt + n^{\mathscr{P}} \int\limits_{(1/2,\ 1)} (1-t)^{2\mathscr{P}} q(t)\,dt.$$

В частности, при $\mathscr{P}=1$ *и* $q(x)\equiv 1$ *имеем*

$$\omega_n^2 := \omega_n^{2\mathscr{P}}(q) = \sum_{j=1}^{n} \left(U_{j:n} - \frac{2j-1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{12n}.$$

Замечание 3.2. Представление ω-статистики как $\mathscr{F}\mathscr{L}$-статистики, по-видимому, берет начало в работе [5] (см. также [6], [8], [15]). Утверждение теоремы 3.3 о представлении ω-статистики как $\mathscr{F}\mathscr{L}$-статистики является окончательным в том смысле, что оно применимо для всех корректно определенных статистик $\omega_n^{2\mathscr{P}}(q)$, т. е. для любого $\mathscr{P}\in\mathbf{N}$ и всех весовых функций $q(x)$, для которых интеграл

$$\int\limits_{(0,\ 1)} x^{2\mathscr{P}}(1-x)^{2\mathscr{P}} q(x)\,dx$$

сходится.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия:*

1) $q(x) \geqq R > 0 \quad \forall x \in (0,\ 1)$;

2) *существует конечное разбиение*

$$0 =: x_0 < x_1 < \ldots < x_{V-1} < x_V := 1$$

интервала (0, 1) *такое, что для каждого* $v=1,\ 2,\ \ldots,\ V$

a) функция $q(x)$ *в интервале* $(x_{v-1},\ x_v)$ *непрерывна;*

b) для некоторой постоянной $L\geqq 0$ *и всех* $\varepsilon>0$

$$\int\limits_{(x_{v-1}+\varepsilon,\ x_v-\varepsilon)} \left| \frac{1}{q(x+h)} - \frac{1}{q(x)} \right| dx \leqq |h|\, L \quad (h\to 0).$$

Тогда для любого $\mathscr{P}\in\mathbf{N}$

$$\mathbf{P}\left(\omega_n^{2\mathscr{P}}(q) < x\right) \in C^{<(n/(2\mathscr{P}))}.$$

Замечание 3.3. Нетрудно видеть, что если $q(x)$ кусочно-гладкая и кусочно-монотонная, то существует такое разбиение интервала (0, 1), для которого условие 2) теоремы 3.4 выполнено.

Замечание 3.4. Нетрудно видеть (см. теорему 3.2), что от условия $q(x)\geqq$ $\geqq R>0$ $\forall x\in(0,\ 1)$ можно отказаться. Но в таком случае получим, что степень

гладкости функции распределения $\mathbf{P}\left(\omega_n^{2\mathscr{P}}(q)<x\right)$ зависит не только от $\mathscr{P}$, но и от весовой функции $q(x)$, т. е. получим, что

$$\mathbf{P}\left(\omega_n^{2\mathscr{P}}(q)<x\right) \in C^{<s},$$

где $s := s(\mathscr{P},\ q)$.

Литература

1. **Бенткус В. Ю., Зитикис Р. Э.** Замечание о критерии Крамера–Мизеса–Смирнова // Liet. matem. rink. 1988. Т. 28, № 1. С. 14–22. ISSN 0132–2818.

2. **Петров В. В.** Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1, вып. 3. С. 349–357.

3. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972. С. 416.

4. **Serfling R. J.** Approximation theorems of mathematical statistics. New York: John Wiley and Sons, 1980. 371 p.

5. **Anderson T. W., Darling D. A.** Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statist. 1952. V. 23. P. 193–212.

6. **Мартынов Г. В.** Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. С. 80.

7. **Csörgö S., Stachó L.** A step toward an asymptotic expansion for the Cramer–von Mises statistic // Coll. Math. Soc. J. Bolyai 21. Analytic function methods in Probability Theory. Debrecen (Hungary). 1977. P. 53–65.

8. **Зитикис Р. Э.** Асимптотические разложения для производных функций распределения статистики Андерсона–Дарлинга // Liet. matem. rink. 1989. Т. 29, № 1. С. 35–53. ISSN 0132–2818.

9. **Риекстыньш Э. Я., Цирулис Т. Т.** О методах, применяемых к асимптотическому представлению функций, определяемых интегралами, при больших значениях параметра //Латв. мат. ежегодник. Рига, Зинатне, 1970. Вып. 7. С. 193–253.

10. **Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.** Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987. С. 368.

11. **Федорюк М. В.** Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. С. 544.

12. **Юринский В. В.** Оценки для характеристических функций некоторых вырожденных многомерных распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. XII, вып. 1. С. 99–110.

13. **Садикова С. М.** Некоторые неравенства для характеристических функций // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. XI, вып. 3. С. 500–506.

14. **Королюк В. С., Боровских Ю. В.** Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова думка, 1984. С. 304.

15. **Зитикис Р. Э.** Асимптотические разложения в локальной предельной теореме для статистик ω_n^2 // Liet. matem. rink. 1988. Т. 28, № 3. С. 461–474. ISSN 0132–2818.

16. **Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.** Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

Институт математики и кибернетики
Литовской Академии наук

Поступило в редакцию
14.03.1989

APIE $\mathscr{F}\mathscr{L}$ STATISTIKOS PASISKIRSTYMO FUNKCIJOS DIFERENCIJUOJAMUMĄ. I

R. Zitikis

(*Reziumė*)

Tiriamas $\mathscr{F}\mathscr{L}$ statistikos (funkcijų nuo pozicinių statistikų tiesiniai dariniai) pasiskirstymo funkcijos glodumas. Rezultatai gaunami nagrinėjant šios statistikos charakteristinę funkciją „begalybės aplinkoje". Rasti $\mathscr{L}$ ir ω statistikų, kaip atskirų $\mathscr{F}\mathscr{L}$ statistikos atvejų, pasiskirstymo funkcijų diferencijuojamumo laipsniai.

ON THE DIFFERENTIABILITY OF THE $\mathscr{F}\mathscr{L}$-STATISTIC DISTRIBUTION FUNCTION. I

R. Zitikis

Summary)

Let U be a random variable uniformly distributed on $(0, 1)$. Denote $U_1, U_2, \ldots, U_n$ a sequence of independent copies of U, and, as usual, denote the ordered values by $U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}$. Many important statistics may be expressed in the form

$$L_n := \sum_{i=1}^{n} h_{in}(U_{i:n}) + R_n$$

for some choice of Borel functions $h_{in}:(0, 1)\to\mathbf{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$, and constant R_n. The random variable L_n is called the $\mathscr{F}\mathscr{L}$-statistic. For instance, the $\mathscr{F}\mathscr{L}$-statistic L_n includes as special cases the $\mathscr{L}$- and ω-statistics.

In this paper the differenciability of P $(L_n<x)$ is dealt with.

30 LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1990

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРОВСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ф. Ф. Иванаускас

В данной работе рассматриваются системы нелинейных нестационарных уравнений шредингеровского и параболического типа. Основное внимание уделено уравнениям шредингеровского типа, а в последнем параграфе исследуются уравнения параболического типа. Многие задачи нелинейной оптики описываются нелинейными уравнениями Шредингера (НУШ) [1–4]. Модели типа НУШ соответствуют квазиоптическому приближению, позволяющему учитывать одновременно нелинейные и дифракционные (дисперсионные) эффекты. Математические аспекты, связанные с переходом от волнового уравнения к его шредингеровскому приближению и выяснению роли малых параметров, рассмотрены в [5, 6]. Отметим также, что помимо нелинейной оптики модели типа НУШ используются в физике плазмы, квантовой механике, теории вихревого движения и сверхпроводимости, физике твердого тела и других областях естествознания, где требуется математическое описание нелинейных волновых процессов.

Наиболее общий подход в построении и обосновании численных методов решения задач нелинейной оптики, содержащих в своей постановке НУШ, осуществлен в работах Ю. Н. Карамзина [7, 8]. В [7] для указанного класса задач предложены симметричные разностные схемы, изучена их консервативность. Для данных разностных схем дискретный аналог закона сохранения энергии выполняется точно, а два других закона сохранения – с погрешностью, не превышающей погрешности аппроксимации. Для реализации разностных схем предложены итерационные методы. Доказана сходимость рассмотренных алгоритмов и получены оценки погрешности метода в сеточной норме L_2. Для решения нелинейных уравнений шредингеровского типа в [9] предложен конструктивный способ построения консервативных разностных схем. Он основан на аппроксимации нелинейной части с помощью функционала специального вида. При доказательстве сходимости разностных алгоритмов использована методика [10, 11], что в отличие от [7, 8] позволило получить оценки погрешности метода в сеточной норме L_2 без существенных ограничений на соотношение пространственных и временных шагов сетки. Аналогичные результаты в обосновании для НУШ получены также в работах [12, 13]. В работе [14] для одномерного случая доказана сходимость разностного метода в W_2^1 без ограничения на соотношения пространственных и временных шагов сетки.

В данной работе рассматривается краевая задача для системы НУШ в двумерном и одномерном случаях. Для ее решения применяется неявная разностная схема с весами. Для аппроксимации нелинейной части применяется функционал. Доказана сходимость разностной схемы, сходимость итерационного метода решения неявной схемы в сеточных нормах L_2, C без каких-